第25回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 7 問あります．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2023 年 11 月 3 日 開催

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ $\boxed{25\textbf{pt}}$

自然数 n で，その正の約数の総和が 399 となるようなものをすべて求めよ．

問題 2　25pt

図 1 の a, b, c がついた丸印は，オン/オフが切り替わるランプです．図 1 の左側では a, c がオフ（黒），b がオン（白）の状態です．また，図の各領域には $1, 2, 3, 4$ と名前のついたスイッチが 1 つずつ設置されています．スイッチを押すと，そのスイッチを含む領域に接しているすべてのランプのオン/オフが一斉に入れ替わります．例えば，図 1 の左側の状態から 3 のスイッチを押すと，3 のスイッチを含む領域に接している b, c のランプのオン/オフが入れ替わります．

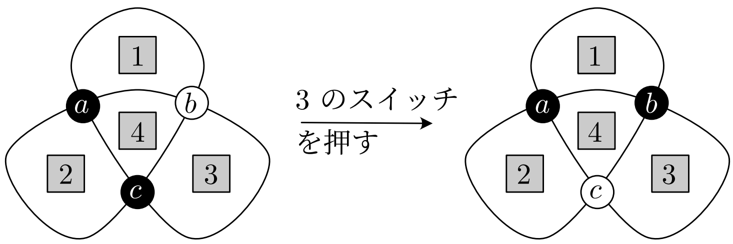


図 1: 3 のスイッチを押すと，b, c のランプのオン/オフが入れ替わる．

例題. 図 2 のすべてのランプをオンにするには，どのスイッチたちを押せばよいか．

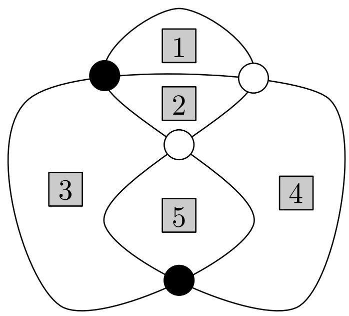


図 2: すべてのランプをオンにせよ．

解. 2 つのスイッチ $\{2, 4\}$ ($\boxed{2}$ と $\boxed{4}$)，または 3 つのスイッチ $\{1, 2, 3\}$ ($\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ と $\boxed{3}$) を押せばよい．

以上が本問の設定となりますが，ここにきてトラブル発生．次のページの図 3 において，あるスイッチ 1 つが壊れて使えない状況になりました．でも安心してください．この状況下でも，壊れていない残りのスイッチたちを使うことで，6 個のランプがどのような初期状態（オン・オフ）にあったとしても，すべてのランプをオンにすることができるそうです．そこで次のページの問題に答えてください．

問題. 壊れたスイッチとして考えられるのは何番のスイッチでしょうか？理由も含めて解答してください．壊れたスイッチは 1 つだけですが，答えとなりうるスイッチは複数あるかもしれません．

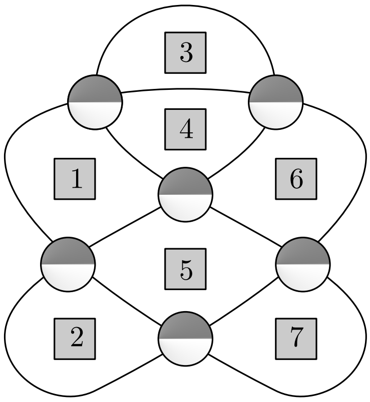


図 3: どんなランプの初期状態（オン・オフ）でも，すべてのランプをオンにできる．壊れたのはどのスイッチ？

問題 3　35pt

$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$, $a \leqq b \leqq c$ を満たす $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．n を自然数とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ に含まれる n 個の半径 r の円を考える．ただし，n 個の円は接しても良いが，内部の重なりはないものとする．例えば $n=1$ のとき，このような円のうち最大のものは $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円である．次の問いに答えよ．ただし，答えとなる値または式はできるだけ簡単な表示にすること．

(1) $n=2$ のとき，このような 2 つの円の半径 r の最大値を求めよ．

(2) $n=3$ のとき，このような 3 つの円の半径 r の最大値を求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 4}}$　$\boxed{\textbf{45pt}}$

次の問いに答えよ．

(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ：

$$\sqrt{n+1}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leqq \sqrt{n}\,e\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

ただし，e は自然対数の底とする．

(2) 次で定められる数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を考える：

$$A_n = \sum_{k=0}^{2n} {}_{3n}\mathrm{C}_k 2^k \sin\frac{k}{n}, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{2n} {}_{3n}\mathrm{C}_k 2^k \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

