周期たちの間の線形関係式の数値実験

田坂 浩二 (名大多元)

概 要

多重ゼータ値や楕円カスプ形式の臨界値といった周期と呼ばれる特殊値たちの間の線形関係式およびこれら値で生成されるベクトル空間の次元予想を紹介する．また, この問題に対する数値実験によるアプローチを詳しく説明し, 関連する未解決問題に触れる.

1 序文

1.1 周期

$\mathbb{Q}$ 上の有理関数を $\mathbb{Q}$ 上の多項式で定義される領域で積分して得られる実数値を実部と虚部に持つ複素数のことを周期と呼ぶ. 周期は, 代数的数のみならず円周率 π などの超越数を含む数のクラスを与え, 様々な局面に現れる興味深い数として知られている (詳しくは [2, 15] などを参照されたい). 我々が扱う周期は, 多重ゼータ値

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r)=\sum_{n_1>\cdots>n_r>0}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\quad(k_1,\ldots,k_{r-1}\in\mathbb{Z}_{>0},k_r\in\mathbb{Z}_{>1})$$

と楕円カスプ形式の臨界値

$$I_f(n)=\int_0^\infty f(it)t^{n-1}dt\quad(f\in S_k(N),\ n\in\{1,2,\ldots,k-1\})$$

である. ただし, $S_k(N)$ は重さ k, 群 $\Gamma_0(N)$ のカスプ形式の空間を表す. 我々の目標は, これらの値の間の $\mathbb{Q}$ 線形関係式の存在を示唆する "次元予想" について, 実際に計算機の使い方を見ながら数値実験する方法を説明することである (多重ゼータ値の数値実験方法のみに興味のある方は, 2.1 節と 3.2 節を参考にされたい). 以下で, 本稿で説明する次元予想の主張を復習しておく.

1.2 多重ゼータ値の次元予想

多重ゼータ値の次元予想である Broadhurst–Kreimer 予想 [6] を復習する.

多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ に対し, $k_1+\cdots+k_r$ を重さ, r を深さと呼ぶ. 基本的な事実として (3.1 節参照), 同じ重さの多重ゼータ値の間にたくさんの $\mathbb{Q}$ 線形関係式があることが知られている. 我々は, 多重ゼータ値の深さが関係式にどう影響するかに興味がある.

そこで, 重さ k, 深さ r 以下の多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k$ を考える. 例えば, $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_4 = \mathbb{Q}\zeta(4) + \mathbb{Q}\zeta(3,1) + \mathbb{Q}\zeta(2,2)$ である. 便宜上, $1 \in \mathbb{Q}$ は重さ 0 深さ 0 の多重ゼータ値とする. $k > 0$ であれば, 部分空間の列

$$\mathfrak{D}_0\mathcal{Z}_k = \{0\} \subset \mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k \subset \mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{D}_{k-1}\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k$$

を得る. ただし, $\mathcal{Z}_k$ は重さ k の多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である. 多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z} := \sum_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k$ には $\mathbb{Q}$ 代数構造があり, 積は上記のフィルトレーションを保つ. このことから, 重さと深さを固定した多重ゼータ値の関係式を商ベクトル空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k$ 上で考えることが自然な問題となる. この商空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k$ の次元予想が Broadhurst–Kreimer 予想と呼ばれる. 主張を述べよう. 母関数 $\mathbb{O}(x), \mathbb{E}(x), \mathbb{S}(x)$ たちを次で定義する:

$$\mathbb{O}(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x^3 + x^5 + x^7 + \cdots, \quad \mathbb{E}(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 + x^4 + x^6 + \cdots,$$
$$\mathbb{S}(x) = \sum_{k>0} \dim_{\mathbb{C}} S_k(1) x^k = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)} = x^{12} + x^{16} + x^{18} + \cdots.$$

予想 1. (Broadhurst–Kreimer 1997) 次が成り立つ*:*

$$1 + \sum_{k>r>0} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k\right) x^k y^r \overset{?}{=} \frac{1+\mathbb{E}(x)y}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2-\mathbb{S}(x)y^4}.$$

一見すると非常にわかりにくい予想であるが, 予想 1 は重さと深さを固定した多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元がカスプ形式の次元と深い関係にあることを示唆している. 予想 1 の信憑性はさほど検証されていないようである (例えば [13] では, 正規化された複シャッフル関係式によるアプローチにより重さ 20 まで確かめられている). $r = 1,2,3$ の場合, Goncharov [10] によって $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k$ が予想 1 の右辺の $x^k y^r$ の係数以下であることが示されており, 目下 $r = 4$ の場合が盛んに議論されている [4, 5]. 3.3 節で予想 1 の数値実験方法を詳しく説明し, 3.4 節において深さ 3 の場合の予想 1 の精密化に関する Broadhurst 予想について言及する.

1.3 楕円カスプ形式の臨界値の次元予想

重さ k のカスプ形式 $f(z)$ をとる (レベルは厭わない). 奇数 (resp. 偶数) 点での $f(z)$ の臨界値 $I_f(n)$ で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ (resp. $\mathcal{P}_f^{\mathrm{ev}}$) で表す:

$$\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} = \langle I_f(n) \in \mathbb{C} \mid 1 \leq n \leq k-1, (-1)^n = -1 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{P}_f^{\mathrm{ev}} = \langle I_f(n) \in \mathbb{C} \mid 1 \le n \le k-1, (-1)^n = 1 \rangle_{\mathbb{Q}}).$$

次元の等号 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} \stackrel{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{ev}}$ および直和性 $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} \cap \mathcal{P}_f^{\mathrm{ev}} \stackrel{?}{=} \{0\}$ は基本的な問題 (予想?) である. 以下では, 新形式 f に対する $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ のみを考える.

