第9回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催*

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，表彰及び賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は,

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります.

問題は合計 8 問 (A 問題 4 問と B 問題 4 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題, B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかも知れない問題です．この中から，**合計 3 問を選択**して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は, 失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください.

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください.

- すべての解答用紙に名前を書いてください.

- 答案は, 答えのみではなく, 思考の手順が辿れる形で書いてください.

- 必要ならば電卓を使っても構いません．コンピュータを使用した場合には, プログラムも一緒に提出してください.

- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません.

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください.

GOOD LUCK !!

*2006 年 11 月 3 日 開催

A 問 題

問 題 A-1　30pt

自然数 n に対して，二項係数を ${}_nC_m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ で定義する．ただし，$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$，$0! = 1$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) ${}_nC_0$，${}_nC_1$，${}_nC_2$，$\ldots$，${}_nC_n$ がすべて奇数であるための，n の満たすべき必要十分条件は何か．

(2) 自然数 $k > 1$ に対して，${}_nC_1$，${}_nC_2$，${}_nC_3$，$\ldots$，${}_nC_{n-1}$ がすべて k で割りきれるための，k，n の満たすべき必要十分条件は何か．

問 題 A-2 **35pt**

3 以上の自然数 n に対して, 一辺の長さが 1 の正方形に含まれる面積最大の正 n 角形の面積を S_n とする.

(1) S_3 を求めなさい.

(2) S_6 を求めなさい.

問題 A-3 **40pt**

2本の箸（はし）で豆をつまむことは難しい．豆と箸の間に摩擦力が働かないものとすると，つまみあげることは不可能と言える．しかし摩擦のない場合でも，沢山の箸で周りから押さえると豆は動けなくなる（つまむことができる）．

さて，数学的に理想化しよう．箸を直線とし，豆は半径1の球とする．またこれらは完全にすべすべで，たがいの間に摩擦力は働かないものとする．また重力も考慮しないことにする．

3次元の空間に k 本の箸を配置しておく．2本以上の箸が互いに交わってもよい．それらのどの1本も内部に突き刺さらないように豆を置く．

箸を押し退けたり，箸を豆の内部を通過させることなく，その豆の中心の位置を全く動かすことが不可能なとき，箸で豆を固定したということにする．豆を固定するためには箸は最低何本必要か．

問 題 A-4 **50pt**

実数 x について，$[x]$ をガウス記号とします．すなわち，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとします．次の (1) から (5) のうち **2 つを選んで**証明をしてください．

(1) **10pt** 全ての自然数 n に対して，等式

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]$$

が成立する．

(2) **10pt** 全ての自然数 n に対して，等式

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$$

が成立する．

(3) **20pt** 全ての自然数 n に対して，等式

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}]=[\sqrt{16n+20}]$$

が成立する．

(4) **30pt** 全ての自然数 n に対して，等式

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}]=[\sqrt{25n+49}]$$

が成立する．

(5) **20pt** 任意の実数 c に対して，

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}+\sqrt{n+5}]\neq[\sqrt{36n+c}]$$

となるような自然数 n が存在する．

B 問題

問題 B-1 30pt

正の整数 n に対し，$\mathcal{A}_n$ を次の条件を満たす n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ すべてからなる集合とする：

(1) $a_{ij} = 0$ または 1 $\quad (i, j = 1, 2, ..., n)$

(2) $a_{ij} = a_{ji}$ $\quad (i, j = 1, 2, ..., n)$ （対称性）

(3) $a_{ii} = 0$ $\quad (i = 1, 2, ..., n)$

行列 $A \in \mathcal{A}_n$ の行に対し，その行の成分の値の和が偶数であるとき，その行は偶行と呼ばれる．$A \in \mathcal{A}_n$ のすべての行が偶行であるとき，A は偶行列と呼ばれる．このとき，集合 $\mathcal{A}_n$ に含まれる偶行列の個数を n で表せ．

問 題 B-2 **30pt**

次の式で与えられる平面上の曲線の概形について以下の問いに答えよ.

$$x^4 + (2y^2 - 6)x^2 + y^4 - 6y^2 + 8y - 3 = 0$$

(1) この曲線の概形を図示せよ.

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ.

(3) この曲線上の有理点 (x 座標と y 座標が共に有理数であるような点) の個数を求めよ.

$\boxed{\textbf{問 題 B-3}}$ $\boxed{\textbf{30pt}}$

不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

を出来るだけ多くの方法で求めよ．３種類以上が望ましい.

問 題 B-4 **40pt**

自然対数の底 e は

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

により定義されるが，よく知られているように無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{1}$$

は収束してその和は e と一致する．

次の 4 つの問（初級〜無差別級）から 2 **つを選び解答せよ．** ただし,「中級」以後に現れる「求める」ということの意味は各自考えて答えよ．

初 級 **15pt** 無限級数 (1) の和を 1 つ飛ばしに取ったら，その値は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

となる．これを証明せよ．

中 級 **15pt** 無限級数 (1) を 2 つ飛ばしに取った和，すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}$$

を求めよ．

上 級 **20pt** 無限級数の和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n)!}$$

を求めよ．

無差別級 **20pt** 自然数 a を与えたとき無限級数の和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an)!}$$

を求めよ．