多重ゼータ値の次元予想の紹介
–Broadhurst-Kreimer 予想から Brown 予想まで–

田坂浩二 (九大数理 D3)

目 次

序文

この報告集は, 多重ゼータ値の次元予想として知られる, Broadhurst-Kreimer 予想 ('97) の最近の進展をまとめたものである. Broadhurst-Kreimer 予想とは, 有名な Zagier 氏の次元予想 ('94) よりも強い予想であり, 現状ほとんど未解決である. 近年, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式が多重ゼータ値の理論において重要な役割を果たすことが明らかになってきているが, Broadhurst-Kreimer 予想は両者における何かしらの深遠な関係を映し出している. この関係の本質を理解することは難しいが, 現象としてカスプ形式に付随する周期多項式から多重ゼータ値の重要な情報が得られている. 一つは, Gangl 氏, 金子氏, Zagier 氏によって得られたある 2 重ゼータ値の間の線形関係式 "GKZ 関係式" であり, もう一つは, 最近 Brown 氏により構成された "例外的多重ゼータ値 (exceptional element)" である. この二つが鍵となり, 多重ゼータ値のある 2 重次数付き Lie 環としての構造に関する予想

が述べられる．本節では, この予想を Brown 予想と呼ぶ．Brown 予想を大雑把にいうと,「多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の生成元は “純奇多重ゼータ値 (totally odd MZV)” と “例外的多重ゼータ値” であり, 例外的多重ゼータ値が張る部分 Lie 環は自由で, 純奇多重ゼータ値の張る部分 Lie 環には周期多項式由来の線形関係式があり, それにつきる」というものである．本稿の最終目標は, この Brown 氏による予想を主観的に解説することである．Brown 氏の予想にはいくつかバリエーションがあり, 最近の多重ゼータ値の研究で重要な “モチビック多重ゼータ値” は重要な一角を担っているが, 本稿ではそれを持ち出さない (ひとえに筆者の勉強不足のせいである)．本稿で述べる Brown 予想は, 井原-金子-Zagier(‘06) において導入された “線形化複シャッフル空間 (linearized double shuffle space)” と呼ばれる空間の 2 重次数付き Lie 環としての構造に関するものである．

まず, §1 で Broadhurst-Kreimer 予想の主張を述べ，いくつか具体的な数値を提示する．§2 では, 多重ゼータ値の重要な関係式族である複シャッフル関係式と, 本稿で述べる Brown 予想に必要な線形化複シャッフル空間について, 井原-金子-Zagier の結果を復習する．線形化複シャッフル空間に対する Brown 予想を最後の節で述べるが, 先に §3 で Brown 予想の多重ゼータ値における現象を説明するためにも重要な, モジュラー形式の周期多項式の理論と Gangl-金子-Zagier の仕事を紹介する (ここに周期多項式からくる 2 重ゼータ値の関係式 “GKZ 関係式” の証明の一部を載せておく)．§4 では, 線形化複シャッフル空間の Lie 環を定める伊原括弧積の復習をし, 線形化複シャッフル空間の Lie 環構造に関する Brown 予想を述べる．最後に, Brown 予想から示唆される多重ゼータ値の予想 “純奇多重ゼータ値予想” を紹介し, 深さが $2, 3$ におけるいくつかの観察を述べて終わる．

1　Broadhurst-Kreimer 予想

多重ゼータ値の次元予想は, Zagier 氏 [23] による多重ゼータ値の重さに関する次元予想が有名である．これに対し, 深さと重さを固定したベクトル空間の次元予想が Broadhurst-Kreimer[5] によって提唱されている．本節ではこれを述べた後, 本稿の議論の中心である “2 重次数付き環としての生成元の個数” に関する Broadhurst-Kreimer 予想を述べる．

定義 1. （多重ゼータ値）自然数の n 組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ に対し,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

インデックス $\mathbf{k}$ に対し $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + \cdots + k_n$ を重さ, $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n$ を深さと呼ぶ.

多重ゼータ値は, インデックス $\mathbf{k}$ の先頭項が $k_1 > 1$ のときに絶対収束することに注意する．先に, Zagier 氏による次元予想について簡単に触れておく．

Zagier 氏による次元予想

重さ k の多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ とおき, 数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ を $1/(1-t^2-t^3)=\sum d_k t^k$ で定める. このとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \overset{?}{=} d_k.$$

Zagier 予想は, d_k が上限を与えること ([21, 8] 等) が知られ, さらに $\{\zeta(k_1,\ldots,k_n) \mid k_i \in \{2,3\}\}$ が $\mathcal{Z}_k$ の生成元になること ([2, 3], Hoffman の基底予想) も知られている. 著者の勉強不足もあり, これら最近の重要な進展の詳細を説明することはできないが, 多重ゼータ値の代数構造が $\mathbb{Q}$ 上の絶対 Galois 群や Gronthendieck-Teichmüller 群に繋がる大変興味深い話題となっている. (この周辺の話題は, 日本語だと例えば [6] などを参照されたい.)

Broadhurst-Kreimer 予想は, 深さに関するフィルター構造を考慮する. 重さ k, 深さが n (≥ 1) 以下のインデックスを持つ多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{Z}_k^{(n)}$ と表記する:

$$\mathcal{Z}_k^{(n)} := \langle \zeta(\mathbf{k}) \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k, \mathrm{dep}(\mathbf{k}) \leq n \rangle_{\mathbb{Q}},\ \mathcal{Z}_0^{(n)} := \mathbb{Q}.$$

各 k と n を固定した空間は, 生成元が有限個なので有限次元である. Broadhurst-Kreimer 予想とは, 空間 $\mathcal{Z}_k^{(n)}/\mathcal{Z}_k^{(n-1)}$(ベクトル空間としての商空間) の次元予想である. 母関数 $\mathbb{E}(s), \mathbb{O}(s), \mathbb{S}(s)$ を次で定める:

$$\mathbb{E}(s)=\frac{s^2}{1-s^2},\ \mathbb{O}(s)=\frac{s^3}{1-s^2},\ \mathbb{S}(s)=\frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)}.$$

♣ 数列 $\{d_{k,n}\}_{k,n\geq 0}$ を以下の母関数で定義する.

$$\sum_{k,n\geq 0} d_{k,n} s^k t^n = \frac{1+\mathbb{E}(s)t}{1-\mathbb{O}(s)t+\mathbb{S}(s)t^2-\mathbb{S}(s)t^4}.$$

予想 2. (Broadhurst-Kreimer 予想–vector space ver.–) 正の整数 $k>n>0$ に対し,

$$d_{k,n} \overset{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^{(n)}/\mathcal{Z}_k^{(n-1)}.$$

♣ $d_{k,n}$ の表

$n \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	3	5	5	6	5	7	6	8	7
3	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	6	6	9	8	14	13	19	17	25
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	4	10	11	18	18	31	30
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	6	7	17	19	35
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	10	12

予想 2 を, 多重ゼータ値の 2 重次数付き環 (bigraded algebra) としての代数生成元 (algebra generator) の個数に関する予想に言い換える．重さに関する次数付き環 (graded algebra) を $\mathcal{Z}$, その augumentation イデアルを $\mathcal{I}$ と置く．

$$\mathcal{Z}_k := \sum_{k>n>0} \mathcal{Z}_k^{(n)},\ \mathcal{Z} := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k,\ \mathcal{I} = \bigoplus_{k\geq 1} \mathcal{Z}_k.$$

次数付き環 $\mathcal{Z}$ は深さに関してフィルター構造 (filtered algebra)

$$\{0\} = \mathcal{Z}^{(0)} \subset \mathcal{Z}^{(1)} \subset \ldots \subset \mathcal{Z}^{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{Z} \quad (\text{但し } \mathcal{Z}^{(n)} := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k^{(n)})$$