カスプ形式の臨界値たちの間にはたくさんの $\mathbb{Q}$ 線形関係式が存在する. この事実にはあまり馴染みがないと思うので, 根拠となる次の命題から始めよう:

命題 2. 重さ k の新形式 $f(z) = \sum_{m>0} a_m q^m$ に対し, 空間 $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ の次元は f の *Hecke* 体 $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(a_m \mid m \ge 1)$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数以下である:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} \le [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}].$$

証明. Manin [16, p.81, §4] や志村 [20, Theorem 1] により, 整数 $n \equiv m \mod 2$ $(1 \le n, m \le k-1)$ に対し, 臨界値の比 $I_f(n)/I_f(m)$ が f の Hecke 体 $\mathbb{Q}(f)$ に属することが知られている. すると, $I_f(k-1) \ne 0$ (L 関数の Euler 積表示から直ちに従う) より, 欲しい評価が得られる:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} = \dim_{\mathbb{Q}} \sum_{\substack{1 \le n \le k-1 \\ (-1)^n = -1}} \mathbb{Q} \frac{I_f(n)}{I_f(k-1)} \le [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}].$$

□

新形式 f に対し, 拡大次数 $[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}]$ の計算は難しいが, 例えばレベル 1 の場合に前田予想 ([11, 5 節]) を認めると, $[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{C}} S_k(1) \sim \frac{k}{12}$ となる. 空間 $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ の生成元の個数は $\frac{k}{2}$ 個なので, 命題 2 は新形式の臨界値たちの間の $\mathbb{Q}$ 線形関係式の存在を示唆している. 以下で, 空間 $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ の次元予想を提唱する (あくまで, 筆者の観測的な主観であり, 理論的な背景があるわけではないことを注意しておく).

重さ k の $\Gamma_0(N)$ の新形式からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $S_k^{new}(N)$ と表し, 空間 $S_k^{new}(N)$ への作用 W_N を次で定義する:

$$f(z)\big|W_N := N^{-k/2} z^{-k} f\left(\frac{-1}{Nz}\right).$$

作用 W_N の各固有空間 ($f(z)\big|W_N^2 = f(z)$ ゆえ, W_N の固有値は ± 1) を $S_k^{new}(N)^{\pm}$ と表記する.

予想 3. レベルは $N = 1, 2$ のいずれかとする. このとき, 新形式 $f \in S_k^{new}(N)^{\pm}$ に対し, 次が成り立つ:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} \stackrel{?}{=} \dim_{\mathbb{C}} S_k^{new}(N)^{\pm}.$$

レベル $N=1$ の場合は, $S_k^{new}(1)^+ = S_k(1)$ であり, $S_k^{new}(1)^- = \{0\}$ となることに注意しておく. 予想 3 は $k=36$ まで正しそうだということを確かめている (レベル $N=3,4$ の場合も同様の予想が期待出来るが, 現状データ不足である). 左辺の空間の次元の数値計算については, 4 節で詳しく解説する. 一方右辺の空間の次元は, SageMath を使えば計算可能であるが, 少なくとも筆者は $S_k^{new}(N)^{\pm}$ の場合の次元公式を知らない. 我々の次元予想は空間 $S_k^{new}(N)^{\pm}$ の次元予想も導く. これは 4.3 節で詳しく取り扱う.

2 準備 (lindep)

2.1 lindep の使い方

数値実験で使う数学ソフトウェアは Pari-GP (ver 2.8) である[1]. 特に, Pari-GP の組み込み関数 "lindep" が重要な役割を果たす. 以下で, lindep の基本的な使い方を説明する (数学的な詳しい解説は [7, 2.7.2 節] を参照).

n 個の実数たちの (ある桁数での) 近似値 $a_1, \ldots, a_n$ に対し, lindep($[a_1, \ldots, a_n]$) と入力すると, n 組の整数 $[b_1, \ldots, b_n]$ が出力される. これは, $b_1a_1 + \cdots + b_na_n$ が近似値として 0 に近いことを意味する. 例えば, $a_1 = \zeta(2), a_2 = \pi^2$ として, lindep を行うと

```
? lindep([zeta(2),Pi^2])
%1 = [-6, 1]~
```

を得る. この出力は $-6\zeta(2) + \pi^2 = 0$ を示唆しており, 実際, この等式は Euler により得られたものである.

基本的な使い方は上述の通りであるが, 以下 2.2 節でもう少し lindep を使った遊びを考えてみよう (Broadhurst–Kreimer 予想の導出方法に興味がある方は 3 節に進まれたい).

2.2 lindep と代数的数

lindep を用いると, 次のような代数的数に関する問題を検証することができる:

問題 4. $\mathbb{Q}$ 上 d 次の代数的数 α が与えられたとき, α を添加した単純拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ が $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大かを判定せよ.

例えば, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ はガロア拡大だが, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ はガロア拡大でない. 問題 4 を検証する一つの方法は, α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の全ての根たちが $1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で表せるかを判定することである. この検証には, 言うまでもなく先ほどの lindep が役に立つ. 以

[1]ダウンロード方法については, 色々とすぐに記事が探せると思うので, ここでは説明しない. Windows ユーザーであればインストーラーがあり, 実行ファイルを展開するだけで Pari-GP が使えるようになる. Mac ユーザーは SageMath(ver 7 以降) をダウンロードするのが一番手っ取り早く利用する方法だろう.

下で, 代数的数 α の代わりに $\mathbb{Q}$ 上のモニック既約多項式を一つ与えて, 問題 4 を考えてみよう (ちなみに, 代数的数の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は, "algdep(α, d)" と入力することで近似的に求めることができる).

4 次既約多項式 $p(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + x + 1$ に対する問題 4 を検証しよう. まず, $p(x)$ の根たちを 30 桁精度で計算する:

```
? \p 30
   realprecision = 38 significant digits (30 digits displayed)
? v=real(polroots(x^4-x^3-6*x^2+x+1))
%1 = [-2.04948117773531559962553399795, -0.344150731408910807714759227885,
 0.487928364926485324714829069965,  2.90570354421774108262546415587]~
```

1 行目は計算する桁数を指定するコマンドである. 2 行目で v を $p(x)$ の根たち (近似値) を小さい順に並べたベクトルとしている. この例では $p(x)$ の根は全て実根となるが, "polroots" というコマンドは複素数値を与えるので "real" で実部をとった.

次に, lindep を用いて, 根たち (近似値) の間の関係式を計算しよう:

```
? lindep([1,v[1],v[1]^2,v[1]^3,v[2]])
%2 = [-3, -6, 0, 1, 2]~
```

ただし, v[1] でベクトル v の第一成分を意味する. 出力の読み方は "$-3 \times 1 - 6 \times$v[1] $+ 0 \times$v[1]$^2 + 1 \times$v[1]$^3 + 2 \times$v[2] $= 0$" である. つまり, 近似値 v[2] は {1,v[1],v[1]^2,v[1]^3} の一次結合である. 同様に,

```
? lindep([1,v[1],v[1]^2,v[1]^3,v[3]])
%3 = [-1, 6, 1, -1, 1]~
? lindep([1,v[1],v[1]^2,v[1]^3,v[4]])
%4 = [-3, 4, 2, -1, -2]~
```

したがって, $p(x)$ の根たちは {1,v[1],v[1]^2,v[1]^3} の一次結合であり, $\mathbb{Q}$(v[1]) は $\mathbb{Q}$ 上 4 次のガロア拡大となることが予期できる (実際, [17] において, $p(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上の 4 次巡回拡大を与えることが示されている). すでにいろんな取組があると思うが, 計算機を用いた "ガロア拡大であるような単純拡大の特徴付け" はおもしろい試みかもしれない.

