第19回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．但し，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権と見なします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問（A 問題 6 問と B 問題 2 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電卓・コンピュータ・スマートフォン等の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1]2016 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1　35pt

曲線 $y = x^2$ 上の異なる 3 点 $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$, $\mathrm{C}(c, c^2)$ を考える．三角形 ABC が正三角形となるように $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ が曲線 $y = x^2$ 上を動くとき，三角形 ABC の重心 P の軌跡を求めよ．

問題 A-2 25pt

空間内の絡まった輪っかのことを**結び目**といいます. 結び目を構成するひもは伸縮自在で切れることはないと仮定します. 2 つの結び目に対して, 片方を他方に「あやとりの要領」で変形できるとき, それら 2 つの結び目は同じものとみなします. この変形では, ひもを伸ばしたり縮めたりする操作も行ってよいものとします. 例えば, 図 1 のように変形すると, 両端の 2 つの結び目は同じものであることが分かります.

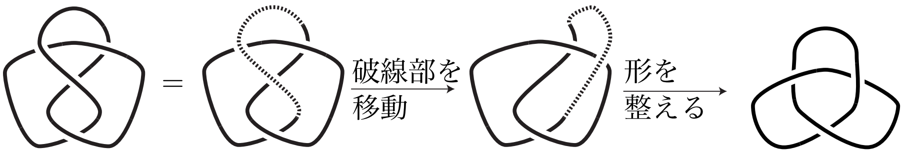


図 1: 結び目の変形

結び目は空間内の図形ですが, 図 1 のように平面内の絵で表せます. ひもが重なる点を**交差点**といいます. ただし, 図 2 のように重なる点は現れないとします. また, 交差点では下を通るひもを "切って" 表すことにしますが, 実際にひもが切れているわけではありません. このように結び目を平面に表したものを**図式**といいます. 図式に沿って進むと, 交差点を「上, 下, 上, 下, 上, 下, $\cdots$」のように上と下を交互に通るとき, その図式を**交代図式**といいます. 例えば, 図 1 の右端は交代図式ですが, 左端は交代図式ではありません. このように, 同じ結び目を表す図式でも, 交代であったりそうでなかったりします. すると, どんな結び目でも交代図式で表すことができるか? ということが気になりますが, 答えは NO であることが知られています. 例えば, 図 3 の結び目は交代図式で表せないことが知られています. しかし, **交差交換とよばれる図 4 のような操作を 1 回だけ**行えば, 交代図式で表すことができます. 例えば, 図 3 の結び目は $*$ のついた交差点で交差交換を行えばスルスルとほどけ, ほどけた結び目は交代図式で表すことができます.

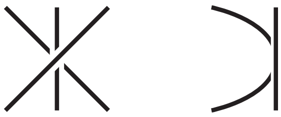


図 2: 3 重以上に重なるもの, 横断的でないもの

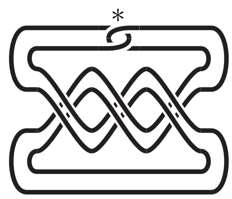


図 3: 交代図式で表せない結び目

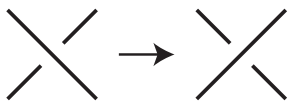
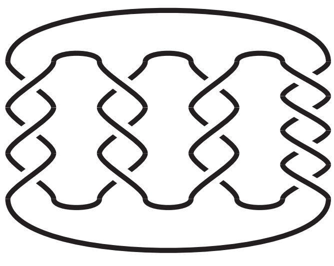


図 4: 交差交換

問. 次の図式で表される結び目を, 交差交換を 1 回だけ行うことで, 交代図式で表してください. 解答は変形の過程が分かるように, 図 1 を参考にして描いてください. 絵の見易さも採点基準に含まれます. もちろん, この図式のままで交差交換を行っても望むものは得られません. うまく結び目を (図式を) 変形して, ここぞというときに 1 度だけ交差交換を行ってください.



問題 A-3　35pt

1辺の長さが 1 である正 n 角形 K を考える．K の周上に点 P をとると，P を頂点にもち K に内接する (K の各辺上に頂点をもつ) 正 n 角形 K_{P} がただ一つ存在する．P が K の周上を1周するとき，K_{P} の周が通過してできる図形の面積を S_n とする．

(1) S_6 の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 A-4}}$ $\boxed{30\text{pt}}$

x, y, z を座標とする空間において，yz 平面，zx 平面，xy 平面上にそれぞれ点 $\mathrm{A}(0, b, c)$，$\mathrm{B}(a, 0, c)$，$\mathrm{C}(a, b, 0)$ $(a, b, c > 0)$ をとる．三角形 ABC を yz 平面，zx 平面，xy 平面に垂直に射影したときの影をそれぞれ S_{yz}，S_{zx}，S_{xy} とする．yz 平面，zx 平面，xy 平面に垂直に射影したときの影がそれぞれ S_{yz}，S_{zx}，S_{xy} に属するような空間の点全体がなす立体図形を U とする．

このとき，U の形状を具体的に説明せよ．また，U を三角形 ABC を含む平面で切って 2 つの立体に分けたとき，それらの体積比を求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 A-5}}$ $\boxed{\text{25pt}}$

関数 $P_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$P_1(x) = x\,, \qquad P_{n+1}(x) = \sqrt{x^2+1}\,P_n(x) + x\sqrt{P_n(x)^2+1}$$

で定める．このとき，次の (1), (2) が成り立つことを証明せよ．

(1) n が奇数であるとき，$P_n(x)$ は x の多項式である．

(2) n が偶数であるとき，$\dfrac{P_n(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ は x の多項式である．

$\boxed{\textbf{問題 A-6}}$ $\boxed{45\text{pt}}$

n を自然数とする．以下のすべての条件を満たす自然数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$ の個数を求めよ．

- $n \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 1$
- $n \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq 1$
- $a_1 \geqq b_1,\ a_2 \geqq b_2,\ \dots,\ a_n \geqq b_n$
- $a_1 \neq 1,\ a_2 \neq 2,\ \dots,\ a_n \neq n$
- $b_1 \neq 1,\ b_2 \neq 2,\ \dots,\ b_n \neq n$

B問題

問題 B-1　40pt

次の無限級数で定まる関数を考える：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^3}\, x^n$$

$x \geqq 0$ のとき

$$f(x) \leqq \exp\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)$$

が成り立つことを証明せよ．必要があれば次の不等式を用いてもよい：

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \leqq n! \leqq \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \left(1 + \frac{1}{6n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

問題 B-2 25pt

n を自然数とし，i を虚数単位とする．

$$\xi_k = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi \quad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

とおく．$P(x)$ を高々 $n-1$ 次の多項式とする．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P(\xi_k)}{(1-\xi_k)^2} = nP(0) + \frac{n}{2}P'(1) - \frac{n(n+2)}{4}P(1)$$

この問題では，複数の証明を行った解答にはボーナスポイントが与えられる．