を持つ．また, $\mathcal{T} := \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ とおくと, 余接空間 (cotangent space) $\mathcal{T}$ は重さに関して次数付き環となり, 深さに関してフィルター構造をもつ．これらの記号のもと，2 重次数付きベクトル空間 $\mathcal{M}$ を以下で定義する (参照:[15, p.14]):

$$\mathcal{M} := \bigoplus_{k,n>0} \mathcal{M}_k^{(n)},\ \mathcal{M}_k^{(n)} := \mathcal{T}_k^{(n)}/\mathcal{T}_k^{(n-1)} \cong \mathcal{Z}_k^{(n)}/(\mathcal{Z}_k^{(n-1)} + \mathcal{Z}_k^{(n)} \cap \mathcal{I}^2).$$

♣ 数列 $\{D_{k,n}\}_{k,n>0}$ を以下の母関数で定義する．

$$\prod_{k,n>0} \left(\frac{1}{1-s^k t^n}\right)^{D_{k,n}} = \frac{1}{1-\mathbb{O}(s)t + \mathbb{S}(s)t^2 - \mathbb{S}(s)t^4}.$$

予想 3. (Broadhurst-Kreimer 予想–algebra generator ver.–) 正の整数 $k > n > 0$ (但し, $(k,n) \neq (2,1)$) に対し,

$$D_{k,n} \stackrel{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{M}_k^{(n)}.$$

♣ $D_{k,n}$ の表

$n\backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1		1		1		1		1		1		1		1		1	
2						1		1		1		2		2		2		3
3									1		2		2		4		5	
4										1		1		3		5		7

注意：数列 $D_{k,n}$ の母関数の両辺 log をとって, $D_{k,n}$ の母関数を $n = 2, 3, 4$ で取り出すと, 以下のようになっている．(参照:[12])

$$\sum_{k>0} D_{k,2}s^k = \frac{s^8}{(1-s^2)(1-s^6)},\ \sum_{k>0} D_{k,3}s^k = \frac{s^{11}(1+s^2-s^4)}{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)},$$
$$\sum_{k>0} D_{k,4}s^k = \frac{s^{12}(1+2s^4+s^6+s^8+2s^{10}+s^{14}-s^{16})}{(1-s^2)(1-s^6)(1-s^8)(1-s^{12})}.$$

♣ $\mathcal{M}_k^{(n)}$ の生成元の一例 (赤字は §4 に述べる保型多重ゼータ値)

$n\backslash k$	2	3	5	7	8	9	10	11	12	13
1	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$	$\zeta(5)$	$\zeta(7)$		$\zeta(9)$		$\zeta(11)$		$\zeta(13)$
2					$\zeta(3,5)$		$\zeta(3,7)$		$\zeta(3,9)$	
3								$\zeta(3,3,5)$		$\zeta(3,5,5)$ $\zeta(3,3,7)$
4									$\zeta(4,4,2,2)$	

14	15	16	17	18	19	20
	$\zeta(15)$		$\zeta(17)$		$\zeta(19)$	
$\zeta(3,11)$ $\zeta(5,9)$		$\zeta(3,13)$ $\zeta(5,11)$		$\zeta(3,15)$ $\zeta(5,13)$		$\zeta(3,17)$ $\zeta(5,15)$ $\zeta(7,13)$
	$\zeta(3,3,9)$ $\zeta(3,5,7)$		$\zeta(3,3,11),\zeta(3,5,9)$ $\zeta(3,7,7),\zeta(5,5,7)$		$\zeta(3,3,13),\zeta(3,5,11)$ $\zeta(3,7,9),\zeta(5,5,9)$ $\zeta(5,7,7)$	
$\zeta(3,3,3,5)$		$\zeta(3,3,3,7)$ $\zeta(3,3,5,5)$ $\zeta(4,4,2,6)$		$\zeta(3,3,3,9),\zeta(3,3,5,7)$ $\zeta(3,5,5,5),\zeta(3,5,3,7)$ $\zeta(4,8,4,2)$		略

2　井原-金子-Zagier の仕事

この節では, 多重ゼータ値の間の関係式として知られる "複シャッフル関係式 (double shuffle relations)" を用いて Broadhurst-Kreimer 予想を検証した井原-金子-Zagier [13] の仕事を紹介する. 最初の部分節では, 複シャッフル関係式を復習する. 次の部分節で, $\dim \mathcal{M}_k^{(n)}$ の評価で重要なある多項式の空間 "線形化複シャッフル空間 (linearized double shuffle space)" を定義し, いくつか知られている結果を述べる.

2.1　複シャッフル関係式

複シャッフル関係式は, 多重ゼータ値の二つの積構造からくる自然な関係式である. これらの積や正規化についての詳しい背景は述べないが, この部分節を読めば複シャッフル関係式を計算することは可能である. 証明等の詳細は日本語の参考文献 [1] や論文 [13] を参照されたい (記号は概ね [1] に従っている).

複シャッフル関係式とは, 多重ゼータ値における '調和積', 'シャッフル積' という二つの積の異なる展開で得られる関係式である. 例えば, リーマンゼータの二つの積の場合, 以下のような 2 重ゼータ値の線形和による表示が得られる: $r+s=k$ $(r>s\geq 1)$ に対し,

$$\zeta(r)\zeta(s) = \zeta(r,s) + \zeta(s,r) + \zeta(k), \tag{1}$$

$$\zeta(r)\zeta(s) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 1}} \left(\binom{i-1}{r-1} + \binom{i-1}{s-1} \right) \zeta(i,j).$$

一つ目が調和積 (今の場合 $\sum_{a,b>0} = \sum_{a>b>0} + \sum_{b>a>0} + \sum_{a=b>0}$ という和の取り替え) で二つ目がシャッフル積 (多重ゼータ値の反復積分表示から来る) による展開である. 一見

すると, $s=1$ では発散して正しい関係式を与えていないように思うが, 後で出てくる多重ゼータ値の "正規化" を行う事により, 正しい関係式が得られる. 正規化は, 例えば $\zeta(1):=0$ や $\zeta(1,r):=-\zeta(r,1)-\zeta(r+1)$ 等で与えられる. 以下, 一般的な複シャッフル関係式を (便利なので) 多重ゼータ値の代数的な表記を用いて記述する (Hoffman の代数的定式化 [11], [1, §1.4] を参照).

変数 x,y で生成される $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環 (自由代数) を $\mathfrak{H}$ とし, その部分代数 $\mathfrak{H}^1,\mathfrak{H}^0$ を以下のようにおく:

$$\mathfrak{H}:=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle\supset\mathfrak{H}^1:=\mathbb{Q}+\mathfrak{H}y\supset\mathfrak{H}^0:=\mathbb{Q}+x\mathfrak{H}y.$$

部分代数 $\mathfrak{H}^0$ を多重ゼータ値に対応させる. $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z:\mathfrak{H}^0\to\mathbb{R}$ を

$$Z(x^{k_1-1}y\cdots x^{k_n-1}y)=\zeta(k_1,\ldots,k_n)$$

によって定義する [1]. 但し, $Z(1)=1$. 多重ゼータ値における調和積とシャッフル積を $\mathfrak{H}^0$ 上に定義する.

♣ 調和積 : $\mathbb{Q}$-双線形写像 $*:\mathfrak{H}^1\times\mathfrak{H}^1\to\mathfrak{H}^1$ を $z_k:=x^{k-1}y,w,w'\in\mathfrak{H}^1$ に対し,

$$z_kw*z_lw'=z_k(w*z_lw')+z_l(z_kw*w')+z_{k+l}(w*w')$$

によって, 帰納的に定める. 但し, 1 は積 $*$ の単位元とする. 部分代数 $\mathfrak{H}^1$ は $\mathfrak{H}^1=\mathbb{Q}\langle z_1,z_2,\ldots\rangle$ となることに注意する. 容易にわかるように積 $*$ は $\mathfrak{H}^0$ を保つ. この定義のもと, 積 $*$ は多重ゼータ値の積で和の取り替えによって得られる展開と一致することが Hoffman[11] により示されている (i.e. $Z(w*w')=Z(w)Z(w')$).

♣ シャッフル積 : $\mathbb{Q}$-双線形写像 $ш:\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を $w,w'\in\mathfrak{H}$ と $u,v\in\{x,y\}$ に対し,

$$uw\,ш\,vw'=u(w\,ш\,vw')+v(uw\,ш\,w')$$

によって, 帰納的に定める. 但し, 1 は積 ш の単位元とする. 調和積の時同様, 積 ш は $\mathfrak{H}^0$ を保ち, 多重ゼータ値の反復積分表示による積の展開と一致する (i.e. $Z(w\,ш\,w')=Z(w)Z(w')$).

