第16回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問（A 問題 5 問と B 問題 3 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2013 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1　25pt

自然数 n に対し，$\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n$ の小数部分を a_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するか．存在するならばその値を求め，存在しないならばそのことを証明せよ．

問題 A-2 35pt

平面上に三角形 ABC があり，辺の長さが AB $= c$，BC $= a$，CA $= b$ であるとする．辺 AB 上に点 P，辺 CA 上に点 Q があり，線分 PQ が三角形 ABC の面積を 2 等分している．このような線分 PQ が通過しうる点全体のなす集合の面積を求めよ．

問題 A-3　30pt

実数 $ne^{\frac{1}{100}}$ に最も近い整数の値が 2013 となるような自然数 n の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

問題 A-4 40pt

m を正の整数とする．整数 x, y に対し，

$$A_m(x,y) = \sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^r {}_m\mathrm{C}_{2r}\, x^{m-2r} y^{2r}$$
$$B_m(x,y) = \sum_{r=0}^{[\frac{m-1}{2}]} (-1)^r {}_m\mathrm{C}_{2r+1}\, x^{m-2r-1} y^{2r+1}$$

とおく．ただし，$[r]$ は r を超えない最大の整数であり，${}_n\mathrm{C}_r$ は二項係数である．例えば $m=5$ とすると

$$A_5(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$
$$B_5(x,y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$$

である．

p を 4 で割って 3 余る素数とするとき，$A_m(x,y)$ と $B_m(x,y)$ が共に p で割り切れるならば，x と y が共に p で割り切れることを証明せよ．

問題 A-5 50pt

n を自然数とする．1 から n までの n 個の自然数を並べ替えた順列 P

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

に対して，

$$X(P) = |1 - a_1| \cdot |2 - a_2| \cdot |3 - a_3| \cdot \cdots \cdot |(n-1) - a_{n-1}| \cdot |n - a_n|$$

とおく．$X(P)$ の最大値を求め，その最大値を与える順列の例を挙げよ．
（ちなみに，順列 P が $X(P) > 0$ を満たすとき，P は乱列と呼ばれる．）

B問題

問題 B-1　25pt

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル x と y の内積を (x, y) で表す．$\mathbb{R}^n$ 内の 2 つの正規直交系 $\{a_1, \ldots, a_l\}$ および $\{b_1, \ldots, b_m\}$（$1 \leqq l \leqq n, 1 \leqq m \leqq n$）を与え，$\mathbb{R}^n$ の一次変換 f と g を次のように定める．

$$f(x) = x - \sum_{i=1}^{l} 2(x, a_i)a_i$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} (x, b_i)b_i$$

このとき，f，g および $f + g$ の階数を求め，その理由を記せ．

問題 B-2　35pt

四面体 ABCD を T とおく．1 つの直線 L に平行な光線で，L に垂直な平面に，この四面体 T を投影（正射影）して得られる図形の面積を $S_T(L)$ とする．L を平行移動しても $S_T(L)$ の値は変わらないことに注意する．

このとき，面積 $S_T(L)$ の最大値 M_T を求める問題を考える．空間内に直線は無限に存在するが，M_T を求めるために実際に $S_T(L)$ の値を比較すべき（最大値 M_T を与える可能性のある）直線 L の個数は有限個でよい．どのような L だけを考えればよいか，理由とともに答えよ．

ただし，以下の 3 点に注意すること．

- 結論はおおむね次のような形で述べるものとする．
「どのような四面体 T の場合でも，次に挙げる n 本の直線 L に対してだけ $S_T(L)$ の値を調べれば，必ず M_T を求めることが出来る．$\cdots$ 」
なお，L の取り方は四面体 T の頂点 A, B, C, D を用いて説明すること．

- 挙げる直線には出来るだけ無駄なものが無く，n は小さいことが望ましい．

- 結論の文章には辺の長さ，面の大小，およびそれらのなす角度による場合分けを用いてはならない．ただし理由を述べる際にはこの限りではない．

問題 B-3 40pt

n を 3 以上の自然数とする．実数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\cos\frac{\pi}{n} \geqq x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n - x_nx_1$$

が成り立つことを示せ．