第５回近畿大学数学コンテスト問題

【**A** 問題】

$\boxed{\text{A1}}$ (30 ポイント)

与えられた数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ に対して a_1, a_2, …, a_n の積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を b_n とおきます．数列 $\{b_n\}$ の極限値

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

が存在するとき $\{a_n\}$ の無限積の値は α であるといい

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$$

と書くことにします．次の無限積の値を求めて下さい．

1. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$
2. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$

ただし，必要なら階乗 $n!$ の $n\to\infty$ における漸近挙動に関するスターリングの公式，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}\,n^n}{n!}=1$$

は証明なしに使ってもかまいません．

$\boxed{\text{A2}}$ (20 ポイント)

n を $n\geq 3$ を満たす自然数とする．各 $k=3,4$ に対し，集合 $A_k=\{1,2,3,...,kn\}$ の部分集合の族

$$\mathcal{F}_k=\{\{a,b,c\}\subset A_k|a+b+c\equiv 0 \pmod{k},(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0\}$$

を考える．

(1) $\mathcal{F}_3$ の元の個数 $|\mathcal{F}_3|$ を求めよ．

(2) $\mathcal{F}_4$ の元の個数 $|\mathcal{F}_4|$ を求めよ．

$\boxed{\text{A3}}$ (30 ポイント)

(1) 下の例 1，2 のように，任意の整数 N を下から 2 桁ずつに区切って加えた合計を N' とする． N' が 11 の倍数であることと，もとの整数 N が 11 の倍数であ

ることが同値である（おなじ意味になる）ことを証明しなさい．

例 1　　　$N = 1232 = 11 \times 112 \ \rightarrow \ N' = 12 + 32 = 44 = 11 \times 4$

例 2　　　$N = 18953 = 11 \times 1723 \ \rightarrow \ N' = 1 + 89 + 53 = 143 = 11 \times 13$

(2) 下の例 3 に挙げるような数をここで「左右対称な数」と呼ぶことにする．ただし 1 の位が 0 の数は除外する．

1 から 10^6 までの自然数の中で，11 の倍数であって左右対称な数は何個存在するか求めなさい．どのように考えたかも記すこと．

例 3　　　22，121，1001，12321, . . .

$\boxed{\text{A4}}$ (25 ポイント)

(1)　n を自然数としたとき，実数 $(\sqrt{2}-1)^n$ は，有理数 a_n，b_n があって

$$(\sqrt{2}-1)^n = a_n\sqrt{2} - b_n$$

の形に一意的に表すことができます．このとき，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めてください．

(2)　座標平面上の点は，その x 座標と y 座標が共に整数であるとき，格子点とよばれます．直線 l : $y = \sqrt{2}x$ 上の格子点は原点のみです．なぜなら，原点と異なる格子点 (m, n) がこの直線上にあれば，$\sqrt{2} = n/m$ となり，$\sqrt{2}$ が有理数になってしまうからです．それでは，直線 l にいくらでも近い格子点があることを示してください．

$\boxed{\text{A5}}$ (25 ポイント)

“球の詰め込み問題” と呼ばれるものがあります．

十分大きな空間領域に同じ大きさの球を互いに接することは許すが，互いに交わることがないようにできるだけ多く詰め込みたいとします．

空間領域の体積とこの詰め込みにより領域内に含まれる球の体積の総和の比をこの詰め込みの詰め込み率ということにするとき，球の詰め込み率が最大となる詰め込み方を求める問題です．

球の詰め込みときいて，果物屋の店頭にピラミッド型に積まれたみかんの山を連想される方もおられるかもしれません．何世紀もの間，多くの数学者達によって最も密度が高い球の詰め込みがどのような詰め込みかが追求されてきたにもかかわらず，いまだ未解決のまま残されています．(有名な数学の未解決問題の一つ．)

空間に球をどのように詰め込もうとも，その詰め込み率は $0.7784\cdots$ 以下であることは知られています．[1]

ここで，皆さんに考えていただくのは “円の格子詰め込み” と呼ばれている問題です．

問題

平面において，始点を O とする長さ $2r$(r は正の定数) の二つのベクトルを $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ と

[1]コンウェイ · スローン著「Sphere Packings, Lattices and Groups」(シュプリンガー) を参照

し，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角を θ $(0 < \theta \le \pi/2)$ とするとき，

$$L_\theta = \{\ a\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{v} | \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}\}$$

を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ で生成された格子と呼び，L_θ の各点を格子点と呼ぶ．(ここで，$\mathbf{Z}$ は全ての整数からなる集合を表す．) 円の詰め込みにおいて円の中心と L_θ の格子点が過不足なしに一致するとき，任意の自然数 n に対して，ベクトル $n\mathbf{u}$ と $n\mathbf{v}$ を二辺とする平行四辺形の面積 S_n とこの四辺形に含まれる円及び円の部分の面積の総和 T_n の比は n に無関係に定まる．この比 T_n/S_n をこのような円の詰め込みにおける詰め込み率と定義する．このとき，この詰め込みにおける円の詰め込み率の最大値 ρ_θ を求めよ．また，θ が動く時，ρ_θ が最大となる θ を求めよ．どの二つの円も互いに接することは許すが，互いに交わることは許されないことに注意せよ．

【Ｂ問題】

$\boxed{\text{B1}}$ (20 ポイント)

空間に時刻 t における位置が

$$\begin{aligned} x &= a_1t^2 + b_1t + c_1 \\ y &= a_2t^2 + b_2t + c_2 \\ z &= a_3t^2 + b_3t + c_3 \end{aligned}$$

で表される動点 P がある．ただし t はすべての実数を動く変数とする．

1. P の軌跡が一つの平面上にあることを示せ．
2. P の軌跡が一つの直線上にあるための条件を求めよ．

$\boxed{\text{B2}}$ (30 ポイント)

xyz-空間において，つぎの方程式で定義される図形を考える．

$$(x^2 + y^2 + z^2 + ab)^2 = (a + b)^2(y^2 + z^2)$$

ただし，a, b は $a > b > 0$ となる定数とする．このとき，この図形によって囲まれる部分の体積を求めよ．

$\boxed{\text{B3}}$ (15 ポイント)

地表を完全な球面とみなす．また地点 P における気温を $f(\mathrm{P})$ で表す．$f(\mathrm{P})$ は P の連続関数であると仮定する．

1. ちょうど反対側にある地表の 2 点の組で，気温が等しい地点が必ず存在することを示せ．

2. (1) の条件を満たす 2 点の組が無限個あることを示せ．

$\boxed{\text{B4}}$ (80 ポイント)
極限値

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

を求めてください．答は有理数になりますが整数ではありません.