♣ 正規化 : $\mathbb{Q}$ 線形写像 Z を $\mathfrak{H}^1\to\mathbb{R}[T]$ に拡張する. $\circ\in\{*,ш\}$ に対し, 積 $\circ$ による可換代数を $\mathfrak{H}^1_\circ,\mathfrak{H}^0_\circ$ と表記する. このとき, $\mathbb{Q}$ 代数準同型 $Z^\circ:\mathfrak{H}^1_\circ\longrightarrow\mathbb{R}[T]$ で, 次の条件を満たすものが一意的に存在する ([1, §1.4.3]):

$$Z^\circ\mid_{\mathfrak{H}^0_\circ}=Z,\quad Z^\circ(y)=T.$$

また, $\mathfrak{H}^1_\circ\cong\mathfrak{H}^0_\circ[y]$ であるので, 任意の $w\in\mathfrak{H}^1_\circ$ は

$$w=w_0+w_1\circ y+\cdots w_n\circ y^{\circ n}\quad(w_0,w_1,\ldots,w_n\in\mathfrak{H}^0)$$

と一意的に表せる. すなわち, $Z^\circ(w)=Z(w_0)+Z(w_1)T+\cdots+Z(w_n)T^n$ と書ける.

[1] この対応は実際に $x=dt/t,y=dt/(1-t)$ として 0 から 1 まで反復積分すると得られるものと同じである (多重ゼータ値の反復積分表示).

定理 4. (複シャッフル関係式 [13]) 任意の $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ および, $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ に対し

$$Z^{\circ}(w_0 * w_1 - w_0 ⧢ w_1) = 0$$

が成り立つ. 特に, T に関する定数項を取る写像を $Z^{\circ}_{\mathrm{reg}} = Z^{\circ}\big|_{T=0}$ と書く. すると

$$Z^{\circ}_{\mathrm{reg}}(w_0 * w_1 - w_0 ⧢ w_1) = 0.$$

Proof. 証明に必要な事項を簡単に紹介する. $\mathbb{R}$ 線形写像 $\rho : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$(参照 [1, §1.4.6]) を以下で定める.

$$\rho(\exp(Tu)) = \exp\Big(\sum_{n>1} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\Big) \cdot \exp(Tu).$$

これに対し, $Z^{⧢} = \rho \circ Z^{*}$(正規化の基本定理) が成り立つ. $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ と $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対し, ρ の $\mathbb{R}$ 線形性から主張を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= Z(w_0)Z^{⧢}(w_1) - Z(w_0)\rho(Z^{*}(w_1)) = Z^{⧢}(w_0 ⧢ w_1) - \rho(Z^{*}(w_0 * w_1)) \\ &= Z^{⧢}(w_0 * w_1 - w_0 ⧢ w_1). \end{aligned}$$

調和積は省略. □

命題 5. y の次数が n となる語 $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ に対し,

$$Z^{*}_{\mathrm{reg}}(w_1) \equiv Z^{⧢}_{\mathrm{reg}}(w_1) \pmod{\mathcal{Z}^{(n-1)} + \mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2}.$$

Proof. 語 w_1 は, 以下の調和積展開をもつ:

$$w_1 = v_0 + v_1 * y + \cdots + v_n * y^{*n} \quad (v_i \in \mathfrak{H}^0).$$

各 v_i の y の次数は高々 $n-i$ であることに注意する. このとき, $\rho(T^i)$ は $\mathbb{Q}[\zeta(k) \mid k \geq 2]$ 係数の T に関する i 次多項式であり, その定数項は重さが i となるリーマンゼータ値の積の線形和であるゆえ, $\rho(Z^{*}(w_1)) = Z^{*}_{\mathrm{reg}}(w_1) + Z(v_1)\rho(T) + \cdots + Z(v_n)\rho(T^n)$ の定数項は $Z^{*}_{\mathrm{reg}}(w_1)$ と $\mathrm{mod}\ \mathcal{Z}^{(n-1)} + \mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2$ で等しい:

$$\begin{aligned} Z^{⧢}_{\mathrm{reg}}(w_1) &= Z^{⧢}(w_1)\big|_{T=0} = \rho(Z^{*}(w_1))\big|_{T=0} \\ &\equiv Z^{*}_{\mathrm{reg}}(w_1) \pmod{\mathcal{Z}^{(n-1)} + \mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2}. \end{aligned}$$

(注意 : $i \geq 2$ のとき, $\rho(T^i)$ に定数項があるため, $v_i \neq 0$ なる $i \geq 2$ があれば $\rho(Z^{*}(w_1))\big|_{T=0} \neq Z^{*}_{\mathrm{reg}}(w_1)$ であることに注意. すなわち, 深さが 2 の場合 ($\rho(T^i)$ $(i \geq 2)$ が現れない場合) は, $\rho(Z^{*}(w_1))\big|_{T=0} = Z^{*}_{\mathrm{reg}}(w_1)$ である.)

□

2.2 線形化複シャッフル空間

線形化複シャッフル空間は, 複シャッフル関係式の $\mathcal{M}$ 上での表記からくる関係式の母関数がもつ性質を反映した $\mathbb{Q}$ 上の多項式環上に定義される空間である. 自然な帰結として, $\mathcal{M}$ の各 k と n を固定した空間の次元が線形化複シャッフル空間の k と n を固定した空間の次元で抑えられることがわかる. ここでは, 少し回りくどくなってしまうものの, 線形化複シャッフル空間の定義の意味を明確にするために, 深さが 2 の場合から議論し, 順を追って定義することを試みる. 簡単のため, 以下では空間 $\mathcal{M}_k^{(n)}$ は $\mathcal{Z}_k^{(n)}/(\mathcal{Z}_k^{(n-1)}+\mathcal{Z}_k^{(n)}\cap\mathcal{I}^2)$ と同一視して考える.

♣ 深さ 2 の線形化複シャッフル空間：まず, 前節に明記した 2 重ゼータ値の複シャッフル関係式 (1) を, $\mathcal{M}^{(2)}$ 係数の母関数が満たす関係式として捉える. 発散する項を正規化した全ての 2 重ゼータ値の母関数を以下のように記す.

$$F_2^*(x_1,x_2) := \sum_{k_1,k_2>0} Z^*_{\mathrm{reg}}(z_{k_1}z_{k_2})x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1},$$
$$F_2^{ш}(x_1,x_2) := \sum_{k_1,k_2>0} Z^{ш}_{\mathrm{reg}}(z_{k_1}z_{k_2})x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}.$$

例えば,

$$F_2^*(x_1,x_2) = -\frac{\zeta(2)}{2}+\zeta(2,1)x_1+(-\zeta(2,1)-\zeta(3))x_2+\zeta(2,2)x_1x_2+(-\zeta(3,1)-\zeta(4))x_2^2+\cdots.$$

命題 6. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(i) \quad F_2^*(x_1,x_2) = F_2^{ш}(x_1,x_2),\\
&(ii) \quad 0 \equiv F_2^*(x_1,x_2)+F_2^*(x_2,x_1)\\
&\qquad\quad \equiv F_2^{ш}(x_1+x_2,x_2)+F_2^{ш}(x_1+x_2,x_1) \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{Z}^{(1)}+\mathcal{Z}^{(2)}\cap\mathcal{I}^2).
\end{aligned}$$

Proof. 最初の等式は命題 5 から直ちに従う. 2 番目の等式は, (1) の表示から従う. 実際,

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_{k_1,k_2>0} Z^*_{\mathrm{reg}}(z_{k_1}*z_{k_2})x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1} \equiv \sum_{k_1,k_2>0} Z^*_{\mathrm{reg}}(z_{k_1}z_{k_2}+z_{k_2}z_{k_1})x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1},\\
0 &\equiv \sum_{k_1,k_2>0} Z^{ш}_{\mathrm{reg}}(z_{k_1}\ ш\ z_{k_2})x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\\
&= \sum_{k_1,k_2>0}\sum_{\substack{i+j=k_1+k_2\\ i,j>0}}\left(\binom{i-1}{k_1-1}+\binom{i-1}{k_2-1}\right)Z^{ш}_{\mathrm{reg}}(z_iz_j)x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\\
&= \sum_{i,j>0} Z^{ш}_{\mathrm{reg}}(z_iz_j)\big((x_1+x_2)^{i-1}x_2^{j-1}+(x_1+x_2)^{i-1}x_1^{j-1}\big).
\end{aligned}$$