3 多重ゼータ値の次元予想

3.1 Zagier の次元予想

Broadhurst–Kreimer 予想を解説する前に, Zagier による有名な多重ゼータ値の次元予想 [22] とこれに関連する話題を簡単に紹介する.

多重ゼータ値の基本的な事実として, 重さが k の多重ゼータ値 (2^{k-2} 個ある) の間にたくさんの $\mathbb{Q}$ 線形関係式が存在する. これは, 次の定理からわかる.

定理 5. (Deligne-Goncharov [8], 寺杣 [21]) 重さ k の多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ と表し, 数列 $\{d_k\}_{N\geq 0}$ を母関数 $\sum_{k\geq 0} d_k x^N := 1/(1-x^2-x^3)$ で定義する. このとき, 整数 $k \geq 0$ に対し, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$ が成り立つ.

数列 d_k の表は以下のようになる. 定理からたくさんの $\mathbb{Q}$ 線形関係式の存在が示唆されることがわかる.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65

注意 6. 数列 $\{d_k\}_{N\geq 0}$ は $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフからなる淡中圏 $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ の淡中基本群 (モチビックガロア群) の座標環の次数 k 部分の次元から得られる. この事実と, 多重ゼータ値が $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ の周期となるという事実を併せて, 定理 5 の次元の評価が得られる. 近年, Brown [3] により, 空間 $\mathcal{Z}_k$ の d_k 個からなる生成系 (Hoffman 基底) が得られた. これにはモチビックガロア群の具体的な余作用の計算が重要な役割を果たしており, 今後この手法の更なる応用が期待されている. 未解決事項として, 具体的な関係式族 (アソシエータ関係式や複シャッフル関係式など) を用いた不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$ の証明は得られていないことに注意しておく. これに対し, アソシエータ関係式や正規化された複シャッフル関係式が多重ゼータ値の全ての関係式を生成しているだろうと予想されている (後者は Zagier による予想 [12]).

注意 7. 重さの異なる多重ゼータ値の間に $\mathbb{Q}$ 線形関係式はないと考えられている. つまり, $\mathcal{Z} := \sum_k \mathcal{Z}_k \stackrel{?}{=} \bigoplus_k \mathcal{Z}_k$ が成り立つ (Goncharov 予想).

等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \stackrel{?}{=} d_k$ は Zagier 予想 [22] と呼ばれる. Zagier は多重ゼータ値の近似値を高速に計算するプログラムを作り, 空間 $\mathcal{Z}_k$ の次元を重さ 12 まで数値計算している. 以下 3.2 節で次元の数値計算方法を述べる.

3.2 次元予想の検証方法

現在, Pari-GP (ver. 2.8) には多重ゼータ値の近似値を高速に計算する組み込み関数が存在する. 整数 $k_1 \in \mathbb{Z}_{>1}, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ の近似値は次で求めることができる:

$$\mathrm{zetamult}([k_1, \ldots, k_r]).$$

例えば, $\zeta(2,1)$ の近似値を計算させると

```
? zetamult([2,1])
%1 = 1.2020569031595942853997381615114499908
```

を得る．これと lindep を使って, 空間 $\mathcal{Z}_k$ の予想次元を低い重さから順に計算していこう．

重さ 0 は $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$ であるので 1 次元である．重さ 1 の多重ゼータ値はないので, $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$ より 0 次元となる．重さ 2 は $\mathcal{Z}_2 = \mathbb{Q}\zeta(2)$ ゆえに $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_2 = 1$ である ($\zeta(2) \neq 0$ はリーマンゼータのオイラー積表示からわかる)．重さが 3 のとき, $\mathcal{Z}_3 = \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(2,1)$ となる．そこで, $\zeta(3)$ と $\zeta(2,1)$ の lindep を計算してみる:

```
? \p 200
? lindep([zetamult([2,1]),zeta(3)])
%10 = [-1, 1]~
```

よって, $\zeta(3) = \zeta(2,1)$ が予想される．これは Euler によって実際に正しい式であることが証明されている．これにより, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_3 = 1$ を得る．

重さが 4 の多重ゼータ値は 4 つある: $\zeta(4), \zeta(3,1), \zeta(2,2), \zeta(2,1,1)$．これらに対し, lindep を計算すると以下のようになる:

```
? lindep([zetamult([3,1]),zeta(4)])
%11 = [-4, 1]~
? lindep([zetamult([2,2]),zeta(4)])
%12 = [4, -3]~
? lindep([zetamult([2,1,1]),zeta(4)])
%13 = [-1, 1]~
```

これは, 空間 $\mathcal{Z}_4 = \mathbb{Q}\zeta(4) + \mathbb{Q}\zeta(3,1) + \mathbb{Q}\zeta(2,2) + \mathbb{Q}\zeta(2,1,1)$ の次元が 1 であることを示唆する．この場合も $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_4 = 1$ は既知である．

最後に, 重さが 5 の場合を見ておこう．全部で 8 個の多重ゼータ値がある．例えば, $\zeta(5)$ と $\zeta(4,1)$ の関係を探してみる:

```
? lindep([zetamult([4,1]),zeta(5)])
%14 = [-2070013214947908776988..., 1927445534226871479690023...]~
```

この場合, 係数が非常に大きいため, $\zeta(5)$ と $\zeta(4,1)$ の間に関係式がなさそうだと判断する (“...”は実際の出力を省略するのに用いている)．これに $\zeta(3,2)$ を加えると

```
? lindep([zetamult([3,2]),zetamult([4,1]),zeta(5)])
%15 = [-2, -6, 1]~
```

となり, 係数が十分小さいことから関係式であろうと判断する．以下, $\zeta(3,2)$ を $\zeta(2,3)$, $\zeta(3,1,1), \zeta(2,2,1), \zeta(2,1,2), \zeta(2,1,1,1)$ たちに順次取り替えて実験する．その際, 出力の係数が大きい場合は残して, 係数が小さければ入れ替えることを繰り返す．これを続けると, 重さ 5 の多重ゼータ値は $\zeta(5)$ と $\zeta(4,1)$ の一次結合であることが示唆される．これに

より, $\dim \mathcal{Z}_5 \overset{?}{=} 2$ という予想に至る.

