第17回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催 [1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 10 問（A 問題 7 問と B 問題 3 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2014 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1 　20pt

漸化式

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+2}+1}{2^n-1}(a_n+1) - 2^{n+3} - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$a_5 = 2014$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

$\boxed{\textbf{問題 A-2}}$ $\boxed{25\text{pt}}$

a, b を正の定数とし，$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = a$，$\mathrm{BC} = \mathrm{AD} = b$ である四面体 ABCD を考える．辺 BD の長さ s と，辺 AC の長さ t が変化するとき，この四面体の体積の最大値を与える s と t の値の組を求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 A-3}}$ $\boxed{30\text{pt}}$

互いに素な自然数 a, b, c が，$a < c$，$b < c$ を満たすとし，$k = |a - b|$ とおく．

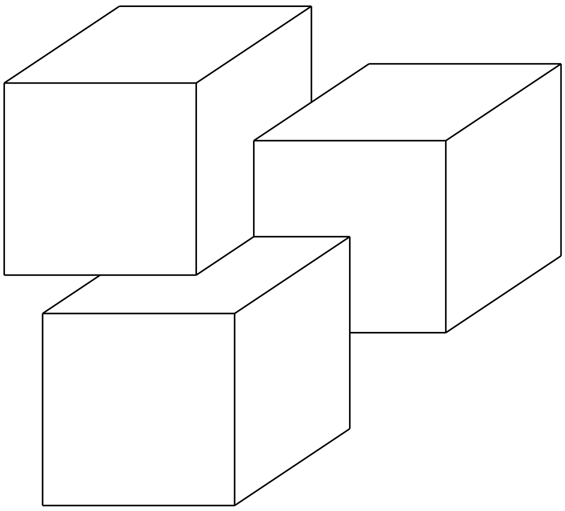
(1) $k = 3$ であるとき，各辺の長さが a, b, c である直角三角形は存在するか．存在する場合は，そのような直角三角形を求めよ (a, b, c のとり得る値を求めよ)．存在しない場合は，それを証明せよ．

(2) 各辺の長さが a, b, c である直角三角形が存在しないための k についての十分条件のうち，できるだけ一般的なものを挙げよ．

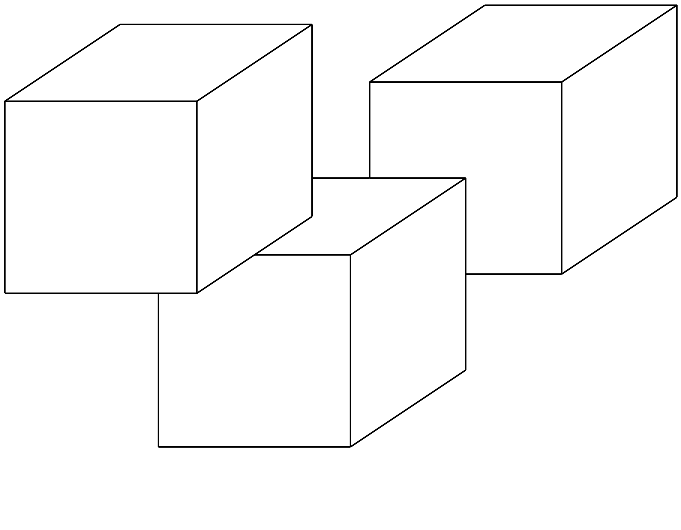
問題 A-4 30pt

1 辺の長さが a である立方体 3 つが，図のように接して 1 つに連なった立体を考える．図では，立方体の頂点が他の立方体のある面に接するとき，その頂点は面の中心にあり，交わる辺はすべてそれぞれの中点で互いに直交している．このとき，(1), (2) の立体を含む体積最小の凸多面体 (凸包という) の体積をそれぞれ求めよ．ただし，多面体が凸とは，多面体の任意の 2 点を結んだ線分がその多面体に含まれることであり，四面体や直方体のようにへこんだ部分がない多面体のことである．((1), (2) の立体自体は凸ではない．)

(1)



(2)



問題 A-5 45pt

複素数係数の n 次多項式 $P_n(x)$ が，次の 4 つの条件を満たすとする：

(i) $P_n(x)$ の n 次の係数は 1 である．

(ii) $P_n(0) \neq 0$.

(iii) 方程式 $P_n(x) = 0$ は重解をもたない．

(iv) 異なる 2 つの複素数 α, β が $P_n(\alpha) = P_n(\beta) = 0$ を満たすならば，$P_n(\alpha\beta) = 0$ が成り立つ．

一般に複素数係数の n 次方程式は複素数の範囲で重複を込めて n 個の解をもつことが知られており，ここでは方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする．次の問いに答えよ．

(1) $n = 3$ のとき，多項式 $P_3(x)$ をすべて求めよ．

(2) $n \geqq 4$ のとき，多項式 $P_n(x)$ は $x^n - 1$ のみであることを示せ．

問題 A-6 30pt

n を自然数とし,

$$a_n = \cos^n \frac{2}{7}\pi + \cos^n \frac{4}{7}\pi + \cos^n \frac{6}{7}\pi$$

とおく.