□

命題6から，2重ゼータ値の母関数が $\bmod\ \mathcal{Z}^{(1)}+\mathcal{Z}^{(2)}\cap\mathcal{I}^2$ において，次を満たす $\mathbb{Q}$ 上の多項式 $f(x_1,x_2)$ で特徴付けられる事がわかる:

$$0=f(x_1,x_2)+f(x_2,x_1)=f(x_1+x_2,x_2)+f(x_1+x_2,x_1). \tag{2}$$

関係式 (2) を満たす，$\mathbb{Q}[x_1,x_2]$ の部分空間を DSh_2 と表し，その d 次斉次部分が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $DSh_2(d)$ で表記する．

$$DSh_2 := \{f(x_1,x_2)\in\mathbb{Q}[x_1,x_2]\mid f \text{ satisfy } (2)\}.$$

系 7. 整数 $k\geq 2$ に対し，

$$\dim\mathcal{M}_k^{(2)}\leq \dim DSh_2(k-2).$$

Proof. 空間 $DSh_2(k-2)$ は明らかに有限次元なので，適当な基底を $q_1,\dots,q_g$ ($g=\dim DSh_2(k-2)$) と置く．命題6から，$F_2^*(x_1,x_2)\in\mathcal{M}^{(2)}\otimes DSh_2$ より，ある $\zeta_i\in\mathcal{M}_k^{(2)}$ があって，

$$(F_2^*(x_1,x_2)\text{ の次数 }k-2\text{ 部分})=\zeta_1q_1+\cdots+\zeta_gq_g$$

とかける．これは全ての重さ k の2重ゼータ値が $\zeta_1,\dots,\zeta_g$ で書けると言っているので，主張を得る． □

Remark. 井原-金子-Zagier により，$\dim DSh_2(k-2)=D_{k,2}$ が示されている．これにより，Broadhurst-Kreimer 予想の $n=2$ の場合が正しい事がわかる [2]．結論からいえば，一般の深さに対する線形化複シャッフル空間も同様の性質を持ち，DSh_n の次元を決定する事で Broadhurst-Kreimer 予想の解決が期待される．

♣ 深さ n の線形化複シャッフル空間：記号を用意する．整数 $n\geq 2$ に対し，$\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ の元への作用 $sh_l^{(n)}\in\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})]$ ($1\leq l\leq n-1$) を次で定める:

$$f(x_1,\dots,x_n)\big|sh_l^{(n)} := \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(l)\\ \sigma(l+1)<\dots<\sigma(n)}} f(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

右辺の対称群 (対称行列) の作用の形式和は，先ほど定義したシャッフル積の展開の別表記となっている．実際，文字 $w_1,\dots,w_n$ 達に対し，次が成り立つ ([18] 参照):

$$w_1\cdots w_l \mathbin{ш} w_{l+1}\cdots w_n=\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(l)\\ \sigma(l+1)<\dots<\sigma(n)}} w_{\sigma^{-1}(1)}\cdots w_{\sigma^{-1}(n)}. \tag{3}$$

また，$f^\sharp(x_1,\dots,x_n):=f(x_1+\cdots+x_n,\dots,x_{n-1}+x_n,x_n)$．

正規化された深さ n の多重ゼータ値の母関数を以下で定める ($\circ\in\{*,ш\}$):

$$F_n^\circ(x_1,\dots,x_n):=\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} Z_{\mathrm{reg}}^\circ(z_{k_1}\cdots z_{k_n})x_1^{k_1-1}\cdots x_n^{k_n-1}.$$

[2] 正確には一次独立性が問題になるが，本稿では $D_{k,n}$ が上限を与えていることが示せれば Broadhurst-Kreimer 予想が正しいと称することとする．

命題 8. 整数 $n > 1$ と $l \in \{1, \dots, n-1\}$ に対し, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad F_n^* \equiv F_n^{ш} \pmod{\mathcal{Z}^{(n-1)} + \mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2},\\
(ii) &\quad 0 \equiv F_n^* \big| sh_l^{(n)} \equiv (F_n^{ш})^\sharp \big| sh_l^{(n)} \pmod{\mathcal{Z}^{(n-1)} + \mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2}.
\end{aligned}
$$

Proof. 最初の式は命題 5 から従う. 調和積の定義からわかるように,

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv Z_{\mathrm{reg}}^*(z_{k_1} \cdots z_{k_l} * z_{k_{l+1}} \cdots z_{k_n}) \pmod{\mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2}\\
&\equiv Z_{\mathrm{reg}}^*(z_{k_1} \cdots z_{k_l} \text{ ш } z_{k_{l+1}} \cdots z_{k_n}) \pmod{\mathcal{Z}^{(n-1)} + \mathcal{Z}^{(n)} \cap \mathcal{I}^2}
\end{aligned}
$$

であるので, (3) より $F_n^* \big| sh_l^{(n)} \equiv 0$ が従う. 一方, シャッフル積は深さを保つので, $z_{k_1} \cdots z_{k_l} \text{ ш } z_{k_{l+1}} \cdots z_{k_n}$ の明示的な式を表記するのは難しいと思われる. しかし, 多重ゼータ値の積分表示を利用する事により, シャッフル正規化による多重ゼータ値の母関数が

$$
0 = (F_l^{ш})^\sharp(x_1, \dots, x_l) \cdot (F_{n-l}^{ш})^\sharp(x_{l+1}, \dots, x_n) = (F_n^{ш})^\sharp(x_1, \dots, x_n) \big| sh_l^{(n)}
$$

を満たすことが確かめられる (参照:[13], 別証明は [12, Proposition 9]). □

定義 9. （深さ n の線形化複シャッフル空間）整数 $n > 1$ に対し,

$$
DSh_n := \{ f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \mid f \big| sh_l^{(n)} = f^\sharp \big| sh_l^{(n)} = 0 \ (1 \le l \le n-1) \}.
$$

特に, d 次斉次成分を $DSh_n(d)$ と書く.

系 7 と同様にして, 以下を得る.

定理 10. (井原-金子-Zagier [13]) 整数 $k > n > 1$ に対し,

$$
\dim \mathcal{M}_k^{(n)} \le \dim DSh_n(k-n).
$$

Remark. もし $\dim DSh_n(k-n)$ の母関数が $D_{k,n}$ の母関数と一致することが確かめられれば, Broadhurst-Kreimer 予想が解決されたことになる. しかしながら, 現在のところ $DSh_n(d)$ の次元を調べるのは難しいようである. $DSh_n(d)$ の次元に関して, Goncharov 氏 [10] による $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ のコホモロジーを用いた評価や, 井原-落合 [14] によるコクセター群 B_3 の不変式環への埋め込みを用いた評価などが知られる. これらの結果をまとめておく.

定理 11. 奇数 $d > 0$ と整数 $n > 0$ に対し, $DSh_n(d) = \{0\}$ ([13, Prop. 17]). 偶数 $d > 0$ に対し, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\dim DSh_2(d) &= \left[\frac{d}{6}\right] = D_{d+2,2} \quad ([10],[13, \text{Prop. } 18]),\\
\dim DSh_3(d) &= \left[\frac{d^2-1}{48}\right] = D_{d+3,3} \quad ([10, 14]).
\end{aligned}
$$

3 Gangl-金子-Zagier の仕事

Broadhurst-Kreimer 予想の深さ 2 の場合 (Zagier 氏 [23, §8], [24, §3] の指摘が最初) から,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^{(2)} \overset{?}{=} \frac{k}{2} - 1 - \dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \quad (k : \text{even})$$

を得る. これに対し, カスプ形式に付随する偶周期多項式からある具体的な 2 重ゼータ値の間の関係式が得られる (GKZ 関係式). これは, 最後の節で述べる純奇多重ゼータ値の議論で重要な役割を果たす. 本節では, 先ず周期多項式を簡単に復習し, GKZ 関係式の証明を与える.