この実験では, lindep の出力を見て “本当に関係式かどうか” という判断を行う必要がある. 多重ゼータ値の $\mathbb{Z}$ 線形関係式の係数の評価があるのか (少なくとも筆者は) 知らないが, 重さが大きくなるにつれ, (観測的に) 関係式の係数が大きくなるため, Zagier 予想の検証は困難になってくる.

3.3 Broadhurst–Kreimer 予想の検証

Broadhurst–Kreimer 予想 (予想 1) を検証しよう. 簡単のため, 重さ k 深さ r 以下の多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k$ の次元を低い深さから考える.

3.3.1 深さ 1

深さ 1 の場合, $\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k = \mathbb{Q}\zeta(k)$ であるゆえ, この次元は 1 である:

$$\sum_{k>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k x^k = \frac{x^2}{1-x}.$$

3.3.2 深さ 2

空間 $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$ を考える. 空間 $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$ の次元は, $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k \supset \mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k$ であるので, 商空間 $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k\big/\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k$ の次元を求めれば良い:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k\big/\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k = \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k - \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k.$$

例えば, $k=6$ の場合を計算してみると,

```
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1])])
%24 = [-1222183950778189302444..., 3067280543117699134070 9...]~
```

```
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([4,2])])
%21 = [-1, 12, 6]~
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([3,3])])
%22 = [1, -4, -4]~
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([2,4])])
%23 = [-7, -24, 12]~
```

となるので, 商空間 $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_6/\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_6$ は $\zeta(5,1) \mod \mathbb{Q}\zeta(6)$ で生成される. 従って,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_6\big/\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_6 = 1.$$

同様に, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k$ を計算してみると, 次のような表が得られる (興味のある方は, この表を観察して規則を見いだしてみることを勧める):

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	3	5	5	6	5	7	6	8	7

注意 8. Broadhurst–Kreimer 予想によれば, 上記の数列は次のような母関数表示を持つ:

$$\sum_{k>0} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_1\mathcal{Z}_k\right) x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{S}(x) + \mathbb{O}(x)\mathbb{E}(x). \tag{3.1}$$

これは, 最初に Zagier [22] により示唆されたため, Zagier 予想とも呼ぶ.

3.3.3 深さ 3

空間 $\mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_k$ の次元を計算しよう. 方針は, 商空間 $\mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$ の次元を計算することである. 重さ 6 の場合を見てみよう. 先のデータから, $\zeta(6)$ と $\zeta(5,1)$ は空間 $\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_6$ の (数値的な) 基底となることがわかっている. したがって, 商空間 $\mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_6/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_6$ の次元は, 重さ 6 の 3 重ゼータ値たちで $\zeta(6)$ と $\zeta(5,1)$ でかけないものたちの個数である.

```
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([4,1,1])])
%25 = [-1, 32, -16]~
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([3,2,1])])
%26 = [13, -288, -48]~
```

```
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([3,1,2])])
%27 = [-1, 72, -24]~
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([2,3,1])])
%28 = [-1, 72, -24]~
```

```
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([2,2,2])])
%29 = [-3, 0, 16]~
? lindep([zeta(6),zetamult([5,1]),zetamult([2,1,3])])
%30 = [-11, 32, 16]~
```

これにより, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_6/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_6 = 0$ であるので, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_6 = 2$ を得る.

同様に, 深さ 2 の計算データ (数値的な基底) を用いて, 空間 $\mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$ の次元を計算した表が以下である:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\dim \mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	6	6	9	8	14

この表の数列の規則を予想するのは容易ではないと思われる. Broadhurst–Kreimer 予想によれば, 次のような表示を持つ:

$$\sum_{k>0} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathfrak{D}_3 \mathcal{Z}_k \big/ \mathfrak{D}_2 \mathcal{Z}_k\right) x^k \overset{?}{=} \mathbb{E}(x)(\mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{S}(x)) + \mathbb{O}(x)(\mathbb{O}(x)^2 - 2\mathbb{S}(x)). \tag{3.2}$$

3.4 節において, 右辺の母関数の意味を空間 $\mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_k\big/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$ の生成元とその関係式という観点から詳しく説明する.

3.3.4 一般の深さ (Broadhurst–Kreimer 予想)

深さ 3 で行った計算を続けることにより, 商空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k\big/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k$ の次元を帰納的に計算していくことができる. 念のため, $k \leq 16, 4 \leq r \leq 6$ における商空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k\big/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k$ の次元の表を載せておく:

$r\backslash N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	4	10	11
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	6
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

これまで導出した次元の表と予想 1 で与えた右辺の母関数の $x^k y^r$ の係数が一致していることは, 右辺の $x = 0$ でのテイラー展開を見れば容易に確認できる:

```
? o(x)=x^3/(1-x^2);
? E(x)=x^2/(1-x^2);
? S(x)=x^12/(1-x^4)/(1-x^6);
```

```
? BK(x,y)=(1+E(x)*y)/(1-o(x)*y+S(x)*y^2-S(x)*y^4);
? taylor(BK(x,y),x,17)
%14 = 1 + y*x^2 + y*x^3 + y*x^4 + (y^2 + y)*x^5 + (y^2 + y)*x^6
+ (2*y^2 + y)*x^7 + (y^3 + 2*y^2 + y)*x^8 + (y^3 + 3*y^2 + y)*x^9
+ (3*y^3 + 3*y^2 + y)*x^10 + (y^4 + 3*y^3 + 4*y^2 + y)*x^11
+ (2*y^4 + 6*y^3 + 3*y^2 + y)*x^12 + (4*y^4 + 6*y^3 + 5*y^2 + y)*x^13
+ (2*y^5 + 4*y^4 + 9*y^3 + 5*y^2 + y)*x^14
+ (3*y^5 + 10*y^4 + 8*y^3 + 6*y^2 + y)*x^15
+ (6*y^5 + 11*y^4 + 14*y^3 + 5*y^2 + y)*x^16 + O(x^17)
```

3.4 未解決問題

現在, Broadhurst–Kreimer 予想に対して盛んに研究が進められているのは, 予想 1 の深さ 4 の場合であろうが, この話題には紙面の都合上立ち入らない (最近の進捗は Brown の論文 [4, 5] を参照). ここでは, 深さ 3 の商空間 $\mathfrak{D}_3\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_2\mathcal{Z}_k$ の生成元に関する未解決問題である Broadhurst 予想とそれに関連する予想について紹介する.

