第20回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問（A 問題 6 問と B 問題 2 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1]2017 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1 20pt

$a_n = 10^{\frac{100}{n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ において, 最上位の数字が 9 である a_n の個数, および n の値を求めよ. ただし, 1 以上の実数 x の最上位の数字とは, 例えば $x = \underline{1}2345.6789\cdots$ の場合, 下線部の 1 のことである. また, 必要なら $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてもよい.

$\boxed{\textbf{問題 A-2}}$ $\boxed{35\textbf{pt}}$

次の 4 項間漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考えます.

$$a_0 = 5,\ a_1 = 5,\ a_2 = 2, \quad a_{n+3} = -a_n + 2a_{n+1} + 2a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ について, a_n は 2 つの平方数の和で表されることを示してください. ただし平方数とは $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ など, 整数の 2 乗で表される数のことです.

$\boxed{\textbf{問題 A-3}}$ $\boxed{30\text{pt}}$

空間に 3 直線 ℓ, m, n があり，どの 2 つも平行ではなく，3 つが 1 点で交わることもないものとする．このときこれらの 3 直線のすべてと共有点を持つ球のうちで半径が最小であるものは，存在したとしてもただ 1 つであることを示せ．ただし球はその境界となる球面の点をすべて含むものとする．

問題 A-4　40pt

空間内の絡まった輪っかのことを**結び目**といいます．輪っかの素材であるひもは，伸縮自在で切れることはないと仮定します．

結び目が２つあったとき，片方の結び目を他方の結び目に「あやとりの要領」で変形させることができるとき，それら２つの結び目は同じものとみなします．この変形では，ひもを伸ばしたり縮めたりしてもよいものとします．例えば，図１のように変形すると，両端の２つの結び目は同じであることが分かります．

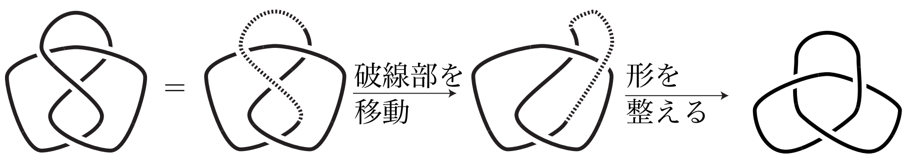


図 1: 変形すれば，同じ結び目だということが分かります．

平面上の単位円周にあやとりの要領で変形できる結び目を**ほどける結び目**と呼びます．例えば，図２の５つの結び目たちは，全てほどける結び目です．

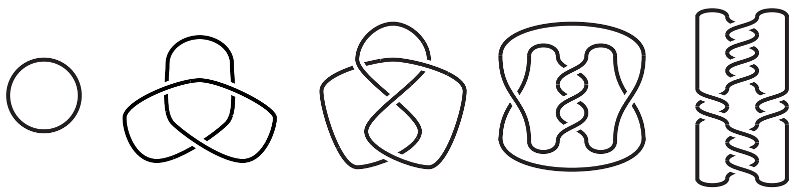


図 2: ほどける結び目たち

ここで，図３の左側のような結び目の一部をつなぎかえる操作 b を考えます．例えば，図３の右側のように b を行うと，ほどける結び目が得られます．

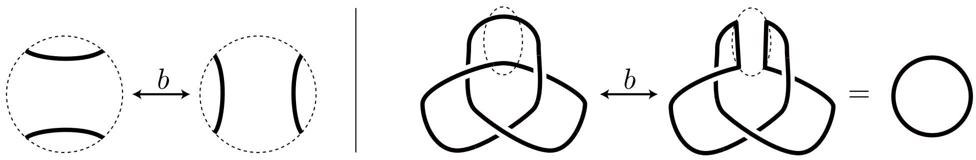
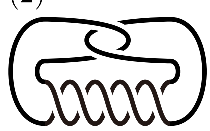


図 3: 操作 b

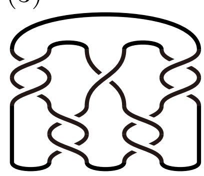
問. 図の結び目を操作 b を１度だけ行うことで，ほどける結び目に変えてください．あやとりの要領での変形は何回行っても構いません．解答は図１，図３を参考にして，どのように変形と操作 b を行ったかが分かるように描いてください．

(1)

(2)



(3)



問題 A-5 30pt

$\dfrac{\theta}{\pi}$ と $\sin\theta$ がともに有理数となる θ をすべて求めよ.

問題 A-6　45pt

等式 $2p^n + 1 = 3^m$ を満たす素数 p と自然数 n, m を決定することは未解決の問題です．例えば，$2p + 1 = 3^m$ を満たす素数 p と自然数 m の組は $1 \leqq m \leqq 100$ において 4 つ存在します．ここでは，これに関連したものとして次のような問題を用意しました．

p は素数，a, n, m は自然数とする．$a \neq 3$, $m > 1$ のとき，等式

$$2p^n + 1 = a^m$$

を満たす p, a, n, m の組は存在しないことを証明してください．

B問題

問題 B-1 35pt

正の実数 x についての方程式

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2 \tag{1}$$

を解いてみます．両辺の対数を取って

$$\log 2 = \log x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} \log x = 2 \log x \tag{2}$$

となります．従って $\log x = \dfrac{1}{2} \log 2$ より，

$$x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \tag{3}$$

を得ます．

一方，同じことを方程式

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 4 \tag{4}$$

でやってみると

$$\log 4 = \log x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} \log x = 4 \log x \tag{5}$$

となり，やはり

$$x = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} \tag{6}$$

を得ます．あれれ？ な，なんと (3) と同じ値になりました．これは (1)，(4) と矛盾しませんか？ここで問題です．この一見したところの矛盾の理由を明らかにしてください．単に説明するだけでなく，この現象の背後にある数学的構造を解明した上で簡潔に解説して下さい．

問題 B-2 　 45**pt**

平面上に 3 つの円 C_1, C_2, C_3 がある．C_1, C_2 の半径を R, r とすると，$R+r=1$ が成り立っていて，C_1 と C_2 は外接しており，C_3 は C_1 と C_2 の中心を直径の両端にもつ．C_1 と C_2 の外部で C_3 の内部である部分の面積を S とし，正の実数 k に対して

$$f(k) = \lim_{r \to +0} \frac{S}{(rR)^k}$$

を考える．$f(k) \neq 0$ となる最小の k とそのときの $f(k)$ の値をそれぞれ求めよ．