数学コンテスト＊ブレイク　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

問題は合計 10 問（A 問題 7 問，B 問題 3 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です.「第 X 回」は出題された数学コンテストの開催回を表します．問題番号横の「Y pt」は正解に与えられるポイントです．今回採点はありませんので，これは問題の難易度の目安と考えてください．この中から問題を自由に選択し，じっくり問題に向き合いましょう．

通常の数学コンテストでは 3 問を 5 時間かけて解答します．時間を計って通常の数学コンテストの雰囲気を味わうも良し！時間を計らず数学コンテスト・ブレイクならではの楽しみ方をするも良し！

数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1]2020 年 10 月 27 日〜11 月 17 日 開催

A 問題

問題 A-3 35pt

数列 $\{f_n\}$ は条件

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ (n \geqq 1)$$

で定まるものとする (この数列をフィボナッチ数列という).

(1) 素数 p, 自然数 N に対して

$$F_p(N) = \{\, n \mid n \text{ は } N \text{ 以下の自然数},\ f_n \text{ は } p \text{ で割り切れる} \,\}$$

とし，$F_p(N)$ に含まれる自然数の個数を $\#F_p(N)$ で表す．任意の素数 p に対して，極限値

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#F_p(N)}{N}$$

が存在し，正である (0 でない) ことを証明せよ．

(2) (1) で存在が示された極限値を ΔF_p で表す． $\Delta F_{17}, \Delta F_{19}$ を求めよ．

注． 上の極限値は，フィボナッチ数全体のうち，与えられた素数 p で割り切れるものがどのくらいあるか，言わばその「割合」を数学的に定式化したものである．

問題 A-2 　25pt

空間内の絡まった輪っかのことを**結び目**といいます. 結び目を構成するひもは伸縮自在で切れることはないと仮定します. 2つの結び目に対して, 片方を他方に「あやとりの要領」で変形できるとき, それら2つの結び目は同じものとみなします. この変形では, ひもを伸ばしたり縮めたりする操作も行ってよいものとします. 例えば, 図1のように変形すると, 両端の2つの結び目は同じものであることが分かります.

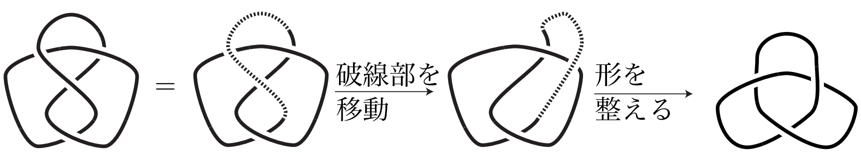


図 1: 結び目の変形

結び目は空間内の図形ですが, 図1のように平面内の絵で表せます. ひもが重なる点を**交差点**といいます. ただし, 図2のように重なる点は現れないとします. また, 交差点では下を通るひもを “切って” 表すことにしますが, 実際にひもが切れているわけではありません. このように結び目を平面に表したものを**図式**といいます. 図式に沿って進むと, 交差点を「上, 下, 上, 下, 上, 下, $\cdots$」のように上と下を交互に通るとき, その図式を**交代図式**といいます. 例えば, 図1の右端は交代図式ですが, 左端は交代図式ではありません. このように, 同じ結び目を表す図式でも, 交代であったりそうでなかったりします. すると, どんな結び目でも交代図式で表すことができるか? ということが気になりますが, 答えはNOであることが知られています. 例えば, 図3の結び目は交代図式で表せないことが知られています. しかし, **交差交換とよばれる図4のような操作を1回だけ**行えば, 交代図式で表すことができます. 例えば, 図3の結び目は $*$ のついた交差点で交差交換を行えばスルスルとほどけ, ほどけた結び目は交代図式で表すことができます.

図 2: 3重以上に重なるもの, 横断的でないもの

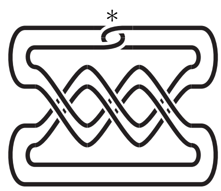


図 3: 交代図式で表せない結び目

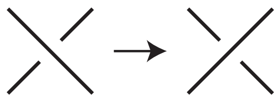
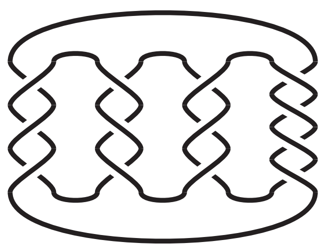


図 4: 交差交換

問. 次の図式で表される結び目を, 交差交換を1回だけ行うことで, 交代図式で表してください. 解答は変形の過程が分かるように, 図1を参考にして描いてください. 絵の見易さも採点基準に含まれます. もちろん, この図式のままで交差交換を行っても望むものは得られません. うまく結び目を (図式を) 変形して, ここぞというときに1度だけ交差交換を行ってください.



