

近畿大学工学部 数学コンテスト問題

1999年2月20日(土)
主催：理工学部数学物理学科数学コース

- 1 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1^2 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 1^3 & 3^3 & 5^3 & 7^3 \\ 1^4 & 3^4 & 5^4 & 7^4 \end{pmatrix}$$

- 2 $f(x)$ を微分可能な関数とする. $f'(x), f''(x)$ が存在し, $2f(0) = f(1) + f(-1)$ が成り立つならば $f''(c) = 0$ を満たす実数 c が少なくとも1つ存在することを証明せよ.

- 3 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ の増減を調べることにより次の問に答えよ.

- (1) e^π と π^e はどちらが大きいか?
(2) $a^b = b^a$ を満たす自然数 (a, b) の組をすべて求めよ.

- 4 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおくとき次の問に答えよ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ であることを証明せよ.

(2) 太陽の寿命はあと50億年と言われている. この予想が正しいとすると, 人類は50億年後には少なくとも, この地球上には生存し得ない.

さて, 現在のスーパーコンピュータは1秒間に何千万回もの加減乗除の演算ができるらしい. そこで今からそのようなコンピュータを用いて S_n を計算してみよう. 簡単のため, 毎秒1千万 (= 10^7) 項計算できると仮定する. すなわち, スタートして1秒後には S_{10^7} が求まり, 2秒後には $S_{2 \cdot 10^7}$ が求まり, ... のように計算が進むとする. このように今から計算を始めて50億年間計算を続けたとする. 50億年後, 太陽の寿命が尽きるとき, この和はどれくらいの大きさになっているだろうか. その整数部分を求めよ.

ただし, 次の値は利用してよい. $\log 2 = 0.69315$, $\log 3 = 1.09861$, $\log 5 = 1.60944$. また, 簡単のため閏年, 閏秒等は考えずに1年間は365日, 1時間は3600秒とする.

□5 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく.

- (1) n が素数のとき S_n は整数にならないことを証明せよ.
- (2) 一般の自然数 n に対して S_n は整数になるかどうかを考察せよ.

[案内] 本コンテスト問題の解説を 15:30 の解答回収後 401 教室で行う予定です. エレガントな解法に興味のある学生や内容に質問のある学生または今後の本コンテストの運用等にご意見のある学生は残って, 是非解説の内容も堪能し先生方と議論あるいは意見を交換してください.