第7回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催*

注意事項

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，表彰及び賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問 (A 問題 5 問と B 問題 3 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題, B 問題は大学で学ぶ知識が必要となる問題です．この中から，合計 **3** 問を選択して解答してください．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の合計ポイントが **100pt** を上回っても構いません．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．**1** 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．また，すべての解答用紙に名前を書いてください．数学のプロフェッショナルへの質問は禁じます．また，グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

---

*2004 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問 題 1 （30pt）

有限個の自然数を並べたもの $(a_1, a_2, ..., a_r)$ をリストと呼ぶ．リスト $P = (a_1, a_2, ..., a_r)$ に対し，a_i を P に属する第 i 要素とよぶ．また，リスト $P = (a_1, a_2, ..., a_r)$ の各要素に自然数 x を加えて得られるリスト $(a_1+x, a_2+x, ..., a_r+x)$ を $P[x]$ と書く．リスト $P = (a_1, a_2, ..., a_r)$ の直後にリスト $Q = (b_1, b_2, ..., b_s)$ を連結して得られるリスト $(a_1, a_2, ..., a_r, b_1, b_2, ..., b_s)$ をリスト P と Q の連結といい, $P*Q$ と書く．また, リスト $P = (a_1, a_2, ..., a_r)$ に属するすべての要素の和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_j$ を $S(P)$ と書く．たとえば, $P = (2, 3, 1)$ とすると, $P[2] = (4, 5, 3)$, $P * P[2] = (2, 3, 1, 4, 5, 3)$, $S(P * P[2]) = 2 + 3 + 1 + 4 + 5 + 3 = 18$ である．

さて，はじめにリスト $P_1 = (1)$ を定め，第 n 番目のリスト P_n $(n = 2, 3, \ldots)$ を リスト P_{n-1} と $P_{n-1}[n]$ の連結

$$P_n = P_{n-1} * P_{n-1}[n]$$

により定める．このとき, $S(P_n)$ を n で表せ．

問 題 2 （30pt）

次の無限級数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

を，$x, \tan x$ のなるべく簡単な式で表せ．

問 題 3 （30pt）

楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ 上に x 座標と y 座標がともに有理数である点が無限個あることを証明せよ．

$\boxed{\text{問 題 4}}$ **(30pt)**

平方数とは, 自然数の2乗となっている数のことである.

(1) 自然数 n に対して, n の約数の和を $f(n)$ で表す. たとえば,

$$f(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15,$$
$$f(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

である.

$n(\geqq 1)$ を奇数とする. このとき, $f(n)$ が奇数となることは, n が平方数となる必要十分条件であることを示せ.

(2) 連続する 3 個の自然数の積は, 平方数とはならないことを示せ.

$\boxed{\text{問 題 5}}$ **(40pt)**

四角い国に郵便局を3局開設する．郵便局から最も遠い人の距離を最小とする局の配置を求めたい．これをもう少し数学的に述べる．

1辺の長さが1である正方形 ABCD の内部または周上に3定点 P, Q, R を取り，正方形の内部または周上の点 T からこの 3 定点のうち最も近いものまでの距離を $f(\mathrm{T})$ と表すことにする．T の位置をいろいろ動かして得られる $f(\mathrm{T})$ の最大値を M とする．M が最小になるような3点 P, Q, R の配置を「最適配置」と言うことにする．最適配置とはどんなものであるか, 理由をつけて述べよ.

ヒント：（一つの考え方である．これにとらわれる必要はない.）最適配置に対する M の値を r と表すとき，最適配置のうちには，

$\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = r$ となるものがあることを示せ.

B 問題

問題 6 (30pt)

2変数の実数係数多項式 $F(x,y)=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}a_{ij}x^iy^j$ を考える．どんな実数 x に対しても $F(x,e^x)=0$ となるとき，すべての i, j に対して $a_{ij}=0$ となることを示せ．

問題 7 (40pt)

この問題は, 空間に m 個の点をバランスよく配置するにはどうしたらいいかという疑問から発している. たとえば平面上の正5角形で, 異なる2頂点のとり方は10通りあるが, 2頂点間の距離は a と $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}a$ の二種類の値に限られる. それでは, 3次元空間において, 同様のことが成り立つような5点の配置が考えられるだろうか.

3次元空間における同一平面上にない, 異なる5点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 のうちの3点を $A_1=(1,0,0)$, $A_2=(-1,0,0)$, $A_3=(0,\sqrt{3},0)$ とする. また, 相異なるすべての i,j $(1\leqq i<j\leqq 5)$ に対し, 線分 A_iA_j の長さを $d_{i,j}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 10個の $d_{i,j}$ の値のうち, 5 個の値が 2 で, 残りの 5 個の値が $b(b\neq 2)$ となる配置が存在することを証明せよ.

(2) 10個の $d_{i,j}$ の値のうち, 6 個の値が 2 で, 残りの 4 個の値が $b(b\neq 2)$ となる配置の例を, A_4,A_5 の座標を与えることにより, 挙げよ.

問題 8 (50pt)

各項が正である数列 $\{a_n\}$ に対し, 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ が収束するとき,

$$\lim_{n\to\infty}n(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}=0$$

が成り立つことを示せ.