第10回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催*

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，表彰及び賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は,

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります.

問題は合計 10 問 (A 問題 4 問と B 問題 6 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題, B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかも知れない問題です．この中から，**合計 3 問を選択**して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は, 失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください.

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください.
- すべての解答用紙に名前を書いてください.
- 答案は, 答えのみではなく, 思考の手順が辿れる形で書いてください.
- 電卓・コンピュータの使用は禁止します.
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません.

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください.

GOOD LUCK !!

*2007 年 11 月 3 日 開催

A 問 題

問 題 A-1 20pt

3 次方程式 $x^3 - nx + 1 = 0$ の解がすべて無理数となるような整数 n を求めよ.

問 題 A-2 **35pt**

正の整数 x, y, z, d に対し, x^2, y^2, z^2 がこの順で公差 d の等差数列をなすという. このとき, d は 24 の倍数であることを示しなさい. また, 公差が 24 であるような等差数列 x^2, y^2, z^2 をすべて求めなさい.

問 題 A-3 **40pt**

一辺の長さが 1 である正 7 角形の面積の近似値を小数点以下第 2 位まで求めなさい.

問 題 A-4 **60pt**

(1) 正数 k ($\geqq 1$) と平面の異なる３点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(a_1,a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,b_2)$ を考える。この３点を通り，長軸，短軸がそれぞれ x 軸，y 軸に平行で，長軸と短軸の長さの比が $k:1$ である楕円の存在・非存在について考察せよ。（円は楕円の一つとみなし，その長軸，短軸がそれぞれ x 軸，y 軸に平行で，$k=1$ であると見なす。）

(2) 空間の一つの平面上にない４点 P，Q，R，S を考える。この４点からの距離が等しい直線は存在するか。

B 問 題

問 題 B-1 30pt

$$x^y = y^x, \quad 0 < x < y$$

を満たす有理数の組 (x, y) をすべて求めよ.

問 題 B-2 **30pt**

(1) 区間 $[0, 1]$ 上の任意の連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_0^1 \exp f(x)dx \geq \exp \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ. ただし $\exp x = e^x$ である.

(2) f がさらに $[0, 1]$ で $f(x) > 0$ を満たすとき,

$$\int_0^1 \log f(x)dx \quad と \quad \log \int_0^1 f(x)dx$$

の大小を比較せよ.

問 題 B-3 **30pt**

どの成分も 0 または 1 である n 次正方行列 A を考える. 以下, I は n 次単位行列で, J はすべての成分が 1 の n 次正方行列とし, ${}^tA$ は A の転置行列とする.

(1) $n = 7$ に対し,

$$A\,{}^tA = 2I + J$$

をみたす行列 A を一つ構成しなさい. 更に構成した行列 A の行列式の値を求めなさい.

(2) 正の整数 p に対し, $A\,{}^tA = pI + J$ が成り立てば,

$${}^tA\,A = pI + J$$

が成立することを証明し, 更に $n = p^2 + p + 1$ となることを証明しなさい.

問 題 B-4 **50pt**

$\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \lim_{a \to +0} \int_a^1 x^x dx$ と定義する．このとき

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \cdots$$

を示せ.

問 題 B-5 **60pt**

数列 $\{a_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を次の漸化式により定める：

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j + \sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j} \end{cases}$$

このとき定数 $C>2$ が存在して，すべての $n=0,1,2,\ldots$ に対して

$$2^n \leqq a_n \leqq C^n$$

となることを証明せよ.

問 題 B-6 **60pt**

(1) 正の整数 n に対し, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k}{2n+1}\pi$ を求めよ.

ただし，ここで $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ である.

(2) 正の整数 n に対し, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^4 \frac{k}{2n+1}\pi$ を求めよ.