第24回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります.

問題は合計 8 問（A 問題 5 問と B 問題 3 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください.

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください.
- すべての解答用紙に名前を書いてください.
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください.
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります.
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します.
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません.
- 提出された解答用紙は返却しません.

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください.

GOOD LUCK !!

[1] 2022 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1　24pt

a, b, c, d についての方程式

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 24\, a\, b^2 c^3 d^4$$

の整数解をすべて求めよ.

問題 A-2　25pt

曲線 $y = \log(\sin x) \quad \left(\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の長さを L とする．このとき，

$$m \leqq 100L < m + 1$$

を満たす自然数 m の値を求めよ．ただし，数表などに現れる近似値を用いずに解答すること．

問題 A-3　30pt

n は自然数とする．θ についての恒等式

$$\sin n\theta = \frac{n}{(2n-1)!!}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{n-1}\sin^{2n-1}\theta\,, \qquad \frac{\cos n\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{(2n-1)!!}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{n}\sin^{2n-1}\theta$$

が成り立つことを示せ．ただし，

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)(2n-1)$$

とし，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{0} f(\theta) &= f(\theta) \\
\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{1} f(\theta) &= \frac{1}{\sin\theta}\,f'(\theta) \\
\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{2} f(\theta) &= \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,f'(\theta)\right)' \\
\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{3} f(\theta) &= \frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,f'(\theta)\right)'\right\}' \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

とする．

問題 A-4　35pt

1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD–EFGH がある．辺 BF と DH 上にそれぞれ点 P, Q をとる．この立方体を平面 APQ で切断して 2 つの立体に分ける．このとき，切断面の面積を S とし，C を含む方の立体の体積を V とする．$\mathrm{BP} = p$, $\mathrm{DQ} = q$ とおく．

(1) S, V をそれぞれ p, q を用いて表せ．ただし，$p = q = 0$ のとき，V は考えなくてよい．

(2) P, Q が $p = q$ を満たしながら動くとき，S の最大値と最小値を求めよ．

(3) r は $0 \leqq r \leqq 1$ を満たす定数とする．P, Q が $p^2 + q^2 = r^2$ を満たしながら動くとき，S の最大値と最小値を求めよ．

問題 A-5　45pt

整数 $k \geqq 0$ に対して，$A(k) = 3^{2k} - 3^k + 1$ とおきます．

(1) $A(k)$ が 19 の倍数となる k をすべて求めてください．

(2) j を 2 以上の整数とします．$A(k)$ が 19^j の倍数となる k をすべて求めてください．

B問題

問題 B-1　30〜40**pt**

空間内に n 個の点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ をランダムに配置する．自然数 $1, 2, \ldots, n$ を並び替えたものを $i_1, i_2, \ldots, i_n$ とし，

$$L = \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_{i_1}\mathrm{A}_{i_2}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_{i_2}\mathrm{A}_{i_3}}\right| + \cdots + \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_{i_{n-1}}\mathrm{A}_{i_n}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_{i_n}\mathrm{A}_{i_1}}\right|$$

とする．自然数 $1, 2, \ldots, n$ のあらゆる並べ替えを考えたとき，L の最小値を L_1，最大値を L_2 とする．ただし，L_1 が正となる配置のみを考える．このとき，どんな配置に対しても

$$L_2 \leqq f(n) L_1$$

を満たす n の関数 $f(n)$ を考えよう．

次の軽量級か重量級のいずれかを選び，どちらを選んだかを明記した上で，問いに答えよ．

【軽量級：30pt】$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ に重複を許す場合を考える．

(1) $f(n)$ の例を 1 つ求めよ．

(2) このような $f(n)$ のうち，最小のものを求めよ．

【重量級：40pt】$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ に重複がない場合を考える．

(1) $f(n)$ の例を 1 つ求めよ．

(2) このような $f(n)$ のうち，最小のものを求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 B-2}}$ $\boxed{30\textbf{pt}}$

自然数 $k > 1$ に対して，無限級数

$$\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}$$

は収束することが知られています．これらの値は**リーマン・ゼータ値**と呼ばれており，数学において重要な役割を果たしています．k が偶数のとき，リーマン・ゼータ値は π の累乗とベルヌーイ数と呼ばれる有理数で書けることが分かっています．例えば，$\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ となります．一方，k が奇数のときのリーマン・ゼータ値には多くの謎が残されています．

n を自然数とするとき，無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \bigl(\zeta(n+k+1) - 1\bigr)$$

は収束することを証明して，その値を求めてください．

$\boxed{\textbf{問題 B-3}}$ $\boxed{45\textbf{pt}}$

数列 $\{a_n\}$ に対して，自然数 p と実数 $\alpha \neq 0$ が存在して，等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$$

が成り立つとする．このとき，自然数 q, r に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} a_k\, k^r$$