$\boxed{\textbf{問題 A-3}}$ $\boxed{35\text{pt}}$

1辺の長さが1である正 n 角形 K を考える．K の周上に点 P をとると，P を頂点にもち K に内接する (K の各辺上に頂点をもつ) 正 n 角形 K_{P} がただ一つ存在する．P が K の周上を1周するとき，K_{P} の周が通過してできる図形の面積を S_n とする．

(1) S_6 の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

問題 A-2　30pt

図 1 のように線でつながった 7 つの数がある．

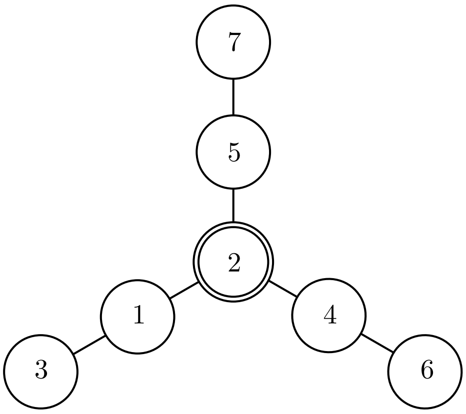
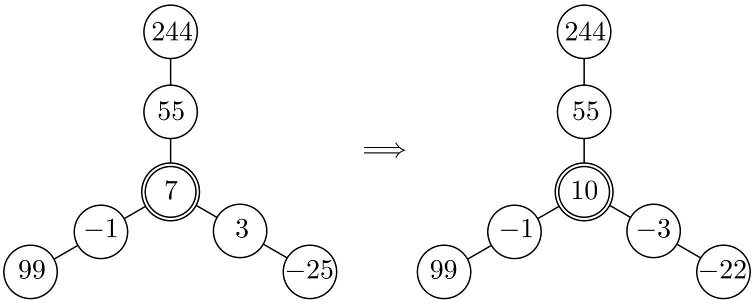


図 1

このような線でつながった一般の 7 つの数に対して，次の操作を考える：

(操作) 7 箇所から 1 つ選びそこにある数を A とする．A と線で直接つながったすべての数に A を加え，A を $-A$ に変える．A と線で直接つながっていない数は変えない．

例：A として 3 を選んだ場合の操作



問題 図 1 から始めてこの操作を繰り返し行うことで，中央の数 (◎の中の数) を 2018 にすることは可能か？　理由をつけて答えよ．

問題 A-1 40**pt**

$$k = \sqrt[3]{\sin\frac{\pi}{14}} - \sqrt[3]{\sin\frac{3\pi}{14}} + \sqrt[3]{\sin\frac{5\pi}{14}}$$

とする．このとき，k の値をできるだけ簡単に表し，k^3 が 3 次の無理数であることを証明せよ．

ただし，3 次の無理数とは，整数を係数とする 3 次方程式の解になるが，整数を係数とする 2 次以下の方程式の解にはならない実数のこととする．

問題 A-5 25pt

唐突ですが $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}$ の値はいくつでしょうか？もちろん $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{6}{15}+\dfrac{5}{15}=\dfrac{11}{15}$ とする計算で「正しい」答え $\dfrac{11}{15}$ が得られます．分母どうし・分子どうしをそれぞれ足し算して

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2+1}{5+3}=\frac{3}{8}$$

のように，いわゆる「**やってはいけない足し算**」では「正しい」答えは得られません．また,「0 で割る」こともやってはいけないことの 1 つとして挙げられます．つまり「やってはいけない割り算」で得られる “分数” $\dfrac{1}{0}$ が一例ですが，ここではこのような “分数” も許すことにします．今回はこの「やってはいけないシリーズ」を使った問題です．

辺の長さが等しい正三角形を図 1 のように並べます．左から k 番目にある正三角形を T_k と表します．

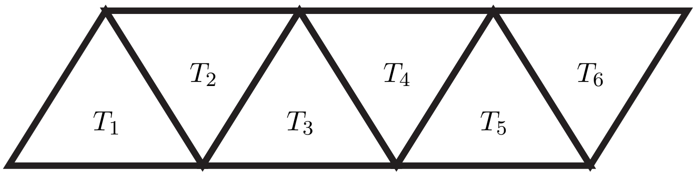


図 1 左から数えて奇数番目は「上向き」，偶数番目は「下向き」

次に，各正三角形 T_k を，頂点と対辺上の点を線分で結ぶことで分割することを考えます．ただし，k が奇数のときは上側の頂点と対辺上の点を，k が偶数のときは下側の頂点と対辺上の点を線分で結ぶことで分割します．図 2 がその一例です．

続いて，T_1 の左下の頂点に “分数” $\dfrac{1}{0}$ を，上の頂点に分数 $\dfrac{0}{1}$ を対応させます．ただし，T_1 の上の頂点と T_2 の左上の頂点は重なっているので，T_2 の左上の頂点にも分数 $\dfrac{0}{1}$ が対応しているとします．

