第22回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 9 問（A 問題 7 問と B 問題 2 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1]2019 年 11 月 3 日 開催

A問題

問題 A-1　40pt

$$k = \sqrt[3]{\sin\frac{\pi}{14}} - \sqrt[3]{\sin\frac{3\pi}{14}} + \sqrt[3]{\sin\frac{5\pi}{14}}$$

とする．このとき，k の値をできるだけ簡単に表し，k^3 が 3 次の無理数であることを証明せよ．

　ただし，3 次の無理数とは，整数を係数とする 3 次方程式の解になるが，整数を係数とする 2 次以下の方程式の解にはならない実数のこととする．

$\boxed{\textbf{問題 A-2}}$ $\boxed{\text{35pt}}$

座標平面に △ABC がある．頂点 A，B，C における頂角をそれぞれ対応するイタリック文字 A，B，C で表し，$A = B > 60^\circ$ と仮定する．△ABC を含む正三角形で面積が最小のものの個数を，C $(0^\circ < C < 60^\circ)$ の値に応じて調べよ．ただし，三角形は周も含むものとする．

問題 A-3　30pt

p は 0 でない整数とする．漸化式

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+7)a_n + 3p - 9}{4a_n + 2n + 2p - 5} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{\text{問題 A-4}}$ $\boxed{\text{30pt}}$

自然数 n に対し，$m = n^2 + n + 1$ とする．m と互いに素な自然数 a が存在して，集合

$$\{a^i - a^j \mid i, j = 0, 1, \ldots, n,\ (i \neq j)\}$$

の各元を m で割った余りの集合が $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ になるとする．このとき，a^{n+1} を m で割った余りは 1 になることを証明せよ．

余談： 「2^{n+1} を $n^2 + n + 1$ で割った余りが $1 \cdots\cdots (*)$」を満たす自然数 n は有限個しかないと予想しています．正の偶数 n に対して，問題の仮定を満たす自然数 a が存在すれば，$(*)$ を導くことができます．問題の仮定を満たす n, a の組は現在のところ数例しか発見されていません．また問題の仮定を満たす a は存在しないけれども $(*)$ が成り立つ n の存在もわかっています．

問題 A-5 25pt

唐突ですが $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ の値はいくつでしょうか？もちろん $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$ とする計算で「正しい」答え $\frac{11}{15}$ が得られます．分母どうし・分子どうしをそれぞれ足し算して

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2+1}{5+3}=\frac{3}{8}$$

のように，いわゆる「**やってはいけない足し算**」では「正しい」答えは得られません．また,「0 で割る」こともやってはいけないことの 1 つとして挙げられます．つまり「やってはいけない割り算」で得られる “分数” $\frac{1}{0}$ が一例ですが，ここではこのような “分数” も許すことにします．今回はこの「やってはいけないシリーズ」を使った問題です．

辺の長さが等しい正三角形を図 1 のように並べます．左から k 番目にある正三角形を T_k と表します．

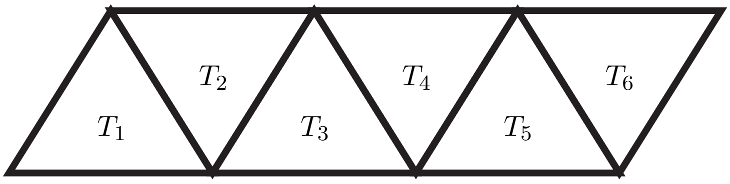

図 1 左から数えて奇数番目は「上向き」，偶数番目は「下向き」

次に，各正三角形 T_k を，頂点と対辺上の点を線分で結ぶことで分割することを考えます．ただし，k が奇数のときは上側の頂点と対辺上の点を，k が偶数のときは下側の頂点と対辺上の点を線分で結ぶことで分割します．図 2 がその一例です．

続いて，T_1 の左下の頂点に “分数” $\frac{1}{0}$ を，上の頂点に分数 $\frac{0}{1}$ を対応させます．ただし，T_1 の上の頂点と T_2 の左上の頂点は重なっているので，T_2 の左上の頂点にも分数 $\frac{0}{1}$ が対応しているとします．

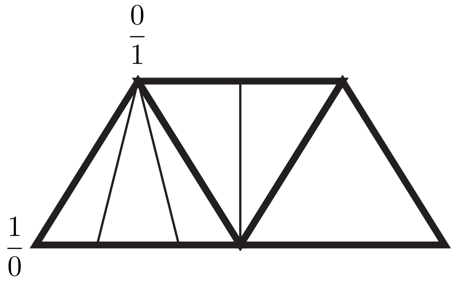

図 2 T_1 は 3 つに分割，T_2 は 2 つに分割，T_3 は 1 つに分割（つまり分割しない）の例

(次のページに続く．)

