平成１１年１０月３０日（土）

近畿大学理工学部数学物理学科数学コース主催

第 2 回数学コンテスト出題問題

注意事項：　解答作成場所はどこでも自由です．但し, 15:00 に再びこの場所 (31 号館 401 教室) へ戻ってきて解答を提出してください．勿論, 遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ, 表彰及び賞品を贈呈します．16:30 より, 表彰が行われます．グループによる解答は, 解答に携わった者の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際, 合計ポイント x に対して, 解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は,

$$\frac{x}{\sqrt{n}} \quad \text{ポイント}$$

となります．尚, 各問題の最後にポイントが記されていますが, もしも出題者の用意した解答を上回る極めて優れた解答には, 採点者の判断により最高でポイントが 2 倍まで与えられる可能性があることも念頭において解答に望んで下さい．数学のプロフェッショナルへの質問は禁じます．それでは, 数学を愛する者のフェアーな精神で, コンテストに挑戦して下さい．

$\boxed{\text{I}}$　関数

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} \quad (x \neq 0)$$

の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．
(15 ポイント)

$\boxed{\text{II}}$　自然数 n に対し、２人づつが座れる n 個の席の用意されたバスがあるとする。このバスに n 組の夫婦が乗り込んで旅をする。各二人席には必ず男女がすわり、男性は窓側の席にすわるものとし、どの二人席にも夫婦が座らないものとする（つまり夫婦は別々の二人席に座る）。このとき、可能な座り方は何通りあるか。(20 ポイント)

$\boxed{\text{III}}$　皆さんは和算（江戸時代、日本で栄えた数学）のことを御存知だろうか? ニュートンやライプニッツに先んじて微分や積分にあたることを考えていた関孝和や, その弟子, 建部賢弘（たけべかたひろ）の成し遂げたことは世界的に見ても時代の最先端を行くものであった. 建部の発見した π を与える公式は現代流に書くと

$$\pi^2 = 9\left(1 + \frac{1^2}{3\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \dots\right) \tag{1}$$

となる. ヨーロッパ数学史上の巨人オイラーでさえ, この式を得たのは建部より 15 年後の 1737 年であった. (1) 式は逆三角関数 $\sin^{-1} x$ の平方のテイラー展開

$$(\sin^{-1} x)^2 = 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{2^2 x^4}{4!} + \frac{2^2\cdot 4^2 x^6}{6!} + \dots\right) \tag{2}$$

から容易に導くことができる. さて, ここで問題.

第一問　(2) 式がわかっているものとして (1) を導け. その際, これらの式で省略されている一般項の形を正確に与えよ.

第二問　(2) 式を (一般項を込めて) 証明せよ. また, この式がどのような範囲の x に対して有効かを論ぜよ.

　これらの式は建部が人生を賭けて心血を注いだ末にようやく発見したものである (鳴海　風著, 円周率を計算した男（新人物往来社）参照）. しかし, 現代の数学の基礎知識を活用すれば与えられた時間内に解答を得ることはそれほど困難ではない. 健闘を祈る.
(30 ポイント)

$\boxed{\text{IV}}$　実数$\alpha,\ \beta$について、

$$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0 \quad \text{ならば} \quad \alpha>0,\ \beta>0$$

であることは明らかです。それでは、

(1)　実数　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対し,

$$\alpha+\beta+\gamma>0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0,\ \alpha\beta\gamma>0$$

ならば

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$$

であることを証明してください。

(2)　t に関する多項式

$$f_n(t)=(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n)$$

を展開して t について

$$f_n(t)=t^n-p_1t^{n-1}+p_2t^{n-2}-p_3t^{n-3}+\cdots+(-1)^np_n$$

の形に整理したとき、その係数 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ は、$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ の多項式になり、「$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ に関する基本対称式」と呼ばれます。
このとき、(1) の一般化である次の命題は正しいでしょうか？　正しければ証明し、誤りであれば反例をあげてください。
(命題)「　実数$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\cdots,\alpha_n$について

$$\begin{array}{l} p_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)>0, \\ p_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)>0, \\ p_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)>0, \\ \qquad\vdots \\ p_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)>0 \end{array} \quad \text{ならば} \quad \alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \alpha_3>0,\cdots,\ \alpha_n>0$$

である。」
(35 ポイント)