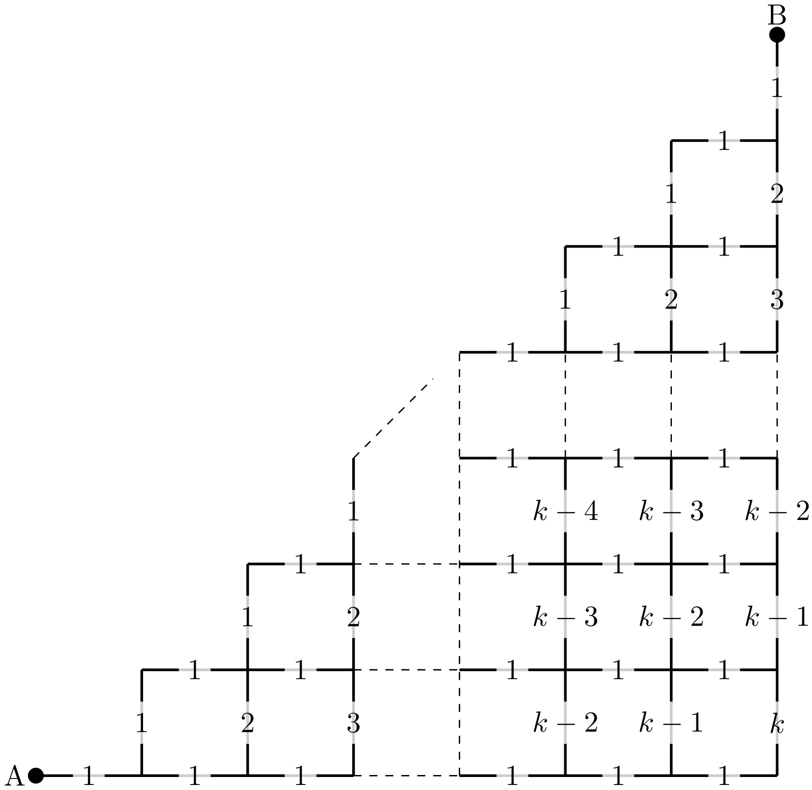
このとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$$

の値を求めよ．

問題 5 30pt

k を自然数とする．図のような，路に重みのついた階段状の経路を考える．



横方向の路の重みはすべて 1 であり，左から m 列目の縦方向の路の重みは下から順に m, $m-1, \ldots, 2, 1$ ($1 \leqq m \leqq k$) である．点 A から点 B に至る経路に対して，選んだ路のすべての重みの積を，その経路の重みと定義する．例えば $k=3$ のとき，点 A から点 B に

$$\rightarrow, \quad \rightarrow, \quad \uparrow, \quad \rightarrow, \quad \uparrow, \quad \uparrow$$

の順に進む経路の重みは

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

である．

このとき，点 A から点 B に至る最短経路の重みの総和を求めよ．

問題 6 35pt

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの数字が並んだ n 行 n 列の表(ひょう) A を考えます．どの行にも同じ数字がなく，どの列にも同じ数字がないとき，A は n 次ラテン方陣と呼ばれます．

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2	3	1
1	2	3
3	1	2

3 次ラテン方陣の例

2 つの n 次ラテン方陣 A, B において，同じ位置にある A の数字 a と B の数字 b の組を (a, b) と表します．すべての位置を考えると組 (a, b) は n^2 個ありますが，どの 2 つの組も相異なるとき A と B は直交するといいます．上の例では，左のラテン方陣は他のどの 2 つのラテン方陣とも直交し，真ん中のラテン方陣と右のラテン方陣は直交していません．

m 個の n 次ラテン方陣の集合 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ は，任意の A_k と A_ℓ $(k \neq \ell)$ が直交するとき，n 次直交系と呼ばれます．ただし，$m = 1$ のとき，$\{A_1\}$ は常に 1 次直交系であるとします．n 次直交系をなすラテン方陣の個数 m の最大値を $M(n)$ と表します．n の最小の素因数を p とするとき，

$$p - 1 \leqq M(n) \leqq n - 1$$

が成立することを証明してください．

問題 7 25〜50**pt**

m を自然数とする．**次の初級，上級，無差別級のうち 1 つを選び**，どれを選んだか明記した上で，級数が収束することを示し，その和をできるだけ簡単な m の式で（【無差別級】は p, q も用いて）表せ.

【初級：25pt】 $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2 - n^2}$

【上級：40pt】 $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ 3n-1 \neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2 - (3n-1)^2}$

【無差別級：50pt】 $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ pn-q \neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2 - (pn-q)^2}$ （p は自然数，q は $0 \leqq q < p$ を満たす整数）