第18回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問（A 問題 5 問と B 問題 3 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1]2015 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1　30pt

数学研究の一つの方向として，知られている定理や公式を一般化することで新しい数学的事象を発見する，というものがあります．例えば，直角三角形に関してよく知られた三平方の定理（ピタゴラスの定理）は

定理 1 直角三角形の斜辺の長さを c，他の二辺の長さを a，b とするとき $c^2 = a^2 + b^2$ が成り立つ．

というものです．これを一般化したものとして余弦定理があります：

定理 2 三角形 ABC の 3 辺の長さをそれぞれ a，b，c とするとき $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ が成り立つ．ただし，辺と頂点，内角の対応は通常通りとする．

この定理は特別な場合として $C = \dfrac{\pi}{2}$ のとき **定理 1** となりますから，三平方の定理の一般化といえるわけです．

では，余弦定理を四角形に一般化することは可能でしょうか．これが第一の問です．

問 1 四角形 ABCD を考え，$\mathrm{AB} = a, \mathrm{BC} = b, \mathrm{CD} = c, \mathrm{DA} = d$ とします．また，頂点 A, B, C, D の内角をそれぞれ A, B, C, D とします．このとき，d^2 を a, b, c, B, C で表す公式を見つけて下さい．公式はなるべく簡潔な形に整理し，証明を付けてください．凸四角形の場合だけ考えても結構です．

これができたら，四角形から n 角形に一般化することを考えましょう．

問 2 n を 3 以上の自然数とし，n 角形を考えます．頂点を順に A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし，辺の長さを $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1 = a_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = a_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 = a_3$, …, $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = a_n$, とします．また，頂点 A_i の内角を A_i とします $(i = 1, 2, \ldots, n)$．このとき a_n^2 を a_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ および A_i $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$ で表す公式を見つけて下さい．

問題 A-2 40pt

n は自然数とし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k {}_{n-k}\mathrm{C}_k}{n-k}$$

の値を求めよ．

問題 A-3　30pt

p, q, r を定数とし，$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ とおく．座標平面上に $y = f(x)$ のグラフ C と，C 上の定点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ がある．A を通る直線 ℓ が C と異なる 3 つの共有点をもつように動くとき，C と ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和の最小値を求めよ．

問題 A-4 40pt

互いに素な自然数 m, n に対して，$2^m - 1$ と $2^{2n} - 2^n + 1$ の最大公約数を求めよ.

問題 A-5　25pt

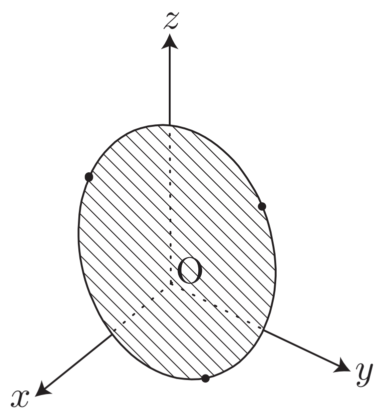
p は 4 で割って 1 余る素数とし，自然数 a に対して，$n = p^a$ とする．n の約数の総数を $\tau(n)$，総和を $\sigma(n)$ で表す．このとき，$\tau(n)$ が 2 で割り切れる回数と，$\sigma(n)$ が 2 で割り切れる回数は一致することを示しなさい．

B 問題

問題 B-1 50pt

2 つの壁と床が互いに直交している部屋の隅（すみ）に半径 1 の円盤を立てかけて静止させる．ただし円盤はその 2 つの壁と床のそれぞれにただ 1 点ずつで接触しているものとし，厚さは無視する．また部屋は十分広くて円盤が他の壁に接触することはない．

図のように，部屋の隅を原点 O とし，壁と床を座標面，すべての座標が正である領域を室内とする座標系を定める．円盤に垂直なベクトルを円盤の法線ベクトルということにしよう．話を単純化するために，すべての成分が正となる法線ベクトルを持つ円盤だけを考える．このとき円盤の中心 (α, β, γ) の存在範囲を求めて図示せよ．



問題 B-2 35pt

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ の距離は

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

で定義されている．次の条件を満たす $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の点からなる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が存在することを示せ：

(条件) S の任意の異なる 2 点間の距離は 1 または $\sqrt{2}$ である．

問題 B-3 30pt

α, β を 0 でない複素数，m, n を 0 でない整数とする．集合

$$A = \{(\log|z|, \log|w|) \in \mathbb{R}^2 \mid z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \alpha z^m + \beta w^n = 1\}$$

を図示し，その面積を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を用いてもよい．