以下, 簡単のため商空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{Z}_k/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{Z}_k$ を $\mathcal{Z}_{k,r}$ と書く. また, 重さ k の多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ の商空間 $\mathcal{Z}_{k,r}$ での像を $\zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,\ldots,k_r)$ と表記する. 残念ながら適切な文献をあげられないのだが, Broadhurst 予想はおおよそ次のように述べられる:

予想 9. 奇数 $k>0$ に対し, 空間 $\mathcal{Z}_{k,3}$ は純奇 *3* 重ゼータ値で生成される*:*

$$\mathcal{Z}_{k,3} \stackrel{?}{=} \langle \zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2,k_3) \mid k=k_1+k_2+k_3,\ k_i\geq 3:\mathrm{odd}\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

予想 9 は空間 $\mathcal{Z}_{k,3}$ の生成元に関する予想である. この予想と深さ 3 の Broadhurst–Kreimer 予想 (3.2) を眺めると, つぎのような観察が得られる. 予想 (3.2) を重さ奇数に制限すると,

$$\sum_{k>0:\mathrm{odd}} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{k,3}x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^3-2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x)$$

となる. ここで, 右辺の最初の項 $\mathbb{O}(x)^3$ は純奇 3 重ゼータ値の個数の母関数となることに注意する:

$$\mathbb{O}(x)^3=\sum_{k>0}\sharp\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^3_{>1}\mid k=k_1+k_2+k_3,\ k_i\geq 3:\mathrm{odd}\}x^k.$$

予想 9 が正しいとすると, 予想 (3.2) は純奇 3 重ゼータ値たちの間に “$-2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x)$” に対応する $\mathbb{Q}$ 線形関係式が存在することを示唆している. したがって, 予想 9 は空間 $\mathcal{Z}_{k,3}$ の生成元とその関係式を決めるという問題を提唱しており, Broadhurst-Kreimer 予想の精密化を与えている. このような精密化は深さ 4 以上では知られていないが, Broadhurst–Kreimer 予想を理解する上で非常に重要な手がかりになりうる.

ついでながら, 重さが偶数の場合の精密化について, 筆者と Ding Ma との共同研究 [19] を紹介しておこう.

予想 10. 偶数 $k>0$ に対し, 空間 $\mathcal{Z}_{k,3}$ は次の *3* 重ゼータ値で生成される*:*

$$\mathcal{Z}_{k,3} \stackrel{?}{=} \langle \zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2,k_3) \mid k=k_1+k_2+k_3,\ k_1,k_3\geq 3:\mathrm{odd}, k_2\geq 2:\mathrm{even}\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

これは重さが偶数の場合における Broadhurst 予想の類似と見做せる. 実際, 予想 (3.2)

を重さ偶数に制限すると,

$$\sum_{k>0:\mathrm{even}} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{k,3} x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{E}(x)\mathbb{S}(x)$$

であり, $\mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^2$ は予想 10 の右辺の空間の生成元の個数の母関数となっている．論文 [19] では, これら生成元の間に “$-\mathbb{E}(x)\mathbb{S}(x)$” に対応する関係式があることを示している．

注意 11. Broadhurst–Kreimer 予想の “生成元とその関係式” の研究は, 深さ 2 の場合は完全に解決されている．偶数重さの場合, Gangl–金子–Zagier [9] により空間 $\mathcal{Z}_{k,2}$ が $\{\zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2) \mid k=k_1+k_2,\ k_1,k_2 \geq 3 : \mathrm{odd}\}$ で生成されることが示されており, これら生成元の間にカスプ形式 (正確には偶周期多項式) と対応する関係式が存在することも知られている．これは, 重さ偶数の場合の予想 (3.1) の右辺の母関数の説明を与える．奇数重さの場合, Zagier [24] により空間 $\mathcal{Z}_{k,2}$ が $\{\zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2) \mid k=k_1+k_2,\ k_1 \geq 3 : \mathrm{odd}, k_2 \geq 2 : \mathrm{even}\}$ で生成されることが示されている．重さ奇数の場合の予想 (3.1) を鑑みると, これら生成元は基底になると予想される．2 重の場合には, モチビック多重ゼータ値を使うと “基底になること” や “次元の等式” を示すことができることを注意しておく.

4 楕円カスプ形式の臨界値

4.1 楕円カスプ形式の臨界値の計算方法

新形式の臨界値の近似値を計算するプログラムを紹介する.

重さ k レベル N の新形式 $f(z)=\sum_{m>0} a_m q^m$ に対し, $f(z)|W_N = \varepsilon_f f(z)$ とおく．$f(z)$ に対する $I_f(n)$ の近似値を計算するには, $I_f(n)$ の不完全ガンマ関数 $\Gamma(s,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$ を用いた表記を利用する:

$$\begin{aligned}
I_f(n) &= (\int_{1/\sqrt{N}}^\infty + \int_0^{1/\sqrt{N}}) f(it)t^{n-1}dt \\
&= \int_{1/\sqrt{N}}^\infty f(it)t^{n-1}dt + \varepsilon_f N^{k/2-n} \int_{1/\sqrt{N}}^\infty f(it)t^{k-n-1}dt \\
&= \sum_{m>1} a_m \left(\int_{1/\sqrt{N}}^\infty e^{-2\pi mt}t^{n-1}dt + \varepsilon_f N^{k/2-n} \int_{1/\sqrt{N}}^\infty e^{-2\pi mt}t^{k-n-1} \right) dt \\
&= \sum_{m>1} a_m \left(\frac{\Gamma(n, 2\pi m/\sqrt{N})}{(2\pi m)^n} + \varepsilon_f N^{k/2-n} \frac{\Gamma(k-n, 2\pi m/\sqrt{N})}{(2\pi m)^{k-n}} \right).
\end{aligned}$$

2 番目の等式は, 変数変換 $t \to 1/Nt$ である．簡単にわかるように, 不完全ガンマ関数 $\Gamma(s,x)$ は, $x>0$ のとき, $e^{-x}\times$ (x の多項式) という表記を持つ．つまり不完全ガンマ関数

