第６回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催*

注意事項： 解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，表彰及び賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計７問 (A 問題４問と B 問題３問) あります．この中から，**B 問題を少なくとも１問**含めて，合計 **3** 問を選択して解答してください．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した３問の合計ポイントが **100pt** を上回っても構いません．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．**1** 問ごとに新しい解答用紙を使用し，２問を同じ用紙に書かないようにしてください．また，すべての解答用紙に名前を書いてください．数学のプロフェッショナルへの質問は禁じます．また，グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．GOOD LUCK !!

A 問題

問題 1 （30pt）

平面上に AB$=c$, BC$=a$, CA$=b$ の $\triangle$ABC をとり，これを 180° 回転し，さらに平行移動したものを $\triangle$A′B′C′ とする．ただし A, B, C はそれぞれ A′, B′, C′ に移る．このとき次の問に答えよ．

(1) ３つの線分 AA′，BB′，CC′ の中点が一致することを示せ．

(2) ３頂点 A, B, C は $\triangle$A′B′C′ の内部になく，３頂点 A′, B′, C′ は $\triangle$ABC の内部にないとして，この２つの三角形の共通部分の面積 T の最大値を，$\triangle$ABC の面積 S を用いて表せ．

（仮に A が $\triangle$A′B′C′ の内部にあったとすると $\triangle$ABC を $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の方向に移動して，A が B′C′ 上に来るようにすれば，共通部分の面積が増加するから，(2) の仮定は妥当である.）

*2003 年 11 月 3 日 開催

$\boxed{\text{問 題 2}}$ **(25pt)**

${}_n\mathrm{C}_r$ を2項係数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_{2n-k}\mathrm{C}_k$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}{}_n\mathrm{C}_{3k}$ の値を求めよ．

ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

$\boxed{\text{問 題 3}}$ **(25pt)**

xyz 空間に異なる4点 A, B, C, D がある．これらの4点を通る球面が唯一つ存在するための必要十分条件を求めなさい.（理由も述べよ.）

$\boxed{\text{問 題 4}}$ **(20pt)**

正の整数と零をあわせて，非負整数という．ここでは，xy 平面上で x 座標または y 座標が非負整数である点の全体をNN格子と呼び，x 座標と y 座標がともに非負整数である点をNN格子点と呼ぶこととする．各NN格子点 (x, y) に対して以下のように自然数 $F(x, y)$ を定める．すなわち，原点からスタートしてNN格子上をたどって，そのNN格子点 (x, y) に行き着く最短経路の個数を $F(x, y)$ とする．例えば，$F(1, 2) = 3$ であり $F(2, 3) = 10$ である．また特に原点に対しては，$F(0, 0) = 1$ としておく．この時自然数 n に対して，$y = -2x + n - 1$ を満たすすべての非負整数の組 (x, y) について $F(x, y)$ の値の合計を a_n として，数列 $\{a_n\}$ を定める．a_n を n の式で与えなさい．

B 問 題

問 題 5 （**50pt**）

(1)　$A,\ B$ を関係式

$$ABA = BAB, \quad A^{k+1} = B^k \ \ (k : \text{ある自然数})$$

を満たす n 次正則行列（逆行列をもつ行列）とすると，$A,\ B$ は共に単位行列であることを証明せよ．

(2)　単位行列とは異なる 5 次の正方行列 $A,\ B$ で，関係式

$$A^5 = B^3 = (AB)^2 = E \ \ (E : \text{単位行列})$$

を満たすものを 1 組見つけよ．

問 題 6 （**40pt**）

自然数 n に対し常用対数 $\log_{10} n$ の小数第 1 位の値を x_n とおく．このとき，$n = 1, 2, ...$ に対し，x_n を小数第 n 位にもつ 1 より小さい正の小数 β は無理数である．これを示せ．ただし，$\log_{10} n$ が整数となるときは，$x_n = 0$ と定める．必要であれば，$10^{\frac{1}{10}} = 1.25893\cdots$ を用いてもよい．

問 題 7 （**35pt**）順に答えるもよし，(3) だけ解くもよし．

(1) (初級) すべての実数 x に対して

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$$

であることを証明してください．

(2) (中級) すべての実数 x に対して

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3} > 0$$

であることを証明してください．

(3) (上級) すべての実数 x に対して

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{21}{64} > 0$$

であることを証明してください．