

第27回 数学コンテスト 問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催¹

解答作成場所はどこでも自由です。ただし、15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください。遅刻者は棄権とみなします。合計ポイントの高い者から順位をつけ、優秀者を表彰し賞品を贈呈します。グループによる解答は、解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください。その際、合計ポイント x に対して、解答に携わった人数を n 人とするグループの得点は、

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります。

問題は合計 8 問（A 問題 6 問と B 問題 2 問）あります。A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題、B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です。この中から、**合計 3 問**を選択して解答してください。4 問以上の答案を提出した場合は、失格となる恐れがあります。問題番号の横に、正解に与えられるポイントが書かれていますが、選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**。また、出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば、採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて、解答に臨んでください。

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し、2 問を同じ用紙に書かないようにしてください。
- すべての解答用紙に名前を書いてください。
- 答案は、答えのみではなく、思考の手順がたどれる形で書いてください。
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります。
- 電子機器（電卓・コンピュータ・スマートフォン等）の使用は禁止します。
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません。
- 提出された解答用紙は返却しません。

それでは、数学を愛する者のフェアプレイ精神で、
果敢に挑んでください。

GOOD LUCK !!

¹2025 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1

25pt

$\alpha = \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}+11}{2}}$ とする. $m \leq 100\alpha < m+1$ を満たす自然数 m の値を求めよ. また, $\alpha^n < 44$ を満たす最大の自然数 n の値を求めよ.

問題 A-2**30pt**

3つの数からなる集合を考える．ただし，3つの数には重複があってもよい．この集合に対して，次の「操作」を考える．

「操作」：3つの数のうち1つを選び，その数を，選ばなかった残りの2つの数の和から選んだ数を引いた数に入れ替えて，新しい3つの数からなる集合をつくる．

3つの数から1つを選ぶ方法は3通りあるため，「操作」も3通りあることに注意せよ．例えば，3つの数からなる集合 $\{-4, 11, 3\}$ に対し，

- -4 を選ぶと， $11 + 3 - (-4) = 18$ なので $\{18, 11, 3\}$ が得られ，
- 11 を選ぶと， $-4 + 3 - 11 = -12$ なので $\{-4, -12, 3\}$ が得られ，
- 3 を選ぶと， $-4 + 11 - 3 = 4$ なので $\{-4, 11, 4\}$ が得られる．

このとき，次の問に答えよ．

- (1) $\{3, 4, 8\}$ から「操作」を繰り返し， $a + b + c = 113$ を満たす3つの数の集合 $\{a, b, c\}$ をつくれるか．
- (2) x, y, z を整数とする． $\{x, y, z\}$ から「操作」を繰り返し， $\{x + 1, y, z\}$ と変形できるような $\{x, y, z\}$ をすべて求めよ．

問題 A-3**30pt**

実数 a, b, c が $-1 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1, -1 \leq c \leq 1$ を満たしながら動くとき、座標空間において点 $(a + b + c, ab + bc + ca, abc)$ の動く範囲の体積を求めよ.

問題 A-4**35pt**

n を自然数とする．次の和の値を求めよ．

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{\left(\tan \frac{4k+3}{8n}\pi\right)^3}$$

問題 A-5**40pt**

次の和の値を求めよ.

$$\sum_{k=0}^{2024} (-1)^k \left({}_{2025 \times 3 + 1 - 2k} C_{2025 - k} \times {}_{2025 \times 2 + 1 - k} C_k - {}_{2025 \times 3 - 2k} C_{2024 - k} \times {}_{2025 \times 2 - k} C_k \right)$$

ただし, ${}_m C_k$ は二項係数とする.

問題 A-6

40pt

$a > 1$ とし, n を自然数とする. 座標平面において, 楕円 $x^2 + a^2 y^2 \leq a^2$ を原点を中心として $\frac{k}{n}\pi$ だけ回転させた図形を A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) とする. 1つ以上の A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) に属する点全体の集合の面積を V_n とし, 2つ以上の A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) に属する点全体の集合の面積を W_n とする. このとき, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(V_n - W_n)$$

の値を求めよ.

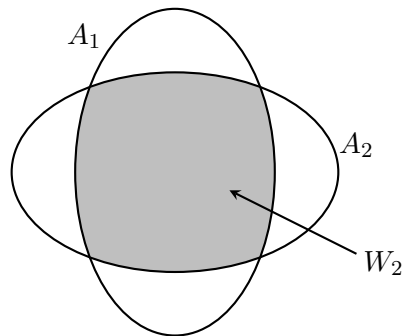


図 1: $n = 2$ の場合

B 問題

問題 B-1

50pt

次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t} dt$$

必要ならば, オイラーの定数

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

および, ガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ についてのスターリングの公式

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi x} x^{x-1/2} e^{-x}} = 1$$

を用いてもよい.

問題 B-2**35pt**

8次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^8$ の4つのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

$$\mathbf{a}_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

$$\mathbf{a}_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$$

$$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$$

で定め、この4つのベクトルの整数係数一次結合からなる $\mathbb{R}^8$ の部分集合を

$$M = \{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}$$

とします。また、 $\mathbb{R}^8$ の4つのベクトル $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$ であって、次の2つの条件を満たすものを考えます。

(C1) $i = 1, 2, \dots, 8$ に対し、 i 行目が $\mathbf{a}_i$ で与えられる8次正方行列の行列式は16である。

(C2) 各 $i = 5, 6, 7, 8$ に対し $\mathbf{a}'_i \equiv \mathbf{a}_i \pmod{2}$ を満たす $\mathbf{a}'_i \in M$ が存在する。

ただし、各成分が整数であるような $\mathbb{R}^8$ の2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、ベクトル $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ の各成分が2で割り切れるとき、 $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{2}$ と記述します。

さて、上で定めた8つのベクトルを使って

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_8$$

とおきます。ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_8$ の整数係数一次結合からなる $\mathbb{R}^8$ の部分集合を

$$L = \{x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_8\mathbf{e}_8 \mid x_1, x_2, \dots, x_8 \in \mathbb{Z}\}$$

とし、

$$L^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^8 \mid \text{任意の } \mathbf{y} \in L \text{ に対して } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}\}$$

とします。ここで、 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のユークリッド内積です。このとき、

$$L = L^*$$

が成立することを証明してください。