は x が大きくなると急速に 0 に近づく (例: $e^{-2\pi\times 80} = 5.00937... \times 10^{-219}$). この表記を使えば, m を $0 < m < 80\sqrt{N}$ の範囲で足しあげる程度で臨界値 $I_f(n)$ の 200 桁精度での十分な近似値が期待出来る. Pari-GP でのプログラム例をあげる:

```
? p(f,n,k,N,epsilon)=sum(m=1,floor(80*sqrt(N)),
polcoeff(f,m)*(incgam(n,2*Pi*m/sqrt(N))/(2*Pi*m)^n
+epsilon*N^(k/2-n)*incgam(k-n,2*Pi*m/sqrt(N))/(2*Pi*m)^(k-n)));
```

例 12. 重さ 12 のラマヌジャン・デルタ関数 $\Delta(z) = \eta(z)^{24}$ に対する $I_\Delta(1)$ を計算すると, 以下のようになる ($\Delta|W_1 = \Delta$ に注意):

```
? f=eta(q)^24*q;
? p(f,1,12,1,1)
%13 = 0.0059589649895782378538356...
```

例 13. 重さ 8 レベル 2 の新形式 $f(z) = \eta(z)^8\zeta(2z)^8$ に対する $I_f(1)$ を計算する. 先に, ε_f を求める必要があるが, これは $(-i)^k N^{k/2} f(-1/Ni)/f(i)$ の近似値を見れば良い [2].

```
? f2(q)=q - 8*q^2 + 12*q^3 + 64*q^4 - 210*q^5 - 96*q^6 + 1016*q^7 + ..
? [f2(exp(-2*Pi/2))/2^4,f2(exp(-2*Pi))]
%26 = [0.0018396229153702758..., 0.0018396229153702758...]
```

ラマヌジャン・デルタ関数のときと異なり, ε_f を求める際に値を代入する必要があるため, f2(q) は変数 q に関する多項式として定義している. 上記計算から $\varepsilon_f = 1$ がわかる. よって, $I_f(1)$ の近似値は以下で求められる:

```
? p(f2(q),1,8,2,1)
%30 = 0.014074353911391647118492909 14...
```

4.2 新形式の臨界値の空間の次元

先ほどの関数 p を使って, 新形式に対する空間 $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ の次元を計算し, 予想 3 を検証しよう. 新形式の Fourier 展開については, SageMath のデータベースを次のように参照する. SageMath において, "CuspForms(N,k).newforms('x')" と入力すると, $\Gamma_0(N)$ に対する重さ k の新形式の Fourier 展開がベクトル形式で出力されるので, これを成分の小さい方から $f_{k,N,1}, f_{k,N,2}, \ldots, f_{k,N,d}$ と名付ける. 例えば, 重さ 8 レベル 5 の新形式の Fourier 展開のリスト $f_{8,5,1}, f_{8,5,2}$ は以下のようになる:

```
sage: CuspForms(5,8,prec=5).newforms('x')
[q - 14*q^2 - 48*q^3 + 68*q^4 + O(q^5),
 q + x1*q^2 + (-8*x1 + 90)*q^3 + (20*x1 - 152)*q^4 + O(q^5)]
```

[2] $f(z)$ が $z = i$ を零点に持つ場合は $z = 2i$ などに変える必要がある. また, 後で引用する (4.1) 式と SageMath の新形式の Fourier 展開のデータベースを使っても簡単に計算できる.

ここで, 'x1' は新形式の Hecke 固有値 ($\mathbb{Q}$ でないもの) を意味する.

4.2.1　$\Gamma_0(1)$ の場合

先に, 数値実験による次元の表を与える. レベル $N=1$ の場合, 重さ 36 以下 (14 を除いて) において新形式のリストは常に一つとなっている (それを $f_{k,1,1}$ と書く).

k	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_{f_{k,1,1}}$	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3

これは, 予想 3 で述べたように, $\dim S_k(1)$ と一致していることに注意しておく. 以下, 重さ 12 の場合と重さ 24 の場合の計算方法を例解する.

例 14. ラマヌジャン・デルタ関数に対し, 空間 $\mathcal{P}_\Delta^{od}$ の関係式を調べる.

```
? lindep([p(f,1,12,1,1),p(f,3,12,1,1)])
%34 = [691, -1620]~
? lindep([p(f,1,12,1,1),p(f,5,12,1,1)])
%35 = [-691, 2520]~
? lindep([p(f,1,12,1,1),p(f,7,12,1,1)])
%36 = [-691, 2520]~
? lindep([p(f,1,12,1,1),p(f,9,12,1,1)])
%37 = [691, -1620]~
? lindep([p(f,1,12,1,1),p(f,11,12,1,1)])
%39 = [-1, 1]~
```

いくつか観察できる対称性は, 関数等式に他ならない (筆者は周期の比 $I_\Delta(1)/I_\Delta(3) = 1620/691$ に Bernoulli 数が表れる由緒正しい理由が以前からずっと気になっている). この実験から, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_\Delta^{\mathrm{od}} = 1$ が示唆される.

注意 15. 最初に述べたように, $\mathcal{P}_\Delta^{\mathrm{ev}} \cap \mathcal{P}_\Delta^{\mathrm{od}} \stackrel{?}{=} \{0\}$ も観察できる:

```
? lindep([p(f,1,12,1,1),p(f,2,12,1,1)])
%44 = [-5084570324998456543 68..., 8171829176024575747685...]~
```

例 16. 重さ 24 レベル 1 の新形式の Fourier 展開を SageMath から用意する:

```
sage: CuspForms(1,24,prec=10).newforms('x')
[q + x0*q^2 + (-48*x0 + 195660)*q^3 + (1080*x0 + 12080128)*q^4
+ (-15040*x0 + 44656110)*q^5 + (143820*x0 - 982499328)*q^6
+ (-985824*x0 - 147247240)*q^7 + (4857920*x0 + 22106234880)*q^8
+ (-16295040*x0 - 8700375483)*q^9 + O(q^10)]
```

ここで, x0 は新形式の係数の乗法性から $a_2 * a_3 - a_6 = 0$ を解くことで計算できることに注意する. この根たちをベクトル v と置く:

```
? v=real(polroots((-48*x+195660)*x-(143820*x-982499328)))
%46 = [-4016.3511717162451393..., 5096.35117171624513931555...]~
```

