第12回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，表彰及び賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 9 問 (A 問題 6 問と B 問題 3 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかも知れない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 電卓・コンピュータの使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2009 年 11 月 3 日 開催

A問題

問題 A-1　25pt

高校の教科書に「$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ」という例題がでていました。そこで、この類似問題として「$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ」も考えられますが、ここでは、さらに進めた以下の問題に挑戦してください。

問題　$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ が無理数であることを証明せよ。

問題 A-2 25pt

2以上の自然数 n に対して、媒介変数表示

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \dfrac{1}{n}\cos n\theta \\ \\ y = \sin\theta + \dfrac{1}{n}\sin n\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で表される曲線 C に関する以下の問いに答えなさい。

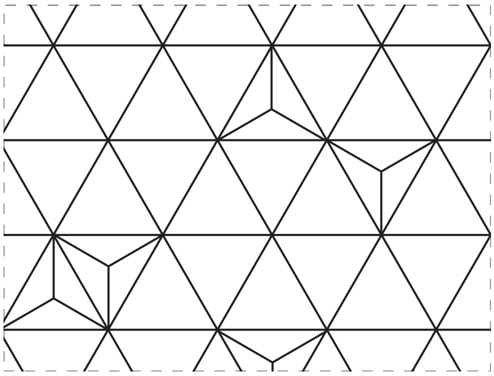
(1) 曲線 C の概形を描きなさい。

(2) 曲線 C の長さを求めなさい。

(3) 曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めなさい。

問題 A-3 　50pt

イギリスのカンタベリーという町には大聖堂があって，その天井はリブボールト（rib vault）と呼ばれる素晴らしい幾何学模様で覆われているそうです．そんな模様を思い描きつつこの問題にチャレンジしてみませんか．



三角形を平面に敷き詰めたものを**三角形タイルによる平面のタイル貼り**と呼びます．ここで，三角形は隙間なく，また重なり合うことなく平面を覆い尽くしているものとします．さらに，ある三角形の辺の途中に他の三角形の頂点が置かれることもないものとします．右の絵は一部を切り取ったものですが，実際に考える図形は平面全体に広がっています.（隠れている部分も似たような状況になっていると思ってください.）現れる各三角形を**タイル**と呼びます．上の絵で使われているタイルはすべて大小２種類のタイルのいずれかに合同ですので，これは２**種類**のタイルによるタイル貼りということになります．いずれかのタイルの頂点である点を単に**頂点**と呼ぶことにします．上の絵のようなタイル貼りをすると平面上には無数の頂点がありますが，見えている各頂点のまわりに集まっているタイルの枚数を数えてみると，3，6，7，８のいずれかですね．

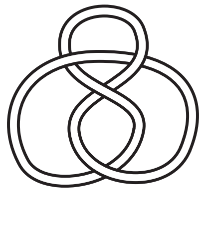
このような言葉遣いのもとで，次の事実を証明して下さい．

証明すべき事実

有限種類の三角形タイルによる平面のタイル貼りで，どの頂点のまわりにも７枚以上のタイルが集まっているようなものは存在しない．

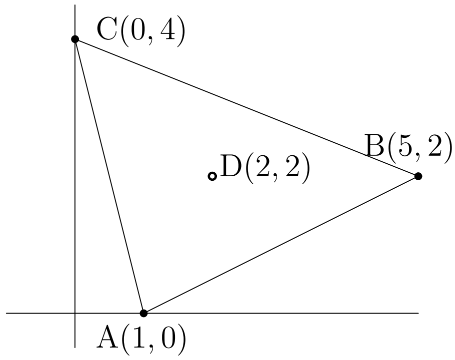
補足と蛇足．この問題ではタイル貼りとして「普通の」（つまり，高校までの教科書に書かれている意味の）平面や三角形に対するもののみを考えます．非ユークリッド幾何の重要な例として知られている双曲幾何の世界でも同じような意味での三角形タイルによるタイル貼りを考えることができますが，その場合には，実は，この問題で証明する「事実」は事実と異なることが知られています．

