第28回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催[1]

解答作成場所はどこでも自由です．ただし，15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください．遅刻者は棄権とみなします．合計ポイントの高い者から順位をつけ，優秀者を表彰し賞品を贈呈します．グループによる解答は，解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください．その際，合計ポイント x に対して，解答に携わった人数を n 人とするとグループの得点は，

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります．

問題は合計 8 問（A 問題 7 問と B 問題 1 問）あります．A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題，B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です．この中から，**合計 3 問**を選択して解答してください．4 問以上の解答を提出した場合は，失格となる恐れがあります．問題番号の横に，正解に与えられるポイントが書かれていますが，選択した 3 問の**合計ポイントが 100pt を上回っても構いません**．また，出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば，採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて，解答に臨んでください．

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し，2 問を同じ用紙に書かないようにしてください．
- すべての解答用紙に名前を書いてください．
- 解答は，答えのみではなく，思考の手順がたどれる形で書いてください．解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります．
- 電子機器 (電卓・コンピュータ・スマートフォン等) の使用は禁止します．特に，生成 AI（ChatGPT，Gemini，Claude，Copilot 等．AI を用いた数式解答アプリ・写真解答アプリを含みます）の使用は一切認めません．問題文やその一部，関連する部分問題を入力して利用することはもちろん，他の人に依頼して利用してもらうことも含みます．
- グループエントリーでない場合は，参加者に限らず他の人に相談してはいけません．
- 提出された解答用紙は返却しません．

このコンテストは参加者の皆さんへの信頼を前提にして成り立っています．数学を考える楽しさを分かち合える場を一緒に作っていきましょう．

それでは，数学を愛する者のフェアプレイ精神で，
果敢に挑んでください．

GOOD LUCK !!

[1] 2026 年 11 月 3 日 開催

A問題

問題 A-1　25pt

定積分

$$\int_0^{\pi} (1-\sin x)^{2025}\{\cos(2027x)+\sin(2027x)\}dx$$

の値を求めよ。

問題 A-2　25pt

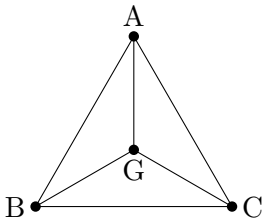
$0 < s < 1$，$0 < t < 1$ とする。面積が 1 の △ABC の辺 AB, BC, CA を $s : 1 - s$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とし，$t : 1 - t$ の比に内分する点をそれぞれ G, H, I とする。s, t が △DEF と △GHI の面積が等しくなるように変化するとき，△DEF と △GHI の共通部分の面積 S の最小値を求めよ。

問題 A-3　20pt

三角形 ABC の重心を G とする。点 P は最初，頂点 A の位置にいる。1 個のさいころを繰り返し投げたとき，その出た目に応じて P は A, B, C, G の 4 点を，次の規則により移動する。

- P が A, B, C のいずれかにいるとき，4 以下の目が出れば，P は A $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ A の向きに 1 つ隣の頂点へ移動し，5 以上の目が出れば G へ移動する。
- P が G にいるとき，1, 2 が出れば A へ，3, 4 が出れば B へ，5, 6 が出れば C へ移動する。

自然数 n に対し，さいころを n 回投げた後に P がそれぞれ A, B, C にいる確率を a_n, b_n, c_n とする。a_n, b_n, c_n を n を用いて表せ。



問題 A-4　30pt

P を平面上の n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ とする。P の内部および周上の任意の 2 点を結ぶ線分が常に P の内部および周上に含まれるとき，P は凸多角形であるという。P がどの 2 辺も互いに平行ではない凸多角形であるとき，P の内部および周上に含まれる円のうち，半径が最大のものはただ 1 つであることを証明せよ。ただし，半径が最大のものが存在することは仮定してもよい。

問題 A-5　35pt

空間内の正四面体（内部を含む）Δ に対し，その重心を G とし，点 P と Δ に属する点との距離の最小値を $d_\Delta(\mathrm{P})$ で表す。空間内の 4 点 A，B，C，D と正の定数 b に対して，Δ が次の（条件 1），（条件 2），（条件 3）をすべて満たすとき，Δ は（A，B，C，D と b に対して）条件 $(*)$ を満たすということにする。