(1) a_5 の値を求めよ.

(2) a_n を無理数を用いない（できるだけ簡単な）n の式で表せ.

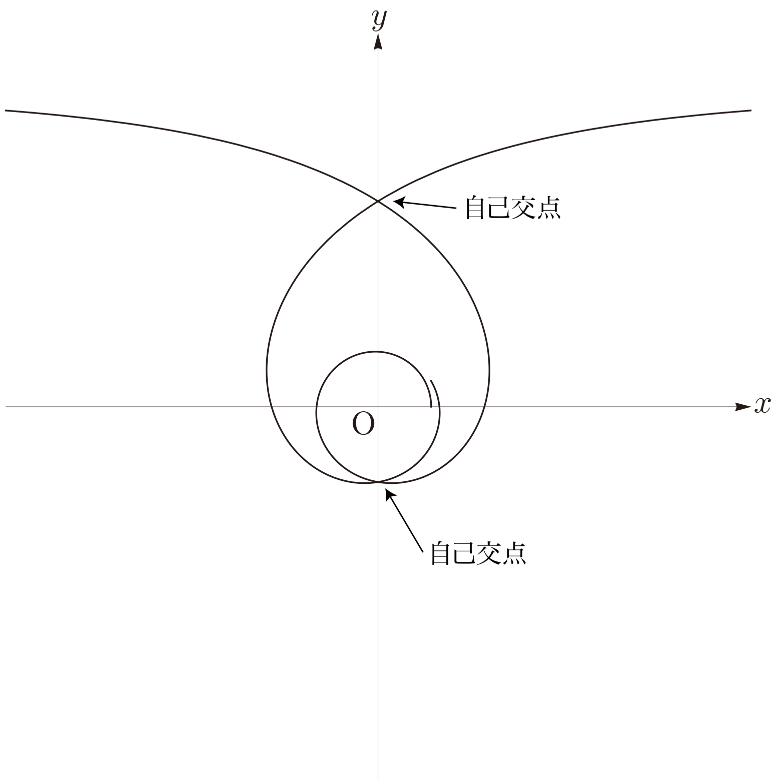
問題 A-7　35pt

q を定数とする．円 $C: x^2+y^2=1$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(\cos t, \sin t)$，$\mathrm{Q}(\cos qt, \sin qt)$ がある．C の P，Q における接線をそれぞれ ℓ_P，ℓ_Q とし，ℓ_P と ℓ_Q の交点の $0<t<6\pi$ における軌跡を L とする．ただし，$\ell_P // \ell_Q$ である t において L の点は考えないものとする．

(1) $\dfrac{1}{2}<q<1$ であるとき，L の自己交点の個数を求めよ．

(2) $0<q<\dfrac{1}{2}$ であるとき，L の自己交点の個数を求めよ．

ここで，自己交点とは，次の図のように L が L と交わる点のことで，3 重以上に重なる場合も 1 点と数える．



B問題

問題 B-1　20pt

a, b を異なる自然数とする. 行列 A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_1 \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_{2k+1} = A_{2k} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{2k+2} = A_{2k+1} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (k \geqq 1)$$

で定義する. $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおくとき, 極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{c_n}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{d_n}$$

があれば, その値を求めよ.

問題 B-2 　 35pt

m, n を 2 以上の自然数とする．m 次複素正則行列を要素とする集合 S が次の条件を満たすとき，S は積について閉じているという．

$$A \in S \text{ かつ } B \in S \text{ ならば } AB \in S$$

単位行列 E を含む n^2 個の m 次複素正則行列からなり，積について閉じている集合 G が次の条件 (i) と (ii) を満たすとする．

(i) $G \setminus \{E\}$ は $(n+1)$ 個の部分集合 $K_0, K_1, \ldots, K_n$ に分割されて，$0 \leqq i \leqq n$ なる各 i について，K_i は $(n-1)$ 個の行列からなる．

(ii) $0 \leqq i \leqq n$ なる各 i について，$H_i = K_i \cup \{E\}$ とおくとき，H_i は積について閉じている．

このとき，G に属する任意の 2 つの行列 A, B に対して，$AB = BA$ が成立することを証明せよ．

問題 B-3 50pt

p を奇素数，n を自然数とし，$f(x) = (x+1)^n - x^n$ とする．x が自然数全体を動くとき，$f(x)$ を p で割った余りが $0, 1, \ldots, p-1$ のすべての値をとることを，$f(x)$ は全域性をもつと呼ぶことにする．このとき，p に対して $f(x)$ が全域性をもつ n の値をすべて求めよ．(n が求めた値のとき $f(x)$ は全域性をもつこと，およびそれ以外の値のとき $f(x)$ は全域性をもたないことを証明すること.)