第23回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

答案作成場所はどこでも自由，Zoom も入退室自由とします．解答は pdf ファイル，写真ファイル等の電子ファイルをメールに添付して提出する形式となります．

合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず答案に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 4 問あります．この中から，**合計 2 問**を選択して解答してください．3 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- **すべての答案ファイル**の最上部に，次の情報を必ず記入してください（答案が複数枚あって別ファイルで提出する際には，すべての答案に記入してください）：

  □ 問題番号　　□ 参加者 ID　　□ 氏名（グループエントリーの場合はグループ名）

- 答案には，問題ごとにページ番号を右上部に記入してください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- Zoom に接続，解答をスキャン/撮影して提出，タブレットのノートアプリ等での答案作成，以外の目的での電子機器使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- グループエントリーでの相談は，Zoom のブレイクアウトルームをご利用ください．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2021 年 11 月 3 日 開催

問題 1　20pt

x は実数または複素数とします．$|x| \neq 1$ のとき，次の無限級数が収束することを証明し，その和をなるべく簡単な形で求めてください．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$$

この問題では，複数の証明を行った解答にはボーナスポイントが与えられます．

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ $\boxed{35\text{pt}}$

A を 1 以上 100 以下の整数の集合とする．A を異なる 2 つの要素から成る 50 個の部分集合に分ける：

$$A = \{a_1, b_1\} \cup \{a_2, b_2\} \cup \cdots \cup \{a_{50}, b_{50}\}$$

(1) $\{a_i, b_i\}$ の要素の和を掛け合わせた値

$$\prod_{i=1}^{50}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\cdots(a_{50} + b_{50})$$

の最大値を求めよ．

(2) $\{a_i, b_i\}$ の要素の積を足し合わせた値

$$\sum_{i=1}^{50} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{50} b_{50}$$

の最小値を求めよ．

(3) $\{a_i, b_i\}, \{a_j, b_j\}$ $(i < j)$ それぞれの要素の和の積を足し合わせた値

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq 50} (a_i + b_i)(a_j + b_j) = \sum_{i=1}^{49} \sum_{j=i+1}^{50} (a_i + b_i)(a_j + b_j)$$

の最大値を求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ $\boxed{30\text{pt}}$

n を 5 以上の自然数とする．1 辺の長さが 1 の正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ があり，その中心を O とする．直線 $\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k$ と直線 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の交点を P_k とし，三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{A}_k$ の外接円 (の周および内部) を B_k とする $(k=1,2,\ldots,n)$．ただし，$\mathrm{A}_0=\mathrm{A}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_{n+2}=\mathrm{A}_2$ とする．2 つ以上の B_k $(k=1,2,\ldots,n)$ に属する点全体の集合の面積を S_n とする．

(1) $n=5$ のとき，正 5 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$ および B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 を定規とコンパスを用いて作図せよ．ただし，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ は描きやすい長さとしてよい．

(2) S_5 の値を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ の値を求めよ．

（ポイントは低くなるが，(1), (2) は $n=6$ のときを考えてもよい．）

問題 4 40pt

p と q は異なる奇素数とします. 整数の対 $(a,b),(c,d)$ に対し，条件 (i) または (ii) を満たすとき $(a,b)\sim(c,d)$ で表します.

(i) $a\equiv c \pmod p$ かつ $b\equiv d \pmod q$

(ii) $a\equiv -c \pmod p$ かつ $b\equiv -d \pmod q$

1 以上 かつ $\dfrac{pq}{2}$ 以下で pq と互いに素となるすべての整数の積を K とするとき

$$\left(((p-1)!)^{\frac{q-1}{2}},\left(\frac{q-1}{2}!\right)^{p-1}\right)\sim(K,K)$$

が成立することを証明してください.