右に描かれている「８の字結び目」は３次元双曲幾何に支配されますが，その研究においてはこの問題で考えるような普通の平面の三角形タイル貼りも重要な役割を演じます．大聖堂の天井を眺めながら，こういう数学に没頭した先人たちもいたかもしれませんね．



問題 A-4　30pt

正の数 x, y に対して，不等式 $x^2y^2 \leqq \dfrac{1}{3}(x + x^5y^2 + y^4)$ が成り立つ。
この不等式が成立する上で，この右辺に現れる単項式の x, y の指数を座標とする点 $\mathrm{A}(1,0)$，$\mathrm{B}(5,2)$，$\mathrm{C}(0,4)$ と，左辺に現れる単項式の x, y の指数を座標とする点 $\mathrm{D}(2,2)$ を考えると，D が $\triangle$ABC に含まれていることが効いている。
そこで以下，この不等式をもっと一般化して証明することを問題とする。



問題 座標平面の 3 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$，$\mathrm{B}(b_1, b_2)$，$\mathrm{C}(c_1, c_2)$ を頂点とする $\triangle$ABC を考える。

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad d_i = p_1a_i + p_2b_i + p_3c_i \quad (i = 1, 2)$$

によって定まる 1 点 $\mathrm{D}(d_1, d_2)$ と不等式

$$x^{d_1}y^{d_2} \leqq k(x^{a_1}y^{a_2} + x^{b_1}y^{b_2} + x^{c_1}y^{c_2}) \tag{$*$}$$

に関して，次のことを証明せよ。

1. D が $\triangle$ABC の内部，あるいは周上にあるときは，十分大きな実数 k をとると，どんな正の数 x, y に対しても不等式 $(*)$ が成立する。

2. D が $\triangle$ABC の外部にあるときは，どんなに大きな実数 k をとっても，不等式 $(*)$ が成立しないような正の数 x, y が存在する。

ただし，証明なしに次の事実を用いてもよい：

$$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1$$

ならば，すべての正の数 X, Y, Z に対して

$$X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \leqq \alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

となる。[荷重付の (相乗平均)≦(相加平均)]

参考 (これは今回の問題としない)：　同様にして次のことが示される。
n 次元ユークリッド空間に，有限個の点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p, \mathrm{D}$ を考える。$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ を含むすべての凸多面体が D を含んでいるとき，またそのときに限って，十分大きな定数 $k > 0$ をとると，変数がすべて正の値のみを取るかぎり，

[D の座標を指数に持つ n 変数単項式]
$\leqq k$[$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ の座標を指数に持つ n 変数単項式の和]

が成立する。

$\boxed{\textbf{問題 A-5}}$ $\boxed{40\textbf{pt}}$

a を整数とする．多項式

$$f_a(X) = X^4 + aX^3 + (-2a-1)X^2 + aX + 1$$

について考える．

(1) $f_a(X)$ が 2 つの 1 次以上の整数係数多項式の積に分解するような整数 a をすべて求めよ．

<u>以下の (2)，(3) では，整数 a は (1) で求めたものとは異なるものとする．</u>

(2) $1-4a$ が平方数であるとする．このとき $f_a(X) = 0$ の 1 つの解を α とすれば，その他の 3 つの解はすべて α の有理数係数 1 次分数式

$$\frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}, \quad p, q, r, s \text{ は有理数}$$

の形で表せて，$g(X) = \dfrac{pX+q}{rX+s}$ とおけば

$$g(g(\alpha)) = \alpha$$

を満たすことを示せ．

(3) (i) $(a+2)(a+6)(1-4a)$ が平方数となるような整数 a をすべて求めよ．

(ii) (i) で求めた a について，$f_a(X) = 0$ の 1 つの解を α とすれば，その他の 3 つの解はすべて α の有理数係数の有理式（多項式もしくは分数式）で表せることを示せ．そして (i) で求めた a のうちで最大のものに関して具体的にその有理式を求めよ．

