第21回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問（A 問題 6 問と B 問題 2 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2018 年 11 月 3 日 開催

A問題

問題 A-1 35pt

n を 3 以上の自然数とし，$-1 \leqq a \leqq 1$ とするとき，方程式

$$z^n + az^{n-1} + az + 1 = 0$$

のすべての複素数解は原点を中心とする単位円周上にあることを証明せよ.

問題 A-2　30pt

図 1 のように線でつながった 7 つの数がある．

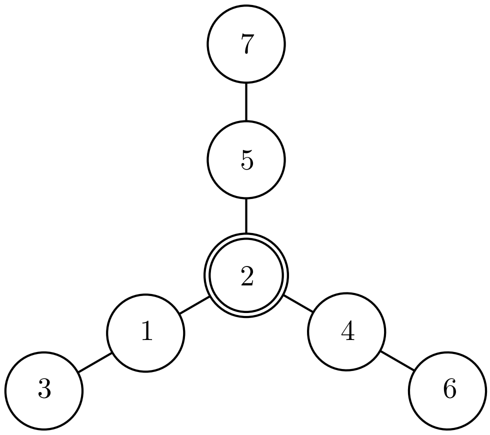
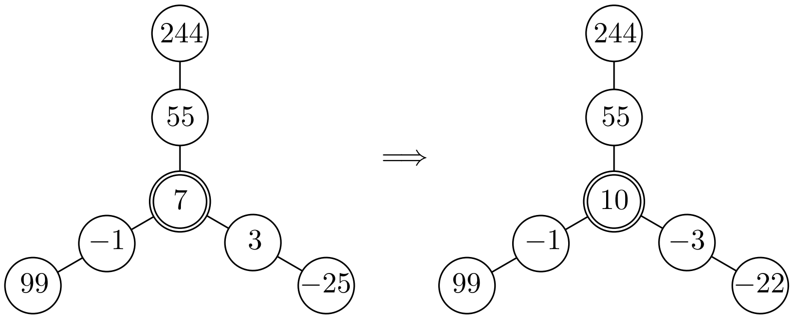


図 1

このような線でつながった一般の 7 つの数に対して，次の操作を考える：

(操作) 7 箇所から 1 つ選びそこにある数を A とする．A と線で直接つながったすべての数に A を加え，A を $-A$ に変える．A と線で直接つながっていない数は変えない．

例：A として 3 を選んだ場合の操作



問題　図 1 から始めてこの操作を繰り返し行うことで，中央の数 (◎の中の数) を 2018 にすることは可能か？　理由をつけて答えよ．

$\boxed{\textbf{問題 A-3}}$ $\boxed{25\textbf{pt}}$

x，$y \geqq 1$ のとき不等式

$$\frac{1}{2^{x+y-2}(x+y-1)} \leqq \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \leqq \frac{1}{x+y-1}$$

が成り立つことを証明して下さい.

$\boxed{\textbf{問題 A-4}}$ $\boxed{35\text{pt}}$

n を自然数とする．自然数 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ に対して，

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}}, \quad \frac{p'}{q'} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

で 2 つの既約分数 $\dfrac{p}{q}, \dfrac{p'}{q'}$ を定める．ただし，p, q, p', q' は自然数とする．

(1) $q' = q$ が成り立つことを示せ．

(2) pp' を q で割った余りを求めよ．

問題 A-5 20pt

座標平面上に y 軸と平行な軸をもつ放物線 C_1, C_2 がある．C_1 は上に凸，C_2 は下に凸であり，C_1 と C_2 は 2 点 A, B で交わっているとする．直線 AB に平行な C_1, C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし，直線 AB と ℓ_1, ℓ_2 との距離をそれぞれ d_1, d_2 とする．また，C_1 と ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S_1, C_2 と ℓ_1 で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を $k = \dfrac{d_1}{d_2}$ を用いて表せ．

問題 A-6 30pt

中心を O とする半径 1 の球面 S 上に異なる 3 点 A, B, C をとる．ただし，4 点 O, A, B, C は同一平面上にはないとする．A, B, C の任意の 2 点を S 上最短で結び球面三角形 ABC を作る．球面三角形の 3 弧 AB, BC, CA の長さをそれぞれ c, a, b とし，球面三角形 ABC の曲面積を Δ とする．

(1) 四面体 OABC の体積 V を $\cos a, \cos b, \cos c$ のできるだけ簡単な式で表せ．

(2) $\tan \dfrac{\Delta}{2}$ を $\cos a, \cos b, \cos c$ のできるだけ簡単な式で表せ．ただし，必要ならば (1) の V を用いても良い．

補足:

- 球面 S 上の異なる 2 点 P, Q に対し，平面 OPQ と S との交わりを P, Q を通る大円という．S 上で P, Q を結ぶ最短の曲線は P, Q を通る大円の短い方の弧 PQ であり，これを測地線 PQ という．
- 球面 S 上の 3 つの測地線 AB, BC, CA で囲まれた部分を球面三角形 ABC という．
- 球面三角形 ABC に対して，平面 OAB と平面 OAC のなす (2 面) 角の小さい方を球面三角形の A における角といい，A で表す．
- 球面 S における球面三角形 ABC の曲面積は $\Delta = A + B + C - \pi$ となることが知られている．

B 問題

問題 B-1　25pt

i は虚数単位とする．$\sqrt[i]{i}$ の値の 1 つは

$$1 < \sqrt[i]{i} < 100$$

を満たしている．その $\sqrt[i]{i}$ の値を小数第 1 位まで決定せよ．解答では決定の根拠を不等式を用いて論証すること．ただし，値の近似値に関しては必要ならば

$$2.718 < e < 2.719, \qquad 3.141 < \pi < 3.142$$

であることのみ用いてよい．

記号解説:

- i 乗根: $\sqrt[i]{i} = i^{\frac{1}{i}}$
- 複素べき関数: $z^\alpha = e^{\alpha(\log|z| + i\arg z)}$

$\boxed{\textbf{問題 B-2}}$ $\boxed{20 \sim 50\textbf{pt}}$

$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ は $x=0$ において右微分可能で $f(x) \geqq 0$ $(x \in [0,1])$ を満たす関数とする．このとき，**次の中から 1 つ選び**，その収束，発散を判定せよ．収束する場合には，極限値を求めよ．

【軽量級：20pt】 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

【重量級：35pt】 $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

【無差別級：50pt】 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n^2}\right) \right\}^n$$