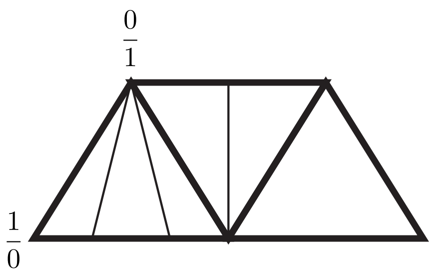


図 2 T_1 は 3 つに分割，T_2 は 2 つに分割，T_3 は 1 つに分割（つまり分割しない）の例

(次のページに続く．)

以降，三角形において，2 つの頂点に分数が対応したとき，残り 1 つの頂点に「やってはいけない足し算」を使って分数を対応させます．例えば，図 2 において T_1 は 3 つの三角形に分割されていますが，一番左の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{0}+\frac{0}{1}=\frac{1+0}{0+1}=\frac{1}{1}$$

を対応させ，2 つ目の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{1}+\frac{0}{1}=\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

を対応させ，3 つ目の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{2}+\frac{0}{1}=\frac{1+0}{2+1}=\frac{1}{3}$$

を対応させる，という具合です．この操作を続けると，図 3 のように，頂点に分数が対応した，分割された正三角形の列が得られます．この例では T_3 の右端に分数 $\dfrac{3}{10}$ が対応しています．

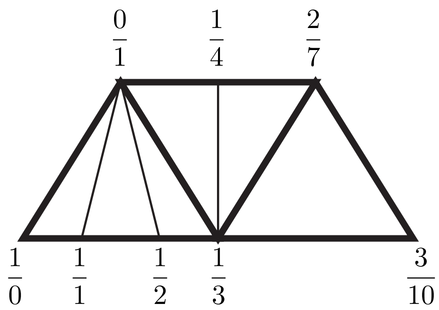


図 3　頂点に分数が対応した，分割された正三角形の列の例

問. T_n の右端の頂点に分数 $\dfrac{1103}{2019}$ が対応するような，分割された正三角形の列はあるか？あるなら実例を見つけよ．ないならその理由を述べよ．

問題 A-7 45pt

数列 $\{a_n\}$ は次の 3 つの条件を満たすとする：

- $-1 \leqq a_n \leqq 1 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$
- $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ に対して，数列 $\{M_n\}$ は α に収束する．
- $V_n = \dfrac{(a_1 - M_n)^2 + (a_2 - M_n)^2 + \cdots + (a_n - M_n)^2}{n}$ に対して，数列 $\{V_n\}$ は 0 に収束する．

区間 $I = (-2, 2)$ 上の関数 $f(x)$ は I 上で微分可能で，$f'(x)$ は I 上で連続であるとする．N を自然数とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^N} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) k^{N-1}$$

の収束，発散を判定せよ．収束する場合には，極限値を求めよ．

B問題

問題 B-1 45 pt

一般項が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めて下さい.

$$a_n = \sqrt{4+\sqrt{4+3\sqrt{4+5\sqrt{4+7\sqrt{\cdots\sqrt{4+(2n-1)\sqrt{4+(2n+1)}}}}}}}$$

念のため，初めの 2 項を書くと

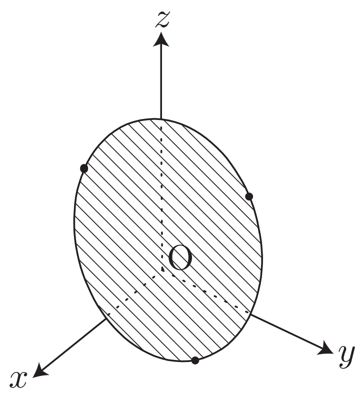
$$a_1 = \sqrt{4+\sqrt{4+3}}$$
$$a_2 = \sqrt{4+\sqrt{4+3\sqrt{4+5}}}$$

となります.

問題 B-1 50pt

2つの壁と床が互いに直交している部屋の隅（すみ）に半径1の円盤を立てかけて静止させる．ただし円盤はその2つの壁と床のそれぞれにただ1点ずつで接触しているものとし，厚さは無視する．また部屋は十分広くて円盤が他の壁に接触することはない．

図のように，部屋の隅を原点Oとし，壁と床を座標面，すべての座標が正である領域を室内とする座標系を定める．円盤に垂直なベクトルを円盤の法線ベクトルということにしよう．話を単純化するために，すべての成分が正となる法線ベクトルを持つ円盤だけを考える．このとき円盤の中心 (α, β, γ) の存在範囲を求めて図示せよ．



問題 B-3 30pt

α, β を 0 でない複素数，m, n を 0 でない整数とする．集合

$$A = \{(\log|z|, \log|w|) \in \mathbb{R}^2 \mid z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \alpha z^m + \beta w^n = 1\}$$

を図示し，その面積を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を用いてもよい．