以降，三角形において，2 つの頂点に分数が対応したとき，残り 1 つの頂点に「やってはいけない足し算」を使って分数を対応させます．例えば，図 2 において T_1 は 3 つの三角形に分割されていますが，一番左の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{0}+\frac{0}{1}=\frac{1+0}{0+1}=\frac{1}{1}$$

を対応させ，2 つ目の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{1}+\frac{0}{1}=\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

を対応させ，3 つ目の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{2}+\frac{0}{1}=\frac{1+0}{2+1}=\frac{1}{3}$$

を対応させる，という具合です．この操作を続けると，図 3 のように，頂点に分数が対応した，分割された正三角形の列が得られます．この例では T_3 の右端に分数 $\dfrac{3}{10}$ が対応しています．

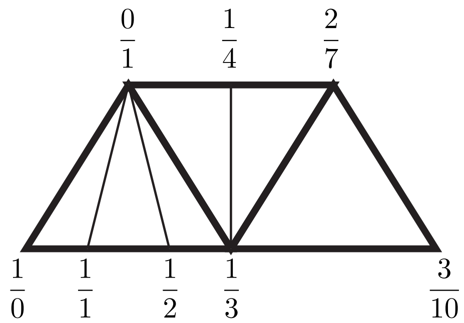

図 3　頂点に分数が対応した，分割された正三角形の列の例

問． T_n の右端の頂点に分数 $\dfrac{1103}{2019}$ が対応するような，分割された正三角形の列はあるか？あるなら実例を見つけよ．ないならその理由を述べよ．

問題 A-6 35pt

n を自然数とする．n 次多項式 $f(x)$ は $k=1,2,\ldots\ldots,n+1$ に対して

$$f(k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{i}=\frac{0}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\cdots+\frac{k-1}{k}$$

を満たす．このとき，$f(x)$ を求め，さらに x^n と x^{n-1} の係数を明示せよ．ただし,「求める」の意味は各自で考えよ．

問題 A-7　45pt

数列 $\{a_n\}$ は次の 3 つの条件を満たすとする：

- $-1 \leqq a_n \leqq 1 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$
- $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ に対して，数列 $\{M_n\}$ は α に収束する．
- $V_n = \dfrac{(a_1 - M_n)^2 + (a_2 - M_n)^2 + \cdots + (a_n - M_n)^2}{n}$ に対して，数列 $\{V_n\}$ は 0 に収束する．

区間 $I = (-2, 2)$ 上の関数 $f(x)$ は I 上で微分可能で，$f'(x)$ は I 上で連続であるとする．N を自然数とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^N} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) k^{N-1}$$

の収束，発散を判定せよ．収束する場合には，極限値を求めよ．

B問題

問題 B-1　25pt

$t \geqq 0$ とします．次の極限が存在することを証明し，その極限値を求めてください．

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t\right\}$$

この問題では，複数の証明を行った解答にはボーナスポイントが与えられます．

$\boxed{\textbf{問題 B-2}}$ $\boxed{30\text{pt}}$

複素数係数の 2 変数多項式 $f(x,y)$ と，実数を成分とする行列 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$f^{\sigma}(x,y) = f(ax+by, cx+dy)$$

と定める．また，実数 $q > 0$ に対して行列 σ_q を

$$\sigma_q = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 & q-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義する．例えば，次のような興味深い変換法則をもつ多項式が存在する：

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x^4 + 8xy^3 & \text{とすると} & f^{\sigma_3}(x,y) = f(x,y), \\ f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 & \text{とすると} & f^{\sigma_2}(x,y) = -f(x,y), \\ f(x,y) = x^3 - 9xy^2 & \text{とすると} & f^{\sigma_4}(x,y) = -f(x,y),\ \text{等々}. \end{array}$$

(1) ω を複素数とし，$\omega \neq \pm 1$ とする．このとき，

$$f^{\sigma_q}(x,y) = \omega f(x,y)$$

となる多項式 $f(x,y)$ $(\neq 0)$ および q, ω の組が存在すれば，1 組求めよ．存在しないならその理由を述べよ．

(2) $\tau = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$f^{\sigma_2}(x,y) = f(x,y) \quad \text{かつ} \quad f^{\tau}(x,y) = f(x,y)$$

を満たす 8 次の斉次多項式，つまり $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} a_i x^{8-i} y^i$ の形の式をすべて求めよ．答はできるだけ見やすい形にすること．