問題 A-6　25pt

地球上の２点を結ぶ最短経路と緯度の関係

問　地球の表面 E を完全な球面とみなす。北極点 N を除く E 上に、2 点 A, B を互いに対蹠点にならないように取り、それらを結ぶ E 上の最短経路 m を描く。このとき、両端点 A, B のどちらよりも N に近い点（北緯の大きい点）が m 上に存在するための、A, B の位置に関する必要十分条件を述べよ。図を用いずに理解できるよう明瞭簡潔な文章で表現すること。ただし、球面上の 2 点を結ぶ最短経路が、2 点を通る大円の一部であることは用いてよい。

[用語解説] E 上の 2 点 A, B が互いに**対蹠点**（たいせきてん）であるとは、A, B を結ぶ直線が地球の中心を通る場合のことである。
また、南緯 x 度は北緯 $-x$ 度として扱い、E 上の任意の点の北緯は -90 度以上 90 度以下で考える。

背景 関西空港からドイツのフランクフルト空港に向かう飛行機は、どちらの空港よりも北に位置するシベリアの森林地帯の上を飛んでいきます。けれども関西空港から羽田空港に向かう飛行機の最短経路は、東京より北を通ったりしませんよね。なんで？

B問題

問題 B-1 30pt

自然数全体の集合から, 次の条件を満たすものをすべて選び出し, 小さい方から順に並べたものを $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とする.

(条件) その自然数の桁数を m とするとき, ちょうど $\left[\dfrac{m}{2}\right]$ 個の桁に 0 が現れる.

このとき, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

の収束, 発散を判定せよ.

注. 実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. したがって, 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots,\ a_9 = 9,\ a_{10} = 10,\ a_{11} = 20,\ \cdots,\ a_{18} = 90,$$
$$a_{19} = 101,\ a_{20} = 102,\ \cdots,\ a_{27} = 109,\ a_{28} = 110,\ \cdots$$

となっている.

$\boxed{\text{問題 B-2}}$ $\boxed{\text{30pt}}$

整数を成分とする奇数次の対称行列 A を考えます。A の対角成分がすべて偶数であるとき、A の行列式の値は偶数になることを証明してください。

出題者の一言

$1+1=0$ が成り立つような 0 と 1 の 2 つの要素からなる代数上のベクトル空間 V を考えます。更に、V 上の二つの関数の間にどれぐらい近いか、または遠いかを測るある尺度を考えます。この尺度で測ってすべての 1 次関数から最も遠い関数が、関数を用いた暗号作成の際に有効であることが知られています。最近、V 上で構成した関数がこの条件を満たすかどうかを判定する定理の証明過程で使用した補題がここにあげる問題の原型になっています。

$\boxed{\textbf{問題 B-3}}$ $\boxed{\text{50pt}}$

つぎの関数をゼータ関数といいます.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

s が正の整数ならば，$s = 1$ の場合を除いて $\zeta(s)$ は収束します．特に s が偶数の場合は

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

などが 18 世紀にオイラーによって求められました．一方，s が奇数の場合には，偶数の場合のような簡明な表記は知られていません．オイラーは

$$\zeta(3) = \frac{2}{7}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log(\sin x) dx$$

が成り立つことを示しましたが，右辺第 2 項の定積分の計算が難しく，これに成功した数学者は一人もいません．さて，そこで問題です.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log(\sin x) dx$$

とします.

1. 積分区間を π まで広げたつぎの定積分 J を求めてください：

$$J = \int_0^{\pi} x \log(\sin x) dx.$$

2. つぎの等式を示してください：

$$I = \frac{\pi^2}{8}\left(\log\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(n+1)2^{2n}}\right).$$

3. 前問で，I の難しさは偶数ゼータが関わる無限級数に集約されていることが分かりました．そこでこの無限級数の分母を少し変えた級数に関するつぎの等式を示してください：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{2n(2n+1)2^{2n}} = \frac{1}{2}(\log\pi - 1).$$

※必要ならば，つぎの正弦関数の無限乗積表示を用いても構いません：

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$