第13回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問 (A 問題 5 問と B 問題 3 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかも知れない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 電卓・コンピュータの使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2010 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1　20pt

普段用いている 10 進法は, 任意の自然数 N を

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \quad (a_i \in \{0, 1, \cdots, 9\})$$

の形に表すものである (この係数 a_i を $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ と並べたものが N の 10 進表示). われわれはここで「-2 進法」を考えよう. -2 進法によると, 任意の整数 N が

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i (-2)^i \quad (a_i \in \{0, 1\})$$

の形に表される. 例えば $-3 = 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0$ となるので, 10 進数 -3 の -2 進表示は, この係数を並べて 1101 となる. 同様に

$$\begin{array}{rcl}
(10\text{ 進} & \to & -2\text{ 進}) \\
\vdots & & \vdots \\
-2 & = & 10 \\
-1 & = & 11 \\
0 & = & 0 \\
1 & = & 1 \\
2 & = & 110 \\
3 & = & 111 \\
4 & = & 100 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

(1) 10 進数の 100 を -2 進法で表せ.

(2) -2 進法でちょうど n 桁 $(n \geqq 1)$ である数すべての和を求めよ (結果を 10 進法で表せ).

(3) 10 進整数 n を -2 進表示したとき, 桁に現れる 1 の個数を $t(n)$ で表す (例えば $t(-1) = 2$, $t(2) = 2$, $t(3) = 3$, $t(4) = 1$ など). さらに 10 進正整数 N に対して

$$T(N) = \sum_{n=0}^{N-1} t(n)$$

とおく. このとき $T(2^{2k})$ $(k \geqq 0)$ を求めよ (結果を 10 進法で表せ).

問題 A-2 20pt

n 個の実数値連続関数 $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を考える．このとき，次の不等式を示せ:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b u_i(x)\ dx \right)^2} \leqq \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)^2}\ \ dx$$

$\boxed{\textbf{問題 A-3}}$ $\boxed{\text{25pt}}$

底面の半径 a，高さ b の直円錐がある．底面の中心を O，円錐の頂点を A とする．底面の周上の 1 点 B と線分 OA 上の A と異なる 1 点 C をとる．底面を含む平面内の B における底面の接線を l とし，l を含み C を通る平面を α とする．$\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = k \ (0 \leqq k < 1)$ とおく．

(1) α と円錐の共通部分は楕円になることを証明し，その面積を a，b，k を用いて表せ．

(2) $k \neq 0$ のとき，α により円錐は 2 つの立体に分けられる．その 2 つの立体の体積が等しくなるような k の値を求めよ．

(3) $0 \leqq k < 1$ のとき，(1) で求めた楕円の面積が最大となる k の値を求めよ．

問題 A-4 30pt

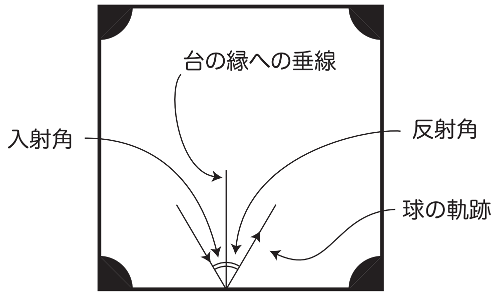
ビリヤードはご存じですね．現実のビリヤードでは，テーブルを転がる球はあっという間に減速してしまいそんなに長い距離を動けるわけではありません.「あとちょっと転がりさえすれば穴に落ちたのに」と悔しい思いをしたことのある人も多いでしょう．

この問題で考えて欲しいことは，ビリヤードの球がいつまでも転がり続けるとしたらいつかは穴に落ちるだろうか，ということです．数学的に取り扱いやすいように，以下のような単純化した状況で考えましょう．

- ビリヤード台は一辺の長さが 1 の正方形であるとします．その台には下図のように各頂点を中心とした半径 r（$0 < r < 1/2$）の 4 つの穴が開けられています．
- ビリヤードの球には大きさがなく，動き始めたら縁に当たるか穴に落ちるまでは直線上を等速で進みます．縁に当たったときには，球は入射角と反射角が等しくなるように方向転換して同じ速さで動き続けます．また，穴に達した球はその穴に落ちてしまいます．

以上のような状況下で，球はいつかは穴に落ちてしまうでしょうか．実はそうとは限りません．例えば，台の中心から縁に垂直な方向に打ち出せばいつまでも球は穴に落ちません．では，以下の状況ではどうでしょうか．それが本題です．

ビリヤード台



問題

上で用意したビリヤード台の 4 つの穴の一つにふたをすることで台の頂点に球を置く．その球を台の内側に向かって時刻 0 において速さ 1 で打ち出し，時刻 r に達した直後に穴をふさいでいたふたを取り外す．

このとき，球の動きとして最も適切なものを以下の選択肢から選び，理由とともに答えよ．

1. 打ち出す方向によっては，いつまでも球が穴に入らないことがある．
2. どんな方向に打ち出しても，球はいずれは穴に落ちる．ただし，穴に落ちるまでの時間は打ち出す方向によっていくらでも長くなることがある．
3. どんな方向に打ち出しても，方向によらないある一定の時間内に球は穴に落ちる．

問題 A-5 35pt

空間内の 3 本の直線が一般の位置にあるとは，この 3 本すべてに平行な平面はなく，またどの 2 本の直線をとっても同一平面上にはないことを意味する．空間内の一般の位置にある 3 本の直線 ℓ, m, n と ℓ 上の点 P が与えられたとする．このとき，m, n 上にそれぞれ点 Q，R をとって，P，Q，R が一直線上にあるようにできるかを論じよ．

B 問題

問題 B-1　40pt

2 つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は以下の条件を満たすとする：

(1) すべての $n \geq 1$ について $a_n > 0,\ b_n > 0$.

(2) 任意の自然数 k に対して無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^k$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^k$ は収束して，その値は一致している.

このとき，数列 $\{a_n\}$ の項の順序を適当に並び替えれば数列 $\{b_n\}$ に一致することを示せ.

$\boxed{\text{問題 B-2}}$ $\boxed{\text{35pt}}$

$n \geqq 0$，$k \geqq 0$ をともに整数とする．n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ を k 個の超平面で区切って作られる領域の最大個数を $a(n,k)$ とする．ただし便宜上，任意の $k \geqq 0$ に対して，$a(0,k) = 1$ と定める．このとき，変数 x （ただし $|x| < 1$ とする）を用いて構成された関数

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,k)x^n$$

をなるべく簡単な分数式で表せ.

用語: $\mathbb{R}^n$ の超平面とは $n-1$ 次元部分空間を平行移動したもの

問題 B-3　50pt

公式集を眺めるのは楽しいことです．思いがけない式を見つけると興味が広がります．先日も岩波「数学公式 II」をパラパラと見ていたら次のような式を見つけました：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4} \tag{1}$$

ここで arctan は正接関数 tan の逆関数を表します．すなわち

$$y = \arctan x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \tan y \qquad \text{ただし } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

により定義されます.（$\arctan x$ は $\tan^{-1} x$ と書かれることもあります.）自然数の逆数の 2 乗の総和について $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ となることはよく知られていますが，2 倍して arctan に代入したものの和が計算できること自体，驚きです．そこで，(1) を証明して下さい．(もちろん上の公式集に証明は書かれていませんよ．) 次の式が成り立つことは証明せずに使ってもかまいません：

$$\sin \pi x = \lim_{N\to\infty} \pi x \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \tag{3}$$