重さ 24 の新形式の Fourier 展開を x0 の多項式として Pari-GP に定義し, 関係式の計算をする:

```
? f(x0)=q + x0*q^2 + (-48*x0 + 195660)*q^3 + (1080*x0 + 12080128)*q^4 + ...
```

```
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1)])
%51 = [-4258290237037830..., 4990302813300383...]~
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1),p(f(v[1]),5,24,1,1)])
%52 = [-236364091, 3466670130, -6742820700]~
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1),p(f(v[1]),7,24,1,1)])
%53 = [-24345501373, 299682070380, -1100428338240]~
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1),p(f(v[1]),9,24,1,1)])
%54 = [-22927316827, 271855320660, -1572040483200]~
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1),p(f(v[1]),11,24,1,1)])
%55 = [11109112277, -130589249868, 953704559808]~
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1),p(f(v[1]),13,24,1,1)])
%56 = [11109112277, -130589249868, 953704559808]~
```

したがって, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_{\Delta}^{\mathrm{od}} = 2$ が示唆される. しかし, 関係式の係数が大きいので, 本当に関係式を与えているのかやや懐疑的である. こういう場合は, 桁数の設定を変えて係数の変化をみるといい:

```
? \p 230
   realprecision = 231 significant digits (230 digits displayed)
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1)])
%57 = [-17866559816892285640..., 20937873830849700216...]~
? lindep([p(f(v[1]),1,24,1,1),p(f(v[1]),3,24,1,1),p(f(v[1]),5,24,1,1)])
%58 = [236364091, -3466670130, 6742820700]~
```

一行目の出力は変わったのに対し, 関係式だと思われる二行目の出力は変わっていない. これは, 230 桁でもこの一次結合が 0 に近いことを示唆するので, より強力なサポートを得たことになる. いずれにしても, このあたりの判断には注意が必要である.

注意 17. レベル 1 の場合の予想 3 に対し, 具体的な関係式 (2 サイクル関係式, 3 サイクル関係式, Kohnen–Zagier 関係式 [14]) を使うことで, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_f^{\mathrm{od}} \leq \dim_{\mathbb{C}} S_k(1)$ を得ることができる.

4.2.2 $\Gamma_0(2)$ の場合

予想 3 を検証するには, $\Gamma_0(2)$ の新形式の W_2 に対する固有値の情報まで必要である. 以下に, $\dim S_k^{new}(2)^{\pm}$ の次元の表を与える.

k	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$\dim S_k^{new}(2)^+$	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1
$\dim S_k^{new}(2)^-$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	2	1	1	1	2	1

ここに現れる次元 2 の部分はいずれも Hecke 固有値が 2 次の代数的数となる新形式たちである. したがって, 上記表における限りは, 実質 $f_{k,2}^{\pm}$ とすれば, 各 k に対して唯一に定まる. これに対し, レベル 1 のときと同様にして空間 $\mathcal{P}_{f_{k,2}^{\pm}}^{\mathrm{od}}$ の次元を数値計算すると, その次元の表が上記の表と一致することが確かめられる.

4.3 $\Gamma_0(2)$ の新形式の臨界値の具体的な関係式

真新しいアイデアではないが, $\Gamma_0(2)$ の新形式の臨界値の具体的な $\mathbb{Q}$ 線形関係式族を与える方法をひとつ紹介する. ここで得られる関係式を使って空間 $\mathcal{P}_f^{\mathrm{od}}$ の次元を評価し, いくつか考察を述べて本稿を終わる.

まず, 関係式の母関数 (周期多項式) を用いた表示を与える. 重さ $2k$ のカスプ形式 $f(z)$ に対し, 周期多項式 $r_f(x,y)$ を次で定める:

$$r_f(x,y) := \int_0^{i\infty} f(z)(x-yz)^{2k-2}dz = i \sum_{\substack{n_1+n_2=2k \\ n_1,n_2\geq 1}} (-i)^{n_2-1}\binom{2k-2}{n_2-1} I_f(n_2)x^{n_1-1}y^{n_2-1}.$$

これは, 臨界値 $I_f(n)$ の (多項式) 母関数表示となっていることに注意する. 偶数 $k>0$ に対し, 2 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x,y]$ の $k-2$ 次の斉次多項式からなる部分空間を $V_k := \mathbb{Q}[x,y]_{(k-2)}$ と表記する. 空間 V_k への $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を以下で定め, これを線形に群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})]$ に拡張しておく:

$$p(x,y)\big|\gamma = p(ax+by, cx+dy) \quad (\forall\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})).$$

定理 18. 新形式 $f(z)\in S_{2k}^{new}(2)^{\pm}$ に対し, 次が成り立つ:

$$\mp 2^{k-1} r_f(x,y) = r_f(x,y)\big|\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0\end{smallmatrix}\right)\right).$$

証明. $f(z)=\sum_{m>0} a_m q^m$ に対し, $U_2 f(z) := \sum_{m>0} a_{2m}q^m$ と定義する. Atkin-Lehner [1, Theorem 3] の結果より,

$$U_2 f(z) = a_2 f(z) = \mp 2^{k-1} f(z) \tag{4.1}$$

が成り立つ. 作用素 U_2 は $U_2 f(z) = \frac{1}{2} f\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{z+1}{2}\right)$ と表せるので, 周期多項式への作用に書き直すことで

$$r_{U_2 f}(x,y) = r_f(x,y)\Big|\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&2\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1&1\\-2&0\end{smallmatrix}\right)\right)$$

を得る (この等式のアイデアは [16, 23] を参照). これと (4.1) を合わせて主張を得る. □

定理18から得られる臨界値 $I_f(n)$ たちの具体的な関係式を明示しよう. 整数 $m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1$ に対し, 整数 $b_{\pm}\binom{m_1,m_2}{n_1,n_2}$ を以下で定める [3]:

$$b_{\pm}\binom{m_1,m_2}{n_1,n_2} = \delta_{n_1,m_1}(2^{m_2-1} \pm 2^{\frac{m_1+m_2}{2}-1}) + 2^{m_2-1}\binom{m_1-1}{n_1-1} - (-2)^{m_2-1}\binom{m_1-1}{n_2-1}.$$

ただし, δ_{n_1,m_1} はクロネッカーデルタ記号である. 定理 18 から直ちに次の系を得る.

