第４回数学コンテスト問題

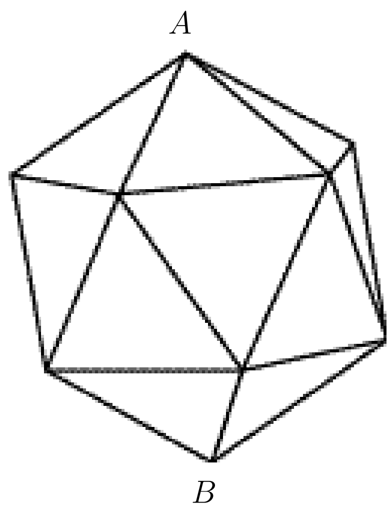
平成１３年１１月３日（土）
数学物理学科数学コース教員@近畿大学

時間内であれば，何問解答しても構いません．解答場所は，自由に移動していただいて結構です．ただし,「数学のプロ」に助言を求めてはなりませんが，それは各自の「数学をこよなく愛する者の良心」に委ねます．

また，グループで解答しても構いません．その場合のポイントは，グループの人数が n 人であれば獲得合計を $\sqrt{n}$ で割った値を四捨五入した整数値がそのグループのポイントとなります．さらに，出題者の用意した解答よりも（エレガントで）優れた解答あるいは奇抜な解答には，表示ポイント以上のポイントが加算されることがあります．重要な事実を用いる場合は，その事実の証明も付け加えてください．

[参考]　$\boxed{6}$以外の問題は，すべて高校数学の範囲で十分解答可能な問題であると思われます．

$\boxed{1}$　下図は正二十面体の投影図である．一つの頂点を A とし、その対蹠（たいしょ）点を B とする．正二十面体の一辺の長さが 1 であるとき，この二十面体を直線 AB の周りに回転させて得られる立体の体積を求めよ．(30 ポイント）



$\boxed{2}$　a, b, c, d を $b^2 - ac < 0,\ a > 0, d > 0$ を満たす実数とするとき，方程式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$$

は楕円を表す．この楕円の面積を求めよ．(20 ポイント)

$\boxed{3}$　平面に a 個の円と b 個の直線がある．これらに分割されてできる領域の一つ一つに黒か白のいずれかの色を塗り，円弧や線分や半直線をはさんで隣り合う領域が同じ色に塗られないようにできるか．(25 ポイント)

$\boxed{4}$

****

1970 年，当時ソビエトの数学者マチアセビッチが 21 歳でヒルベルトの第 10 問題を解いた．その結果の副産物として彼は，21 変数，21 次の「素数を表す多項式」を構成した．ただし，ここで $f(x_1, \ldots, x_n)$ が「素数を表す多項式」であるとは，つぎの二つの性質をもつ整数係数多項式のことである．

(1)　$x_1, \ldots, x_n$ に自然数の値を代入したとき，
$f(x_1, \ldots, x_n) > 0$ ならば，$f(x_1, \ldots, x_n)$ は素数である．

(2)　どのような素数 p に対しても，適当な自然数 $m_1, \ldots, m_n$ を選ぶと

$$p = f(m_1, \ldots, m_n)$$

となる．

****

これに関連してつぎのことを示せ．一変数の n 次関数

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

を考える．ただし，各係数は整数で $a_0 > 0$ とする．このとき，適当な整数 m を選ぶと，$f(m) > 0$ であるが，$f(m)$ が素数でないようにできる．すなわち，一変数多項式では「素数を表す多項式」は作れない．(25 ポイント)

$\boxed{5}$　大きな正五角形からはみ出さないように，一辺の長さがちょうど半分の正五角形を五つ描くとします．ただし，各々の正五角形が大きな正五角形の相異なる頂点を一つづつ共有するように描くとします．すると，あら不思議（！）もとの大きな五角形の内部に大小二つの星状領域がちょうど現れます．小さい方の星状領域の面積を 1 とするとき，大きい方の星状領域の面積を求めてください.（20 ポイント）

$\boxed{6}$　n 次正方行列に対して，その指数行列 e^A を

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

と定める（E は単位行列で，収束することは既知とする）．このとき，

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，定義通りに e^A を計算し，行列式 $|e^A|$ を求めよ．

(2)　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，指数行列 e^B の固有値を求めよ．

(3)　任意の n 次正方行列に対して，$|e^A| \neq 0$ であること，すなわち e^A は必ず逆行列をもつことを証明せよ（一般に，$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ が成り立つとは限らないことに注意）．
（計 30 ポイント）

$\boxed{7}$　A を有限個の整数からなる集合とする．このとき，$m_k(A)$ で集合 A のすべての元の和を自然数 k で割ったときの余りを表すとする．

2 以上の自然数 k に対して，集合 $N = \{0, 1, 2, \ldots, k^2 - 1\}$ をつぎの二つの条件を満たす互いに共通部分をもたない k 個の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ の和集合に分割できるような自然数 k に関する条件を考える．

(条件 1)　各 A_i の異なる元の個数はいつでも k 個である．

(条件 2)　$\{m_k(A_i) |\, i = 1, 2, \ldots, k\} = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$

(1)　$k = 2, 3, 4$ の場合にそのような分割が可能かどうか考え，可能ならば分割を与え，不可能ならばそれを証明せよ．

(2)　N が上の条件を満たすように分割できるための必要十分条件を自然数 k の条件で簡明に記述せよ．
（計 30 ポイント）