第11回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催*

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，表彰及び賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は,

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります.

問題は合計 10 問 (A 問題 7 問と B 問題 3 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題, B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかも知れない問題です．この中から，**合計 3 問を選択**して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は, 失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください.

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください.
- すべての解答用紙に名前を書いてください.
- 答案は, 答えのみではなく, 思考の手順が辿れる形で書いてください.
- 電卓・コンピュータの使用は禁止します.
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません.

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください.

GOOD LUCK !!

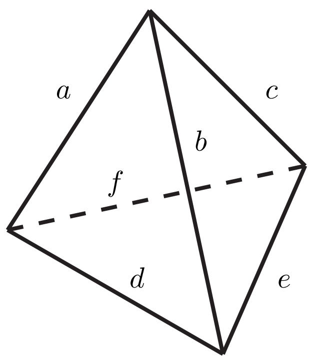
*2008 年 11 月 3 日 開催

A 問 題

問 題 A-1　30pt

今年2008年は和算家・関孝和（せきたかかず）の没後300年にあたり，それを記念する行事がいろいろ催されています．和算とは，いうまでもなく江戸時代の日本で栄えた独自の数学です．関孝和は「算聖」とも呼ばれるだけあって，多くの優れた業績を挙げました．その中には世界的に見て当時の最先端を行く素晴らしいものがいくつもあります．たとえば「行列式」（2次の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対しては $ad-bc$ が行列式）に当たるものを世界で初めて考えました．それを用いて立体的な図形の把握について卓越した業績を残しています．その流れを汲む和算家たちもいろいろな問題を考え，そして解決しました．その一つに関する問題です．

下図のように6つの辺の長さ a, b, c, d, e, f が与えられた四面体を考え，その体積を V とします．V の値を計算せよ，というのが問題です．もちろん，V^2 が分かれば，その平方根を取って V が分かるので V^2 を a, b, c, d, e, f によって表してください．

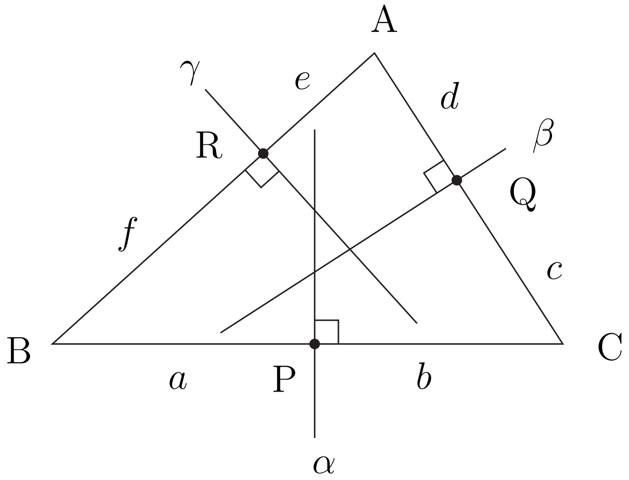


この問題は関流を学んだ筑後国久留米藩の第7代藩主・有馬頼　（ありま よりゆき）が解きました．ヨーロッパでは，ほぼ同じ時期に，かのオイラーが解いたと言われています．

ちなみに20世紀を代表する数学者の一人，アレクサンドル・グロタンディークは高校生の頃，凡庸な数学教師の退屈な授業に飽き飽きしていましたが，三角形の面積を与える「ヘロンの公式」を知った際，その3次元版はどうなるのだろうと疑問を持ち，この問題を自分で考え出した上に自力で解くことに成功しました．それが数学者を目指す決意をするきっかけになったということです．

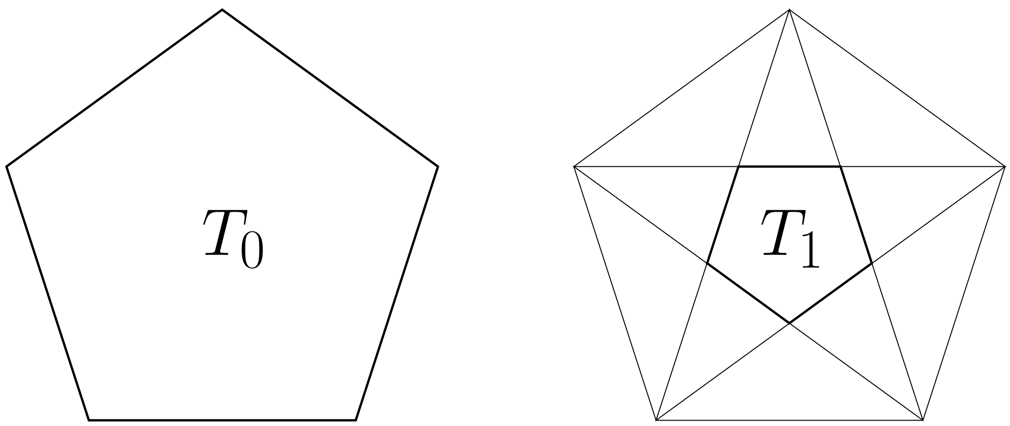
問 題 A-2 **25pt**

三角形 ABC を考える．辺 BC, CA, AB それぞれの上に点 P, Q, R をとり，線分 BP, PC, CQ, QA, AR, RB の長さをそれぞれ a, b, c, d, e, f とする（図参照）．点 P における辺 BC の垂線を α，点 Q における辺 CA の垂線を β，点 R における辺 AB の垂線を γ とする．このとき，三直線 α, β, γ が一点で交わるための必要十分条件は $a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$ であることを証明せよ．



問 題 A-3 **20pt**

1 辺の長さが 1 の正五角形を T_0 で表す．T_0 の対角線で囲まれた小さい正五角形を T_1 とし，以下同様にして正五角形 T_n の対角線で囲まれた，T_n より小さい正五角形を T_{n+1} とする．正五角形 T_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を求めなさい.



