第15回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 9 問 (A 問題 5 問と B 問題 4 問) あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

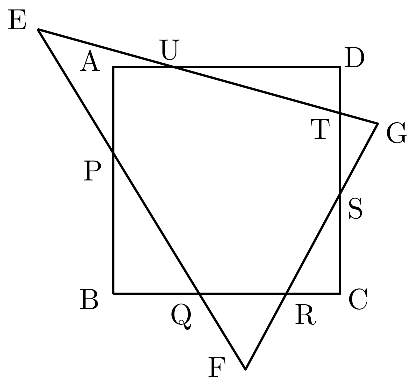
GOOD LUCK !!

[1] 2012 年 11 月 3 日 開催

A問題

問題 A-1　30 pt

平面上に正方形 ABCD と三角形 EFG の辺が図のように交わっている．つまり AB と EF，BC と EF，BC と FG，CD と FG，CD と GE，DA と GE は交わる．それらの交点を順に P, Q, R, S, T, U とするとき，これらの 13 個の点はすべて異なるものとする．平面内で三角形 EFG をどの方向に少し平行移動しても，正方形 ABCD と三角形 EFG の重なりの部分の面積が減少するという．このとき，3 つの線分 PQ，RS，TU をうまく平行移動すれば，それらを 3 辺とする三角形ができることを示せ．



問題 A-2 25 pt

トランプのスペードのカード 13 枚とジョーカー 1 枚を合わせた合計 14 枚のカードをよく切って，カードを裏返しにして場の中央に揃えて積んでおく（以下これを「山」と呼ぶ）.

最初に，山から一番上のカードを 1 枚取り，そのカードを裏返し，表を見る．そのカードがジョーカーであれば操作を終了し，ジョーカーでなければ，そのカードに書かれている数（この数を n_1 とする）と同じ枚数のカードを 1 枚ずつ山から取り，n_1 枚目に取ったカードだけ裏返し，表を見る．再びそのカードがジョーカーであれば操作を終了し，ジョーカーでなければ，そのカードに書かれている数（この数を n_2 とする）と同じ枚数のカードを 1 枚ずつ山から取り，n_2 枚目に取ったカードだけ裏返し，表を見る．このような操作を繰り返し，ジョーカーを見て操作を終了することなく，すべてのカードを山から取ることのできる確率を求めよ.

ただし，一旦取ったカードは山に戻さないものとし，A は 1，J は 11，Q は 12，K は 13 として扱う．また，山の一番下のカードがちょうど n_i 枚目となり，裏返したとき，ジョーカーであった場合は，すべてのカードを山から取っている状態ではあるが,「ジョーカーを見ることなく，すべてのカードを山から取った」とは考えないこととする.

問題 A-3　35 pt

数列 $\{f_n\}$ は条件

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ (n \geqq 1)$$

で定まるものとする (この数列をフィボナッチ数列という).

(1) 素数 p, 自然数 N に対して

$$F_p(N) = \{\, n \mid n \text{ は } N \text{ 以下の自然数},\ f_n \text{ は } p \text{ で割り切れる} \,\}$$

とし，$F_p(N)$ に含まれる自然数の個数を $\#F_p(N)$ で表す．任意の素数 p に対して，極限値

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#F_p(N)}{N}$$

が存在し，正である (0 でない) ことを証明せよ．

(2) (1) で存在が示された極限値を ΔF_p で表す． $\Delta F_{17}, \Delta F_{19}$ を求めよ．

注.　上の極限値は，フィボナッチ数全体のうち，与えられた素数 p で割り切れるものがどのくらいあるか，言わばその「割合」を数学的に定式化したものである．

問題 A-4　35 pt

定数 α に対して，曲線

$$C:\ (x+y)^4 = 2(\alpha^2-1)x^2 + 4(\alpha^2+1)xy + 2(\alpha^2-1)y^2$$

で囲まれる部分の面積が $\dfrac{16}{3}$ であるとする．

(1) α を求め，曲線 C の概形を描け．

(2) α は 3 次の無理数であることを示せ．ここで，α が **3 次の無理数**であるとは，整数を係数とする 3 次方程式の解とはなるが，整数を係数とする 2 次以下の方程式の解とはならないことである．

問題 A-5 45 pt

次の式の値をできるだけ簡単な形で求めよ．

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{2499}\sqrt{10+\sqrt{50+\sqrt{k}}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{2499}\sqrt{10-\sqrt{50+\sqrt{k}}}}$$

B問題

問題 B-1　45 pt

一般項が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めて下さい.

$$a_n = \sqrt{4+\sqrt{4+3\sqrt{4+5\sqrt{4+7\sqrt{\cdots\sqrt{4+(2n-1)\sqrt{4+(2n+1)}}}}}}}$$

念のため，初めの 2 項を書くと

$$a_1 = \sqrt{4+\sqrt{4+3}}$$
$$a_2 = \sqrt{4+\sqrt{4+3\sqrt{4+5}}}$$

となります.

$\boxed{\textbf{問題 B-2}}$ $\boxed{30\,\mathrm{pt}}$

以下の問題中のベクトルと行列の成分はすべて実数とします．(i,j) 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 である n 次正方行列を $E_{i,j}$ で表し，n 次行ベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ および $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ に対して

$$A(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j + x_j y_i + y_i z_j + y_j z_i + z_i x_j + z_j x_i)E_{i,j}$$

とおきます．また，n 次対角行列

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

において $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ の順に対角成分の最初の p 個の値が 1，次の q 個の値が -1，最後の $n-p-q$ 個の値が 0 となる行列を $E(p,q)$ $(0 \leqq p,\ 0 \leqq q,\ p+q \leqq n)$ で表します．このとき，次の問題 (1)，(2) を解答してください．

(1) 任意の n 次行ベクトル x, y, z に対して，${}^tPA(x,y,z)P = E(p,q)$ となる整数 p, q と n 次正則行列 P が存在します．このことを証明し，さらに x, y, z が 1 次独立であるときの p, q の値を求めてください．(ここで，${}^tP$ は P の転置行列を表します．)

(2) S を n 次対称行列とする．このとき，$S = A(x,y,z)$ を満たす 1 次独立なベクトルの組 x, y, z が存在するための必要十分条件を，理由をつけて求めてください．

問題 B-3 35 pt

開区間 (a, b) 上で定義された (狭義) 単調な連続関数 $f(x)$ とその逆関数 $g(x)$ を考える．$F(x) = xf(x)$，$G(x) = xg(x)$ とおく．$x = p$ で $F(x)$ が極大値をとり，ほかに極大となる点はないとする．このとき，$G(x)$ の極大値をすべて求めよ．

問題 B-4　50 pt

R を環（四則演算のうち「加減乗」ができ，分配法則が成立する代数系）とする．R のすべての要素 x が

$$x^4 = x$$

をみたすとき，R の任意の要素 $x,\,y$ について

$$xy = yx$$

となること，すなわち R が可換であることを示せ．