3.1 周期多項式

周期多項式は, カスプ形式に付随して定義されるものであるが, ここでは取り急ぎ天下り的な周期多項式の導入をはかる (概ね Gangl-金子-Zagier[7] の記号に倣う). 多項式 $F(X,Y)$ への $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を以下で定め, これを群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})]$ に延長しておく:

$$F(X,Y)\big|\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = F(aX+bY, cX+dY).$$

また, 主要な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の元を次のように置く.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例えば, $F(X,Y)\big|\varepsilon = F(Y,X),\ F(X,Y)\big|\delta = F(-X,Y)$ である. この記号のもと, 周期多項式の空間 W を以下で定める:

$$W := \ker(1 - T - {}^tT)\ (= \{P(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y] \mid P(X,Y)|(1 - T - {}^tT) = 0\}).$$

これまで同様, d 次斉次部分を $W(d)$ と表す. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ において, $(1 - T - {}^tT)S = (1 + S) - (1 + TS + (TS)^2)$ が成り立つことに注意する. 群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は S と T で生成されるため, $P \in W$ に対し $G = P\big|(1+S) = P\big|(1 + TS + (TS)^2)$ とおくと, G が全ての $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の元で不変となり, そのような G は 0 しかない. 従って, $P\big|(1+S) = 0$ である. さらに, この逆も明らかであるので, $W = \ker(1+S) \cap \ker(1 + TS + (TS)^2)$ がわかる. この表記を用いると, $\varepsilon(TS)\varepsilon = (TS)^2$ より $P\big|\varepsilon = -P\big|\delta \in W$ が直ちにわかる. W の ε による固有値 ± 1 の固有空間 $W^{\pm}$ に分解すると (${}^tT = \varepsilon T \varepsilon$):

$$W^{\pm} = \ker(1 - T \mp T\varepsilon).$$

注意 : $P \in W^-$ なら $P\big|\delta = P$ であり, これを偶周期多項式と呼ぶ.

周期多項式とカスプ形式

周期多項式の空間の定義は, 後に出てきた表記 $W = \ker(1+S)\cap\ker(1+TS+(TS)^2)$ により定める方がいささか自然である. これは, 重さ k のカスプ形式 $f(z)$ に対し, n-th 周期 $r_n(f)$ が

$$r_n(f) = \int_0^\infty f(it)t^n dt$$

と定義されるが (注意：これを f の L-関数を使って書くと $r_n(f) = n!/(2\pi)^{n+1}L(n+1, f)$), 本来の周期多項式は周期の母関数として定義される:

$$P_f(X,Y) = \int_0^{i\infty} f(z)(X - zY)^{k-2}dz.$$

簡単な計算から (f の重さ k の保型性とカスプでの正則性を使う), $P_f(X,Y)\big|\gamma = \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(z)(X - zY)^{k-2}dz$ が確かめられるので, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の楕円点 S, TS において, $P_f(X,Y)\big|(1+S) = P_f(X,Y)\big|(1+TS+(TS)^2) = 0$ がわかる. 周期多項式 $P_f(X,Y)$ が上記の関係式を満たす事から, 係数の比較により周期の間の $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式が出てくる. 例えば, $P_f(X,Y)\big|(1+S) = 0$ より $r_n(f) = -(-1)^n r_{k-2-n}(f)$.
$P_f(X,Y)$ の関係式は, $P_f(X,Y)$ を (パラボリック) コホモロジー群 $H^1_P(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), V_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ の実現として捉えることにより, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の関係式からくることが明らかになる. 但し, V_k は 2 変数多項式の $k-2$ 次斉次部分空間である;

$$V_k = \mathbb{Q}[X,Y]_{(k-2)}.$$

カスプ形式 $f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に対し, $\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$-準同型写像 $\varphi_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to V_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ を $\varphi_f(\gamma) = \int_{i\infty}^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(z)(X - zY)^{k-2}dz$ により定めると, $\varphi_f \in H^1_P(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), V_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ である. (例えばコサイクル $\varphi_f(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_f(\gamma_1)\big|\gamma_2 + \varphi_f(\gamma_2)$ を確認するのは容易.) このコホモロジー φ_f に対し, $\varphi_f(S) = -P_f(X,Y) \in W(k-2)$ をとることにより周期多項式が定まり, $S^2 = (TS)^3 = 1$ ($\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 上) によりコサイクルから $\varphi_f(S) \in W$ がわかる. (より詳しいことは [17, 19] 等を参照されたい.)

定理 12. (Eichler-志村-Manin [16]) 正の偶数 k に対し, 写像

$$r^+ : S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to W^+(k-2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},\ f \mapsto P_f(X,Y)\big|(1+\delta)$$

は同型写像となり,

$$r^- : S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to W^-(k-2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},\ f \mapsto P_f(X,Y)\big|(1-\delta)$$

は余次元 1 の単射となる.

Remark. 偶周期多項式の空間 $W^-(d)$ は $\mathbb{Q}(X^d - Y^d)$ を部分空間にもつ. そこで, $W^-(d) =$

$W^{-,0}(d) \oplus \mathbb{Q}(X^d - Y^d)$ とおいて, $W^{-,0}(d)$ の d に関する直和を $W^{-,0}$ と表記する.

$$W^{-,0} = \bigoplus_{d>0} W^{-,0}(d).$$

3.2 GKZ 関係式

Gangl-金子-Zagier[7] によって得られた GKZ 関係式を述べる. 以下, k は正の偶数と仮定する.

定理 13. (Gangl-金子-Zagier [7]) 偶周期多項式 $P(X, Y) \in W^-(k-2)$ に対し, $q_{r,s}$ を次で定める.

$$P(X+Y, Y) = \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s\geq 1}} \binom{k-2}{r-1} q_{r,s} X^{r-1} Y^{s-1}.$$

このとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \ \mathrm{odd}}} q_{r,s}\zeta(r,s) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}\zeta(k)}.$$

例 1. 最初の非自明な偶周期多項式は $X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2 \in W^-(10)$ である. これに対して得られる GKZ-関係式は,

$$14\zeta(9,3) + 75\zeta(7,5) + 84\zeta(5,7) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}\zeta(12)}.$$

簡単に定理13の証明を紹介する. 形式的 2 重シャッフル空間 D_k を, 記号 $Z_k, Z_{r,s}$ ($r+s=k,\ r,s\geq 1$) が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間で, これらの間に次の関係式が入っていると仮定する.

$$Z_{r,s} + Z_{s,r} + Z_k = \sum_{i+j=k} \left(\binom{i-1}{r-1} + \binom{i-1}{s-1} \right) Z_{i,j}. \tag{4}$$

(和 $\sum_{i+j=k}$ は $i, j \geq 1$ を動くと約束する.) すなわち,

$$D_k = \frac{\langle Z_k, Z_{r,s} \mid r+s=k \rangle_{\mathbb{Q}}}{(\text{relation (4)})}.$$

命題 14. 有理数 $a_{r,s}$ に対し, 次は同値.
(i) 空間 D_k において, 次が成り立つ.

$$\sum_{r+s=k} a_{r,s} Z_{r,s} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}Z_k}.$$

(ii) $k-2$ 次斉次多項式 $H(X,Y) \in \ker(1-\varepsilon, V_k)$ であって, 次を満たす.

$$H(X,Y)\big|({}^tT - 1) = \sum_{r+s=k} \binom{k-2}{r-1} a_{r,s} X^{r-1} Y^{s-1}.$$

Proof. 空間 $\ker(1-\varepsilon, V_k)$ の基底 $H_{r,s}(X,Y) = \binom{k-2}{r-1}(X^{r-1}Y^{s-1}+X^{s-1}Y^{r-1})$ $(r+s=k)$ に対し, $H_{r,s}\big|({}^tT-1)$ の係数を計算する. 例えば, $\binom{k-2}{r-1}X^{r-1}(X+Y)^{s-1} = \sum_{i+j=k}\binom{k-2}{i-1}\binom{i-1}{r-1}X^{i-1}Y^{j-1}$ 等から,

$$Z_{r,s} + Z_{s,r} \equiv \sum_{i+j=k}\left(\binom{i-1}{r-1} + \binom{i-1}{s-1}\right) Z_{i,j} \pmod{\mathbb{Q}Z_k}$$