問 題 A-4 **30pt**

19 個の碁石がある．二人の人が交互に 1 個以上 5 個以下ずつとっていく．全部の碁石をとり終わったところで，とった碁石の合計が奇数個になった方を勝ちとするゲームを行う．このゲームは先手必勝か．

問 題 A-5 **35pt**

実数上で定義され，実数に値をとる，2 次までの連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ が条件

$$f''(x) \geq f(x)$$

を満たす．このとき，

$$f(x) \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2} f(0) + \frac{e^x - e^{-x}}{2} f'(0)$$

となることを示せ．ただし e は自然対数の底である．

（問題に不備がありましたので上記のように訂正しました．数学コンテストの採点及び成績には影響ありませんでした．不備についてお詫び申し上げます．）

問 題 A-6 **30pt**

2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は次の条件をみたすとする．

(i) 任意の自然数nに対して，a_nは正の偶数．

(ii) 任意の自然数nに対して，b_nは正の奇数．

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

(iv) 数列$\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$は正の実数$\alpha$に収束する．

(1) 次の2つの極限値が存在することを示せ．

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{a_n + b_n^2}\right), \\ B &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{b_n + a_n^2}\right). \end{aligned}$$

(2) $A = B$となるような数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は存在するか．存在するならばそのような数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の例を構成し，存在しないならばそのことを証明せよ．

問 題 A-7 **40pt**

m を自然数とする．実数係数の m 次多項式

$$f_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

を与える．$(m-1)$ 次以下の任意の多項式 $g(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f_m(x) g(x) dx = 0$$

が成り立つと仮定する．

(1) m が偶数ならば，任意の奇数 i $(0 < i < m)$ に対して $a_i = 0$ であることを証明しなさい．

(2) m が奇数ならば，任意の偶数 i $(0 \leq i < m)$ に対して $a_i = 0$ であることを証明しなさい．

B 問 題

問 題 B-1 40pt

次の式を見てみよう：

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \tag{i}$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3. \tag{ii}$$

一般的に，自然数 k，整数 x に対して，等式

$$x^k + (x+1)^k + (x+2)^k + \cdots + (x+k-1)^k = (x+k)^k \tag{iii}$$

を考える．(i) は (iii) における $k=2$，$x=3$ の場合であり，(ii) は (iii) における $k=3$，$x=3$ の場合である．

(1) k の 1 の位が 1 であるとき，(iii) をみたす整数 x は存在しないことを示せ．

(2) $k+1$ が素数であるような k を考える．(iii) をみたす整数 x が存在するならば，$k=2$ であることを示せ．

問 題 B-2 | 50pt

0 以上の整数が 1 つ書かれたカードを何枚か入れた箱を考える．ただし，箱に入れるカードの枚数は 1 以上で有限とし，同じ数が書かれたカードを複数入れることも許すものとする．そして，正の整数 n に対し，n 枚のカードが入っている箱を「n-箱」と呼び，特に 0 以上 $n-1$ 以下の整数が書かれたカードを，それぞれ 1 枚ずつ計 n 枚入れた「n-箱」を「標準 n-箱」と呼ぶことにする．

箱 A, B と整数 r に対し，箱 A と B からカードをランダムに 1 枚ずつ取り出して，その 2 枚のカードに書かれている数の和が r になるような確率を $P(r; A, B)$ で表す．そして，箱の組 (A, B) と (C, D) はすべての整数 r に対して $P(r; A, B) = P(r; C, D)$ が成立するとき「同等」であると言うことにする．

以下の問いに答えよ．ただし，(2a) と (2b) はどちらか 1 問を選んで解答すること．

(1) 標準 6-箱 B_6 に対し，(B_6, B_6) と同等になるような 2 つの 6-箱からなる組 (C, D) をすべて求めよ．

(2a) 標準 5-箱 B_5 に対し，(B_5, B_5) と同等になるような 2 つの 5-箱からなる組は (B_5, B_5) のみであることを示せ．

(2b) p を素数とする．このとき標準 p-箱 B_p に対し，(B_p, B_p) と同等になるような 2 つの p-箱からなる組は，(B_p, B_p) のみであることを示せ．

$\boxed{\textbf{問 題 B-3}}$ $\boxed{\textbf{40pt}}$

実数を成分とする n 次正方行列全体のなすベクトル空間

$$M_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ;\ \text{各}\, a_{ij} \text{は実数} \right\}$$

は成分が n^2 個あるので，n^2 次元ベクトル空間である．ただし，$n \geq 2$ とする．

そこで，M_n のつぎの条件を満たす部分空間 V_n を考える：

> "V_n の任意の元は零行列（成分がすべて 0 の行列）を除いて，すべて逆行列をもつ．"

一般に，与えられた n に対して，条件を満たすベクトル空間は無限に多く存在し得る．また，ベクトル空間としての次元が異なるものも存在し得る．V_n のベクトル空間としての次元を $\dim V_n$ を書くことにし，$V_n \neq \{O\}$ と仮定する．このとき，つぎのことを示せ．

(1) 任意の n に対して，$1 \leq \dim V_n \leq n$ であり，さらにもし n が奇数ならば任意のベクトル空間 V_n に対して $\dim V_n = 1$ が成り立つ．

(2) $\dim V_4 = 4$ となるような V_4 が存在する．