系 19. 整数 $n_1, n_2 \geq 1$ $(n_1+n_2=2k)$ に対し, 次が成り立つ:

$$\sum_{\substack{m_1+m_2=2k\\ m_1,m_2\geq 1}} (-i)^{m_2-1}\binom{2k-2}{m_2-1} b_{\pm}\binom{m_1,m_2}{n_1,n_2} I_f(m_2) = 0.$$

関係式の係数行列 $B_{2k}^{od,\pm}$ を考えよう:

$$B_{2k}^{od,\pm} = \left((-1)^{(m_2-1)/2}\binom{2k-2}{m_2-1} b_{\pm}\binom{m_1,m_2}{n_1,n_2}\right)_{\substack{m_1+m_2=2k, m_i\geq 1:\mathrm{odd}\\ n_1+n_2=2k, n_i\geq 1}}.$$

ただし, 列と行はそれぞれ (m_1, m_2) と (n_1, n_2) を走るとする. 定義から, 新形式 $f \in S_{2k}^{new}(2)^{\pm}$ に対し, 列を適当に並べ替えると

$$B_{2k}^{od,\pm} \cdot \begin{pmatrix} I_f(1) \\ I_f(3) \\ \vdots \\ I_f(2k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 行列 $B_{2k}^{od,\pm}$ の階数を計算することにより, 空間 P_f^{od} の上限を得ることができる:

系 20. 新形式 $f \in S_{2k}^{new}(2)^{\pm}$ に対し, 次の不等式が成り立つ:

$$\dim_{\mathbb{Q}} P_f^{\mathrm{od}} \leq k - \operatorname{rank} B_{2k}^{od,\pm}.$$

[3] 整数 $b_{\pm}\binom{m_1,m_2}{n_1,n_2}$ は Ding Ma [18] によるモチビック 2 重 Euler 和 (レベル 2 の 2 重ゼータ値) へのガロア余作用の計算にも表れる. 具体的な関係はまだ明らかになっていないが, とても興味深い整数である.

係数が具体的なので, 行列 $B_{2k}^{od,\pm}$ の階数は非常に高速に計算できる. 重さ 36 以下では次のようになる:

k	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$k-\mathrm{rank}\, B_{2k}^{od,+}$	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1
$k-\mathrm{rank}\, B_{2k}^{od,-}$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	2	1	1	1	2	1

上記の表は, 4.2.2 節の $\dim S_k^{new}(2)^\pm$ の表と一致していることに注意する. この一致は, 重さ 36 以下では定理の関係式が $\Gamma_0(2)$ の新形式の臨界値たちのすべての関係式を生成することを示唆している. これを述べておこう:

予想 21. 新形式 $f \in S_k^{new}(2)^\pm$ の臨界値たちの $\mathbb{Q}$ 線形関係式は系 *19* で得られる線形関係式からすべて得られる.

Mathematica の組み込み関数 "FindGeneratingFunction" を使って, 上記表の数列の母関数表示を計算させると次のような表示を得る:

$$\sum_{k>0}(k-\mathrm{rank}\, B_{2k}^{od,+})x^{2k} \stackrel{?}{=} \frac{x^8}{(1-x^6)(1-x^8)},$$
$$\sum_{k>0}(k-\mathrm{rank}\, B_{2k}^{od,-})x^{2k} \stackrel{?}{=} \frac{x^{10}(1+x^4-x^6)}{(1-x^6)(1-x^8)}.$$

この表示と予想 21 を併せると, 次の $S_k^{new}(2)^\pm$ の次元公式に関する予想が得られる:

$$\sum_{k>0}\dim_{\mathbb{C}} S_{2k}^{new}(2)^+ x^{2k} \stackrel{?}{=} \frac{x^8}{(1-x^6)(1-x^8)},$$
$$\sum_{k>0}\dim_{\mathbb{C}} S_{2k}^{new}(2)^- x^{2k} \stackrel{?}{=} \frac{x^{10}(1+x^4-x^6)}{(1-x^6)(1-x^8)}.$$

これは, [18, Conjecture 4] におけるレベル $N=2$ に対する予想と等しい. これらはどれも数値実験による予想にすぎないが, 臨界値の関係式や次元の研究が $S_k^{new}(N)^\pm$ の次元公式の研究につながるのはとても興味深い.

謝辞

今回, 講演の機会をくださいました世話人の方々に感謝の意を表したいと思います. ありがとうございました.

参考文献

[1] A. O. L. Atkin, J. Lehner, *Hecke Operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann., **185** (1970), 134–160.

[2] Y. André, *Ambiguity theory, old and new*, arXiv:0805.2568.

[3] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math., **175**(2) (2012), 949–976.

[4] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, arXiv:1301.3053.

[5] F. Brown, *Zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of a punctured elliptic curve*, arXiv:1504.04737.

[6] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393**, no. 3-4 (1997), 403–412.

[7] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, GTM **193**.

[8] P. Deligne, A.B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ećole Norm. Sup. **38** (2005), 1–56

[9] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, In:Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.

[10] A. B. Goncharov, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, Duke Math. J., **110**(3) (2001), 397–487.

[11] H. Hida, Y. Maeda, *Non-abelian base change for totally real fields*, Pacfic J. Math. **181**(3), 189–217 (1997).

[12] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.

[13] M. Kaneko, M. Noro and K.Tsurumaki, *On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values*, Software for Algebraic Geometry, IMA 148, 47–58, (2008).

[14] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood (1984), 197–249.

[15] M. Kontsevich, D. Zagier, *Periods*, in Engquist, Björn (ed.) et al., Mathematics unlimited - 2001 and beyond, Springer Verlag, 771–808 (2001).

[16] S. Lang, *Introduction to modular forms*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, No. 222. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1976).

[17] A.J. Lazarus, *On the class number and unit index of the simplest quartic fields*, Nagoya Math. J., **121** (1991) 1–13.

[18] D. Ma, *Connections between double zeta values relative to μ_N, Hecke operators T_N, and newforms of level $\Gamma_0(N)$ for $N = 2, 3$*, arXiv:1511.06102

[19] D. Ma, K. Tasaka, *On triple zeta values of even weight and their connections with even period polynomials*, arXiv:1603.01013.

[20] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 783–804.

[21] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149**(2) (2002), 339–369.

[22] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.

[23] D. Zagier, *Hecke operators and periods of modular forms*, Israel Math. Conf. Proc. 3 (1990), 321–336.

[24] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values* $\zeta(2, \ldots, 2, 3, 2, \ldots, 2)$, Ann. of Math., **175**(2) (2012), 977–1000.