（条件 1）$d_\Delta(\mathrm{A}) = d_\Delta(\mathrm{B}) = d_\Delta(\mathrm{C}) = d_\Delta(\mathrm{D}) = b$ が成り立つ。

（条件 2）直線 AG，BG，CG，DG は，いずれも Δ のある面に垂直である。

（条件 3）直線 AG，BG，CG，DG に垂直な Δ の面は，どの 2 つも互いに異なる。

さて，空間内の異なる 4 点 A，B，C，D と正の定数 a, b が与えられたとする。1 辺の長さが a の正四面体 Δ，Δ' がともに条件 $(*)$ を満たすとき，$\Delta = \Delta'$ が成り立つかどうかを考察し，常に $\Delta = \Delta'$ が成り立つならばその証明を記し，$\Delta \neq \Delta'$ となる場合があればどの条件のもとでそうなるかを示せ。ただし，$\Delta = \Delta'$ とは，Δ と Δ' の頂点全体の集合が一致することを意味する。

問題 A-6　35pt

数を次の図のように並べたものを**コンウェイ・コクセターのフリーズ** (帯状装飾) といいます。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 3 & & \cdots & \\
 & 1 & & 2 & & 5 & & 1 & & 2 & & 5 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 3 & & \cdots & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots
\end{array}$$

ただし，4 つの数 $a,\ b,\ c,\ d$ が次の図のようにひし形に並んでいるとき，$ad - bc = 1$ が必ず成り立つとします。

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & d \\
 & c &
\end{array}$$

このルールにより，例えば，一番上の b，一番下の c および一番左の a を決めれば，残りの数 d は一意的に定まります。

(1) 次のフリーズを考えます。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \cdots & \\
 & b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & \cdots \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots &
\end{array}$$

このとき，任意の自然数 n に対して a_n と b_n が正の整数となるような組 (a_0, b_0) をすべて求めてください。

(2) 次のフリーズを考えます。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \cdots \\
1 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & \cdots & \\
 & 1 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \cdots \\
1 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & \cdots & \\
 & 1 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \cdots \\
 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & \cdots &
\end{array}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ の値を求めてください。

問題 A-7　50pt

漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)(a_n - b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。各自然数 n に対して,

$$a_n = 2^{u(n)} P_n, \quad b_n = 2^{v(n)} Q_n$$

となる 0 以上の整数 $u(n)$, $v(n)$ と奇数 P_n, Q_n が定まる。次の問いに答えよ。

(1) $u(n)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を求めよ。

(2) 非負整数 m に対して,

$$v(8m+1) = v(8m+2) = v(8m+3) = 2m, \quad v(8m+4) = 2m+2,$$
$$v(8m+5) \geqq 2m+3, \quad v(8m+6) = v(8m+7) = 2m+1, \quad v(8m+8) = 2m+2$$

であることを示せ。

(3) 自然数 m に対して, $P_{8m} - Q_{8m}$ が 16 で割り切れることを示せ。

B問題

問題 B-1　30〜40pt

x を変数とする未知関数 y の微分方程式

$$(4-27x^2)y''-27xy'+3y=0 \tag{1}$$

および，x の多項式 $a(x), b(x)$ を係数とする未知数 z の 3 次方程式

$$z^3+a(x)z+b(x)=0 \tag{2}$$

を考える。(2) は，異なる 3 つの解（根）をもつとする。この 3 つの解を x の関数とみて，これらから 2 つを勝手に選び $z_1,\ z_2$ とする。このとき，(1) の任意の解 y に対して，定数 C_1, C_2 が存在して，y は

$$y=C_1z_1(x)+C_2z_2(x)$$

の形に書けるとする。ただし，(2) の解は一般には複素多価関数であるが，本問では定義域や関数のこのような性質については考えなくて良い。**次の初級，上級のうち１つを選び，解答せよ。**

【初級：30pt】 $a(x)$ が定数，$b(x)$ が多項式の場合に，条件を満たす $a(x), b(x)$ を 1 組求めよ。

【上級：40pt】 条件を満たす $a(x), b(x)$ をすべて求めよ。