と対応することがわかる. D_k の関係式は全て (4) で生成されているので, 主張を得る. $\square$

定理 15. 有理数 $q_{r,s}$ は $q_{r,s} = q_{s,r}$ $(r,s : \mathrm{even})$ を満たすとする. これに対し, 次は同値.
(i) 空間 D_k において, 次が成り立つ.

$$\sum_{\substack{r+s=k \\ r,s\ \mathrm{even}}} q_{r,s}Z_{r,s} \equiv 3\sum_{\substack{r+s=k \\ r,s\ \mathrm{odd}}} q_{r,s}Z_{r,s} \pmod{\mathbb{Q}Z_k}.$$

(ii) 偶周期多項式 $P(X,Y) \in W^-(k-2)$ であって, 次を満たす.

$$P(X,Y)\big|T = \sum_{r+s=k}\binom{k-2}{r-1}q_{r,s}X^{r-1}Y^{s-1}.$$

Proof. (ii)⇒(i) のみを示す. $P(X,Y) = \sum_{r+s=k}\binom{k-2}{r-1}p_{r,s}X^{r-1}Y^{s-1} \in W^-(k-2)$ に対し, $Q(X,Y) = P(X,Y)\big|T$ とおく. $Q\big|(1-\varepsilon) = P\big|(T-T\varepsilon) = P$ より,

$$q_{r,s} - q_{s,r} = \begin{cases} p_{r,s} & r,s : \mathrm{odd}, \\ 0 & r,s : \mathrm{even}. \end{cases} \tag{5}$$

ここで, Q の δ による固有分解を $Q = Q^{\mathbf{ev}} + Q^{\mathbf{od}}$ とおき, $Q^{\mathbf{ev}} \in \ker(1-\delta, V_k)$, $Q^{\mathbf{od}} \in \ker(1+\delta, V_k)$ について考える. $Q^{\mathbf{od}}$ は (5) より, 対称的である (i.e. $Q^{\mathbf{od}} \in \ker(1-\varepsilon, V_k)$). 同様に $Q^{\mathbf{ev}}$ は (5) より,

$$Q^{\mathbf{ev}} = \sum_{r+s=k}\binom{k-2}{r-1}(p_{r,s}+q_{s,r})X^{r-1}Y^{s-1} = P + Q^{\mathbf{ev}}\big|\varepsilon \tag{6}$$

となる. ここで, $Q^{\mathbf{ev}}$ の ε による固有分解を $Q^{\mathbf{ev}} = Q^{\mathbf{ev},+} + Q^{\mathbf{ev},-}$, $Q^{\mathbf{ev},\pm} \in \ker(1 \mp \varepsilon)$ とおくと, (6) から $2Q^{\mathbf{ev},-} = P$ を得る. 結論から言うと, 命題 14 より, 関係式 (i) を与える多項式 F を見つければよいが, F として $2Q^{\mathbf{ev},+} - 2Q^{\mathbf{od}}$ がとれる (対称的なのは明らか). 実際,

$$\begin{aligned}
&2Q^{\mathbf{ev},-}\big|{}^tT = P\big|{}^tT = -P\big|T\varepsilon = -Q\big|\varepsilon = -Q^{\mathbf{ev},+} + Q^{\mathbf{ev},-} - Q^{\mathbf{od}}, \\
&(Q^{\mathbf{ev},+} - Q^{\mathbf{ev},-} - Q^{\mathbf{od}})\big|{}^tT = Q\big|S{}^tT = P\big|TS{}^tT = P\big|S = -P = -2Q^{\mathbf{ev},-}
\end{aligned}$$

より, 下の式の 2 倍を上の式に加えると $(2Q^{\mathbf{ev},+} - 2Q^{\mathbf{od}})\big|{}^tT = -Q^{\mathbf{ev},+} - 3Q^{\mathbf{ev},-} - Q^{\mathbf{od}}$ となり,

$$(2Q^{\mathbf{ev},+} - 2Q^{\mathbf{od}})\big|({}^tT-1) = Q^{\mathbf{od}} - 3Q^{\mathbf{ev}}.$$

$\square$

定理 15 から, $Z_{r,s} \to \zeta(r,s)$ という対応を考えると, 定理 15 の (i) の関係式の左辺は, $q_{r,s} = q_{s,r}$ より $\zeta(r)\zeta(s)$ $(r+s=k,\ r,s \text{ even})$ と $\zeta(k)$ の線形和であることがわかる (調和積を用いる). これにより, GKZ 関係式 (定理 13) を得る.

4 Brown 氏の仕事

線形化複シャッフル空間 DSh を

$$DSh := \bigoplus_{n>0} DSh_n = \bigoplus_{d,n>0} DSh_n(d)$$

と定める. 但し, $DSh_1 := \bigoplus_{d>0} \mathbb{Q}x_1^{2d}$ とおく. §2 の議論より, Broadhurst-Kreimer 予想の解決のためには $DSh_n(k-n)$ の次元の母関数が $D_{k,n}$ の母関数と一致していることを確かめれば良いのだった. Brown 氏 [4] において, これが空間 DSh の Lie 環としての構造に関するある予想に帰着される事が示された. 本節では先ずこの予想を紹介し, 多重ゼータ値の新たな問題 "純奇多重ゼータ値予想" を紹介する.

4.1 伊原括弧積

この部分節では, DSh の Lie 環を定める伊原括弧積を定義する. しかし, 伊原括弧積が DSh の括弧積を与えることの証明は与えない. このため, 実質この部分節は読み飛ばして頂いても Brown 予想を理解するのに差し支えない (詳しくは [4] を参照).

$\mathbb{Q}$-双線形写像 $\underline{\circ}$ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \underline{\circ} : \mathbb{Q}[y_0,\dots,y_r] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[y_0,\dots,y_s] &\longrightarrow \mathbb{Q}[y_0,\dots,y_{r+s}] \\ f(y_0,\dots,y_r) \otimes g(y_0,\dots,y_s) &\longmapsto f \,\underline{\circ}\, g(y_0,\dots,y_{r+s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \,\underline{\circ}\, g(y_0,\dots,y_{r+s}) = &\sum_{i=0}^{s} f(y_i, y_{i+1},\dots,y_{i+r}) g(\underbrace{y_0,\dots,y_i}_{i+1}, \underbrace{y_{i+r+1},\dots,y_{r+s}}_{s-i}) + \\ &(-1)^{\deg f + r} \sum_{i=1}^{s} f(y_{i+r},\dots,y_{i+1},y_i) g(\underbrace{y_0,\dots,y_{i-1}}_{i}, \underbrace{y_{i+r},\dots,y_{r+s}}_{s-i+1}). \end{aligned}$$

そこで, 伊原括弧積を以下で定める:

$$\{f,g\} = f \,\underline{\circ}\, g(0,x_1,\dots,x_{r+s}) - g \,\underline{\circ}\, f(0,x_1,\dots,x_{r+s})$$

定理 16. (Goncharov-Racinet-Brown) *DSh は伊原括弧積 $\{,\}$ により, 2 重次数付き Lie 環 (bigraded Lie algebra) となる.*

すなわち, 伊原括弧積 $\{,\}$ は対称律, Jacobi 律を満たし, $f_i \in DSh_{n_i}(d_i)$ に対し, $\{f_1, f_2\} \in DSh_{n_1+n_2}(d_1+d_2)$ となる. 例えば,

$$\begin{aligned}\{x_1^{2n_1}, x_1^{2n_2}\} &= (x_1^{2n_1}x_2^{2n_2} - x_1^{2n_2}x_2^{2n_1})\big|(1-T+T\varepsilon), \qquad (7)\\ &= x_1^{2n_1}\left(x_2^{2n_2} - (x_2-x_1)^{2n_2}\right) + (x_2-x_1)^{2n_1}\left(x_1^{2n_2} - x_2^{2n_2}\right) + x_2^{2n_1}\left((x_2-x_1)^{2n_2} - x_1^{2n_2}\right).\end{aligned}$$

