

第8回 数学コンテスト 問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催

解答作成場所はどこでも自由です。但し、15:00 に再びこの場所（31号館401教室）へ戻ってきて答案を提出してください。遅刻者は棄権と見なします。合計ポイントの高い者から順位をつけ、表彰及び賞品を贈呈します。グループによる解答は、解答に携わった人の名前を必ず解答用紙にもれなく列挙してください。その際、合計ポイント x に対して、解答に携わった人数を n 人とするグループのポイントは、

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります。

問題は合計8問（A問題5問、B問題3問）あります。A問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題、B問題は大学で学ぶ知識が必要となる問題です。この中から、合計3問を選択して解答してください。4問以上の答案を提出した場合は、失格となる恐れがあります。問題番号の横に、正解に与えられるポイントが書かれていますが、選択した3問の合計ポイントが100ポイントを上回ってもかまいません。また、出題者の期待を上回るきわめて優れた解答があれば、採点者の判断により、ボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて、解答に臨んでください。

注意事項

- 1問ごとに新しい解答用紙を使用し、2問を同じ用紙に書かないようにしてください。
- 全ての解答用紙に名前を書いてください。
- 答案は、答えのみではなく、思考の手順がたどれる形で書いてください。
- コンピューター（電卓含む）の使用は禁止します。
- グループエントリーでない場合は、参加者同士で相談してはいけません。

それでは、数学を愛する者のフェアプレイ精神で、果敢に挑んでください。

GOOD LUCK !!

A問題

A-1 20ポイント

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき, $n = 1, 2, \dots$ に対し,

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right) \cdots \left(\omega^n + \frac{1}{\omega^n}\right)$$

をできるだけ簡単な形で表せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

A問題

A-2 25ポイント

方程式 $x^2 - 10y^2 = 1$ を満たす正の整数の組 (x, y) を3組求めよ.

A問題

A-3 40ポイント

自然数 n に対し, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ とし, $0! = 1$ と定める.

(1) 非負整数 n に対し, 等式

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ. ここで, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ である.

(2) $p + q + r = m$ を満たす非負整数 m, p, q, r に対し,

$$\binom{m}{p, q, r} = \frac{m!}{p!q!r!}$$

と置く. 非負整数 n に対し, 等式

$$\sum \binom{3n}{p, q, r} \binom{3n}{2n-p, 2n-q, 2n-r} = \binom{6n}{2n, 2n, 2n}$$

が成り立つことを証明せよ. ここで \sum は,

$$p + q + r = 3n, \quad 0 \leq p \leq 2n, \quad 0 \leq q \leq 2n, \quad 0 \leq r \leq 2n$$

を満たす整数 p, q, r の全ての組についての和である.

A問題

A-4 40ポイント

方程式 $3^x + 4^y = 5^z$ を満たす正の整数 x, y, z の組は,

$$(x, y, z) = (2, 2, 2)$$

のみであることを証明せよ.

A 問題

A-5 50 ポイント

- (1) 5 辺の長さが与えられた五角形の面積が最大となるのは, その五角形が円に内接するときであることを証明せよ.
- (2) 5 辺の長さがそれぞれ 3, 3, 2, 2, 2 である五角形の面積の最大値を求めよ.

B問題

B-1 30ポイント

xy 平面で

直線 $x = 0$ に関する対称移動を f_0

直線 $x = 1$ に関する対称移動を f_1

直線 $y = 0$ に関する対称移動を g_0

直線 $y = 1$ に関する対称移動を g_1

とする.

平面上の x 座標および y 座標が整数である点 (格子点) を頂点とする面積1の2つの正方形 A, B をどのようにとっても, f_0, f_1, g_0, g_1 を適当な順序で有限回繰り返すことによって, A を B に移すことができることを証明せよ.

B問題

B-2 40ポイント

(1) $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x} dx = \log 2$ を証明せよ.

(2) $\int_0^1 \frac{\log x}{x-1} dx$ を求めよ.

B問題

B-3 50ポイント

平面上に, 3つの異なる定点 A, B, C と動点 P がある.

$$PA + PB + PC$$

が最小となるときの点 P の位置を定めよ.