第26回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．ただし，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権とみなします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 7 問（A 問題 5 問と B 問題 2 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の答案を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 答案は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電子機器 (電卓・コンピュータ・スマートフォン等) の使用は禁止します．
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1]2024 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1　25pt

m を整数とし，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + m\,a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

このとき，3 以上の素数 p に対して，a_p を p で割った余りを求めよ．

$\boxed{\textbf{問題 A-2}}$ $\boxed{\textbf{30pt}}$

n を自然数とする．次の和をそれぞれ求めよ．

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} {}_{2k+1}\mathrm{C}_k \cdot {}_{2n-2k+1}\mathrm{C}_{n-k}, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} {}_{2k}\mathrm{C}_k \cdot {}_{2n-2k+2}\mathrm{C}_{n-k}$$

ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は二項係数とする．

問題 A-3　40pt

次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{n}\left[\frac{2\ell+1}{2n+1}+\frac{1}{2m+1}\right]$$

ただし, 実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

$\boxed{\textbf{問題 A-4}}$ $\boxed{\text{25pt}}$

xyz 空間内で 3 直線

$$L_1 : \ y = z = 0, \quad L_2 : \ x = 0, \ y = 1, \quad L_3 : \ x = z = 1$$

を考える．

(1) 次の条件を満たす 1 次以上の多項式 $f(x, y, z)$ のうち，最も次数が小さいものを求めよ：
「L_1, L_2, L_3 のすべてと交わる直線上の点 (x, y, z) は，どれも関係式 $f(x, y, z) = 0$ を満たす.」

(2) (1) の多項式 $f(x, y, z)$ を用いて $f(x, y, z) = 0$ で表される図形を S とする．直線 L は S に含まれ，y 軸 $(x = z = 0)$ ではないとする．L が L_1, L_2 の両方と交わるとき，L は L_3 とも交わることを示せ．

問題 A-5　35pt

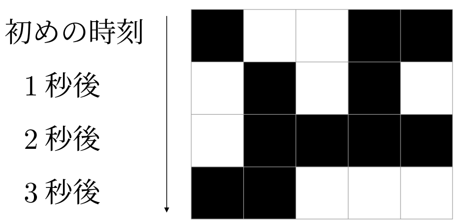
横 1 列に並んだ L 個のマス目があり，各マス目には 0 か 1 のいずれかの数が 1 つずつ入っています．このマス目に入った数の列を，1 秒毎に次の表に従って変化させていきます．

現在の $\ell-1$, ℓ, $\ell+1$ 番目のマス目の数	111	110	101	100	011	010	001	000
1 秒後の ℓ 番目のマス目の数	0	0	1	1	1	1	0	0

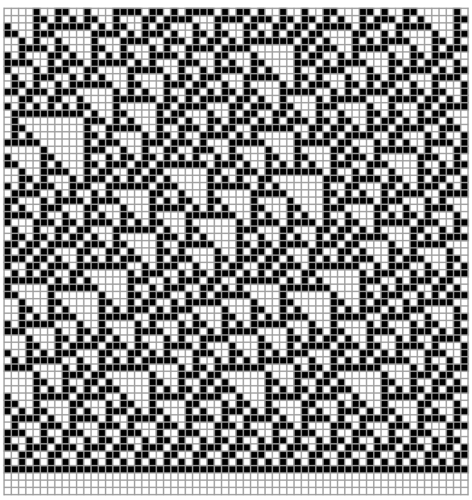
ただし，$\ell=1$ のとき $\ell-1$ は L に，$\ell=L$ のとき $\ell+1$ は 1 にそれぞれ読み替えてください．これは，一番左のマス目の左隣に一番右のマス目が，一番右のマス目の右隣に一番左のマス目があるとみなすことと同じです．

具体例をいくつか紹介します．ある時刻において左から 1, 2, 3, 4 番目のマス目にそれぞれ 1, 0, 1, 0 が入っている場合，左から 2 番目のマス目に入っている数は 1 秒後に 0 から 1 に変わり，左から 3 番目のマス目に入っている数は 1 秒後も 1 のまま変化しません．また，ある時刻において左から L, 1, 2 番目のマス目にそれぞれ 1, 1, 0 が入っている場合，一番左のマス目に入っている数は 1 秒後に 1 から 0 に変わります．

次の図は $L=5$ とし，初めの時刻における数の列を 1, 0, 0, 1, 1 と与えた例です．ここで黒いマス目は 1 を，白いマス目は 0 をそれぞれ表します．



次の図は $L=64$ とし，初めの時刻における数の列を適当に与えて時間変化させたものです．



では問題です．$L=2^n$ $(n=2,3,4,\cdots)$ としたとき，初めの時刻における数の列をどのように与えても，ある時刻において全てのマス目に 0 が入ることを示してください．

B問題

問題 B-1　30pt

m を整数とします．実数 x を変数とする多項式 $f(x)$ に対して，関数の列 $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x), \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{x^m}{n+1} f_n'(x) \end{cases}$$

により定義します．ただし，$f_n'(x)$ は $f_n(x)$ の導関数です．

このとき，無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

は，x に対して適当な条件をおくと収束することを証明し，その条件を明示的に与えてください．また，その条件の下に，この級数の和をなるべく簡単な形で求めてください．

$\boxed{\textbf{問題 B-2}}$ $\boxed{35\textbf{pt}}$

a, b, c は

$$a \geqq b \geqq c > 0, \quad \sqrt{b^2 + c^2} > a$$

を満たす実数とします．空間内に，下の図のように 3 辺の長さが a, b, c の三角形 8 枚を貼り合わせてできる凸な八面体 X があり，X を平面に正射影してできる図形 (投影図) の面積 S を考えます．空間内のすべての平面を考えるとき，S の最大値と最小値を求めてください．

ただし，X の平面への正射影とは，X の各点 P からその平面に垂線 PH を下ろすとき，H の全体のなす集合のことです．