4.2 Brown 予想–線形化複シャッフル空間の Lie 環構造予想–

線形化複シャッフル空間 DSh は伊原括弧積により, 2 重次数付き Lie 環となる. DSh の明らかな生成元 ($DSh/\{DSh, DSh\} = DSh^{ab}$の生成元) で張られる, DSh の部分 Lie 環を $\mathcal{A}$ とする.

$$\mathcal{A} := \mathrm{Lie}_{\mathbb{Q}}[x_1^2, x_1^4, x_1^6, \ldots].$$

Lie 環 $\mathcal{A}$ の n 変数多項式部分 (生成元 x_1^{2m} $(m = 1, 2, \ldots)$ を $n-1$ 回伊原括弧積をとったものが張るベクトル空間) で, 多項式としての次数が d となる $\mathcal{A}$ の部分空間を $\mathcal{A}_n(d)$ と置く. 以下に注意する.

$$\mathcal{A}_n(d) \subset DSh_n(d). \qquad (8)$$

例 2. $n = 2$ の場合*:*
$\mathcal{A}_2(4) = \{0\},\ \mathcal{A}_2(6) = \mathbb{Q}\{x_1^2, x_1^4\},\ \mathcal{A}_2(8) = \mathbb{Q}\{x_1^2, x_1^6\},$
$\mathcal{A}_2(10) = \mathbb{Q}\{x_1^2, x_1^8\} + \mathbb{Q}\{x_1^4, x_1^6\},\ \mathcal{A}_2(12) = \mathbb{Q}\{x_1^2, x_1^{10}\} + \mathbb{Q}\{x_1^4, x_1^8\}.$

Lie 環 $\mathcal{A}$ は自由 Lie 環ではない. 実際, $\mathcal{A}_2$ における関係式が偶周期多項式から得られる. これは次のように簡潔に述べられる.

定理 17. (伊原-高尾, Schneps[20]) 偶数 $d > 0$ に対し, 係数 a_{n_1,n_2} が

$$\sum_{\substack{2n_1+2n_2=d\\ n_1>n_2>0}} a_{n_1,n_2}\{x_1^{2n_1}, x_1^{2n_2}\} = 0$$

を満たすための必要十分条件は, 以下を満たす事である

$$\sum_{\substack{2n_1+2n_2=d\\ n_1>n_2>0}} a_{n_1,n_2}(X^{2n_1}Y^{2n_2} - X^{2n_2}Y^{2n_1}) \in W^{-,0}(d).$$

Proof. 伊原括弧積 (7) より以下の完全系列が直ちに従う.

$$0 \longrightarrow W^{-,0} \longrightarrow DSh_1 \wedge DSh_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow 0.$$

但し, $DSh_1 \wedge DSh_1$ は $\bigoplus_{n_1,n_2>0} \mathbb{Q}(x_1^{2n_1}x_2^{2n_2} - x_1^{2n_2}x_2^{2n_1})$ と同一視していることに注意. □

例 3. 例 1 で見たように, $(X^2Y^8 - X^8Y^2) - 3(X^4Y^6 - X^6Y^4) \in W^-(10)$ である. これに対し, 伊原括弧積の明示式 (7) を用いると $\{x_1^2, x_1^8\} - 3\{x_1^4, x_1^6\} = 0$ がわかる.

簡単な議論で $\dim \mathcal{A}_4(8) = 0$ であるが, $\dim DSh_4(8) = 1$ である. 従って, 直ちに $\mathcal{A} \subsetneqq DSh$ であることがわかるが, Brown 氏は論文 [4] において, $\mathcal{A}$ に含まれない DSh の部分 Lie 環を, 偶周期多項式から構成した. この構成を述べる. $p(X,Y)$ を $W^{-,0}$ の元とする. $p(X,Y)$ はいつも $XY(X-Y)$ で割れることに注意する. そこで $p_0(X,Y), p_1(X,Y)$ を以下で定める:

$$p_0(X,Y) = p(X,Y)/XY(X-Y),\ p_1(X,Y) = p(X,Y)/XY.$$

定義 18. 偶周期多項式 $p(X,Y) \in W^{-,0}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&e_p(y_0,\dots,y_4) := \\
&\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \big(p_1(y_{\sigma(4)} - y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(2)} - y_{\sigma(1)}) + (y_{\sigma(0)} - y_{\sigma(1)})p_0(y_{\sigma(2)} - y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)} - y_{\sigma(3)})\big), \\
&\overline{e}_p(x_1,\dots,x_4) := e_p(0,x_1,\dots,x_4).
\end{aligned}$$

ここで σ は巡回置換を意味する.

定理 19. (Brown[4]) 偶数 $d > 0$ に対し, 次は単射.

$$\begin{aligned}
\overline{e} : W^{-,0}(d) &\longrightarrow DSh_4(d-2) \\
p(X,Y) &\longmapsto \overline{e}_p(x_1,\dots,x_4).
\end{aligned}$$

DSh は DSh_1 だけでは Lie 環として張れないが, 定理 19 で Brown 氏の構成した "例外元"(Brown 氏の論文で exceptional element という言い方をしており, 本稿では保型多重ゼータ値と呼ぶものと対応する元である) を考えると, 全ての DSh が得られるというのが Brown 予想の半分である. 本稿の目的であった, Brown 予想–DSh の 2 重次数付き Lie 環としての構造予想–とは, 以下のように述べられる.

予想 20. 線形化複シャッフル空間 DSh は次を満たす.

$$\begin{aligned}
&H_1(DSh,\mathbb{Q}) \cong DSh_1 \oplus \overline{e}(W^{-,0}) \\
&H_2(DSh,\mathbb{Q}) \cong W^{-,0} \\
&H_i(DSh,\mathbb{Q}) = 0 \quad (i \geq 3).
\end{aligned}$$

Remark. Brown 氏の予想 20 を噛み砕くと, 定理 19 によって構成された DSh_4 の元が張る DSh の部分 Lie 環を $\mathcal{W}$ と表記すれば,

$$DSh \stackrel{?}{=} \mathcal{A} \oplus \mathcal{W} \quad \big(\mathcal{W} := \mathrm{Lie}_{\mathbb{Q}}(\overline{e}(W^{-,0}))\big)$$

が成り立つことが半分で, 残り半分は, DSh の線形関係式は定理 17 の $\mathcal{A}_2$ における関係式に尽きるということを言っている. また, 予想 20 を仮定すると, $DSh_n(k-n)$ の次元の母関数が計算でき, それは $D_{k,n}$ の母関数と一致することが確かめられる (詳しくは [4] を参照).

4.3 Brown 予想–純奇多重ゼータ値予想–

先ほどは線形化複シャッフル空間の議論であったのに対し, 多重ゼータ値の視線で予想 20 を考察する. 予想 20 の解決で困難だと思われる部分の一つは, $\mathcal{A}$ の線形関係式の研究であり, すなわち次を示す事である.

予想 21.

$$\prod_{k>n>0}\left(\frac{1}{1-s^k t^n}\right)^{\dim \mathcal{A}_n(k-n)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-\mathbb{O}(s)t+\mathbb{S}(s)t^2}. \tag{9}$$

多項式と多重ゼータ値の対応を思い出すと, $\zeta(k_1,\ldots,k_n)$ は $x_1^{k_1-1}\cdots x_n^{k_n-1}$ の係数として対応付けられていたので, $\mathcal{A}$ の代わりに全成分が 3 以上の奇数である多重ゼータ値 $\zeta(2l_1+1,\ldots,2l_n+1)$ $(l_i\geq 1)$(純奇多重ゼータ値とよぶ) が張る $\mathcal{Z}$ の部分代数の代数生成元が $\mathcal{A}$ の代数生成元と対応するはずである [3]. 従って, 純奇多重ゼータ値の張るベクトル空間を低い深さの多重ゼータ値で割った空間の次元の母関数は (9) の右辺の表記を持つことが予想される. これが Brown 氏による純奇多重ゼータ値予想である.