の収束，発散を判定せよ．収束する場合には，極限値を求めよ．

第 24 回数学コンテスト 問題 番外編

図 1 の a, b, c がついた丸印は，オン/オフが切り替わるランプです．図 1 の左側では a, c がオフ（黒），b がオン（白）の状態です．また，図の各領域には $1, 2, 3, 4$ と名前のついたスイッチが 1 つずつ設置されています．スイッチを押すと，そのスイッチを含む領域に接しているすべてのランプのオン/オフが一斉に入れ替わります．例えば，図 1 の左側の状態から 3 のスイッチを押すと，3 のスイッチを含む領域に接している b, c のランプのオン/オフが入れ替わります．

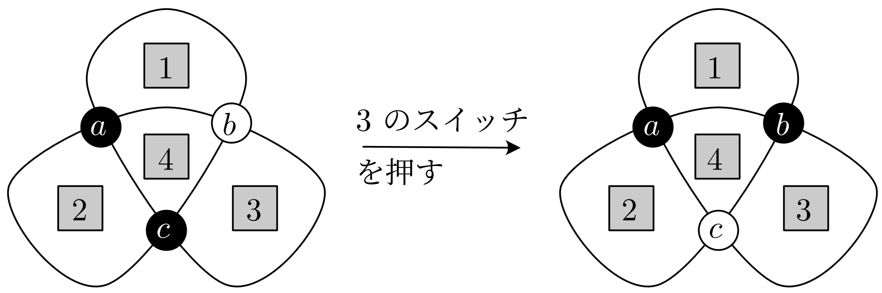

図 1　3 のスイッチを押すと，b, c のランプのオン/オフが入れ替わる．

例題. 図 2 のすべてのランプをオンにするには，どのスイッチたちを押せばよいか．2 通り求めよ．

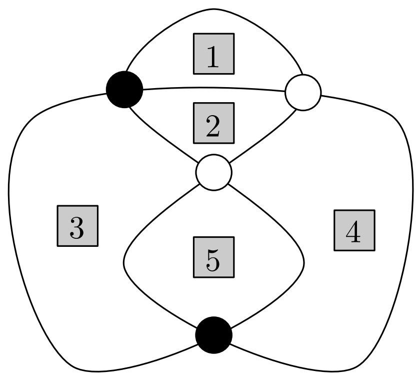

図 2　すべてのランプをオンにせよ．

解. 2 つのスイッチ $\{2, 4\}$ ($\boxed{2}$ と $\boxed{4}$)，または 3 つのスイッチ $\{1, 2, 3\}$ ($\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ と $\boxed{3}$) を押せばよい．

もちろん，同じスイッチを 2 回押すのは，そのスイッチを押さない場合と同じになります．また，複数のスイッチを押すとき，スイッチを押す順番を変えても結果は同じになります．例えば，例題の解において，$\{2, 4\}$ の 2 つのスイッチを押すとき，どちらを先に押しても結果は同じになります．よって，2 回以上押したり，スイッチを押す順番だけが異なる押し方は「同じ押し方」とみなすことにします．

問題. 図 3 のすべてのランプをオンにするには，どのスイッチたちを押せばよいか．各々 2 通り求めよ．

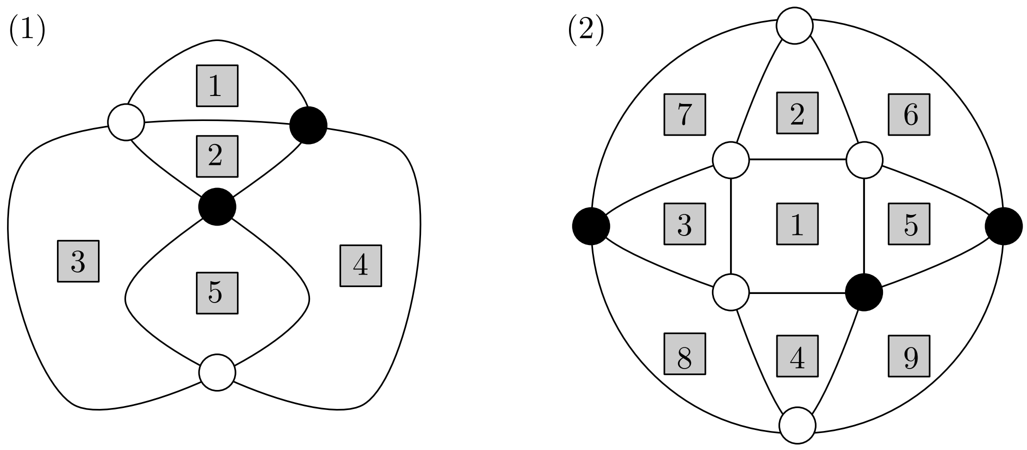

図 3　すべてのランプをオンにせよ．

注意: ● **この番外編はコンテストで解答する 3 問の中には含まれず，コンテストの得点には加算されません**．

● 出来た方は随時本部にお持ちください．番外編のみの採点で，正しい解答を提出いただいた方に，もれなくささやかな賞品を差し上げます．