純奇多重ゼータ値予想を述べるために, 記号を導入する. 重さが k, 深さが n 以下の純奇多重ゼータ値が生成する $\mathcal{Z}_k$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{O}_k^{(n)}$ と表す.

$$\mathcal{O}_k^{(n)} := \left\langle \zeta(\mathbf{k})\in\mathcal{Z}_k^{(n)} \mid k_i\geq 3 : \mathrm{odd}\right\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

$k\equiv n \pmod 2$ のとき, 次に注意.

$$\mathcal{O}_k^{(n)}\supset\mathcal{O}_k^{(n-1)}=\mathcal{O}_k^{(n-2)}\supset\mathcal{O}_k^{(n-3)}=\mathcal{O}_k^{(n-4)}\supset\cdots.$$

$\zeta(2)$ が生成する $\mathcal{Z}$ のイデアルを $(\zeta(2))$ と表す. このとき, 空間 $\mathcal{Z}_{k,n}^{\mathrm{odd}}$ を, 重さ k, 深さ n の純奇多重ゼータ値であって, 深さ $n-1$ 以下の多重ゼータ値および, $(\zeta(2))$ の線形結合でかけないものが張るベクトル空間とする.

$$\mathcal{Z}_{k,n}^{\mathrm{odd}}=\mathcal{O}_k^{(n)}/(\mathcal{Z}_k^{(n-1)}\cap\mathcal{O}_k^{(n)}+(\zeta(2))\cap\mathcal{O}_k^{(n)}).$$

予想 22. (Brown 予想–純奇多重ゼータ値予想–) 次が成り立つ.

$$1+\sum_{k>n>0}\dim\mathcal{Z}_{k,n}^{\mathrm{odd}}s^k t^n \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-\mathbb{O}(s)t+\mathbb{S}(s)t^2}.$$

残りの紙面で, 予想 21, 22 の知られている場合について整理して, 本稿を終わる.

♣ $n=2$ の場合 (線形化複シャッフル空間) : 予想 21 から,

$$\dim\mathcal{A}_2(k-2)=\left[\frac{k-2}{6}\right]\quad(k:\mathrm{even})$$

[3] この観察をもとに, §1 の $\mathcal{M}_k^{(n)}$ の生成元の表を純奇多重ゼータ値を用いて表記した. 保型多重ゼータ値とは, 純奇多重ゼータ値でない周期多項式からくる深さ 4 の例外元に対応するものを言っている (定理 19).

である. 仮に $\mathcal{A}$ が自由 Lie 環だと仮定すると, その次元の母関数は Poincaré-Birkhoff-Witt の定理 ([22, p226]) から

$$\prod_{k>n>0}\left(\frac{1}{1-s^k t^n}\right)^{\dim\mathcal{A}_n(k-n)}=\frac{1-s}{1-s(st+1)}$$

となるが, t^2 の係数を比較して $\dim\mathcal{A}_2(k-2)=[(k-4)/4]$ $(k:\text{even})$ を得る. ところで, 定理 17 によって, $\mathcal{A}_2(k-2)$ にはちょうど $\dim W^{-,0}(k-2)=\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))=[(k-4)/4]-[(k-2)/6]$ 個の関係式が存在するので, 定理 12,17 と (8) の帰結として, $\mathcal{A}_2=DSh_2$ を得る:

$$\dim\mathcal{A}_2(k-2)=\left[\frac{k-4}{4}\right]-\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))=\left[\frac{k-2}{6}\right]=\dim DSh_2(k-2).$$

♣ $n=3$ の場合 (線形化複シャッフル空間) : Brown 氏 [4] によれば, Goncharov 氏の議論から $\mathcal{A}_3=DSh_3$ が従う. このことは, 例えば $\mathcal{A}_3(12)$ の関係式が, (Jacobi 律を除いて) $\{x_1^2,\{x_1^2,x_1^8\}-3\{x_1^4,x_1^6\}\}=0$ につきるということを言っている.

♣ $n=2$ の場合 (純奇多重ゼータ値) : 予想 22 より, 次がわかる.

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,2}^{\mathrm{odd}}\overset{?}{=}\frac{k}{2}-2-\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

定義から, $\mathcal{Z}_{k,2}^{\mathrm{odd}}=\langle\zeta(2i+1,k-2i-1)\mid 1\le i\le k/2-1\rangle_{\mathbb{Q}}/\langle\pi^k\rangle_{\mathbb{Q}}$ であるが, 生成元の間には GKZ 関係式 (定理 13) が少なくとも $\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 個あるため, 次が従う.

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,2}^{\mathrm{odd}}\le\frac{k}{2}-2-\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

♣ $n=3$ の場合 (純奇多重ゼータ値) : 予想 22 によると,

$$\sum_{k>0}\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,3}^{\mathrm{odd}}s^k\overset{?}{=}\mathbb{O}(s)^3-2\mathbb{O}(s)\mathbb{S}(s).$$

従って, 重さ 15 で初めて純奇 3 重ゼータ値の間の線形関係式が現れる (2 つ存在する). ひとつは, 例 1 で述べた GKZ 関係式に $\zeta(3)$ をかけて調和積で展開した次の式である.

$$\begin{aligned}&14(\zeta(3,9,3)+2\zeta(9,3,3))+75(\zeta(3,7,5)+\zeta(7,3,5)+\zeta(7,5,3))\\&+84(\zeta(3,5,7)+\zeta(5,3,7)+\zeta(5,7,3))\equiv 0\pmod{\mathcal{Z}_{15}^{(2)}}.\end{aligned}$$

もう一つは,

$$36\zeta(5,5,5)+6\zeta(5,7,3)+15\zeta(7,5,3)-14\zeta(9,3,3)\equiv 0\pmod{\mathcal{Z}_{15}^{(2)}}$$

であり, これは深さ 3 の複シャッフル関係式を用いて証明できる. 一般に, 重さ k の純奇 3 重ゼータ値の関係式 (深さ 2 の GKZ 関係式から来ていないような) を, 深さ 3 の複シャッフル関係式から $\sum_{d=12}^{k-3}\dim S_d(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 個構成できれば, 深さ 3 の場合の純奇多重ゼータ値予想の具体的な関係式を用いた解決が期待される.

謝辞

文末ではありますが、本講演の準備などで色々と相談にのって頂いた金子昌信先生と井原健太郎さんに感謝の意を表したいと思います。ありがとうございました。

参考文献

[1] T. Arakawa, M. Kaneko, 多重ゼータ値入門, MI レクチャーノート **23**.

[2] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. **175**(2) (2012), 949–976.

[3] F. Brown, *On the decomposition of motivic multiple zeta values*, 'Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry', Advanced Studies in Pure Mathematics.

[4] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, arXiv:1301.3053.

[5] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393**, no. 3-4 (1997), 403–412.

[6] H. Furusho, *The Multiple Zeta Value Algebra And The Stable Derivation Algebra*, RIMS-kokyuroku **1200**, Algebraic number theory and related topics, (2001), 137–148

[7] H. Gangle, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions", Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.

[8] P. Deligne, A.B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ećole Norm. Sup. **38** (2005), 1–56

[9] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Lett., **5** (1998), 497–516.

[10] A. B. Goncharov, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, Duke Math. J. **110**(3) (2001), 397–487.

[11] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. of Algebra, **194** (1997), 477–495.

[12] K. Ihara, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, RIMS 講究録 **1549** (2007), 47–63.

[13] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[14] K. Ihara, H. Ochiai, *Symmetry on linear relations for multiple zeta values*, Nagoya Math. J. **189** (2008), 49–62

[15] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**. Springer-Verlag, New York, 1995.

[16] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modular forms (Durham, 1983), 197–249, Ellis Horwood 1984.

[17] S. Lang, *Introduction to modular forms*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, No. 222. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[18] C. Reutenauer, *Free Lie algebras* (Oxford Science Publications, Oxford, 1993).

[19] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Kanô Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[20] L. Schneps, *On the Poisson Bracket on the Free Lie Algebra in two Generators*, Journal of Lie Theory **16**(1) (2006), 19–37.

[21] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149**(2) (2002), 339–369.

[22] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, 1994.

[23] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.

[24] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, in Hokei-keishiki to L-kansuu no kenkyuu (= Research on Automorphic Forms and L-Functions), RIMS Kokyuroku **843** (1993), 162–170