*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*
**B53** (2015), 199–218

# 多重ゼータ値, 多重 Eisenstein 級数, および周期多項式 (Multiple zeta values, multiple Eisenstein series, and period polynomials)

By

田坂 浩二 (Koji TASAKA)*

**Abstract**

本稿では, 多重ゼータ値とモジュラー形式の間の関係について議論する. 最近, Francis Brown により, 3 以上の奇数をインデックスにもつ多重ゼータ値 (純奇多重ゼータ値) の空間の次元に関する新しい予想が提唱された. 彼の予想は, 純奇多重ゼータ値の線形関係式がモジュラー形式と密接に関わっていることを示唆している. 以下では, 純奇多重ゼータ値の線形関係式と偶周期多項式を対応させる事により, 彼の予想の深さ 4 の場合を部分的に解決した我々の仕事 [17] を紹介する. また, 関連する多重 Eisenstein 級数の話題についても触れる.

In this paper, we will be interested in connections between the theory of elliptic modular forms and multiple zeta values (MZVs). Recently, Francis Brown has proposed a new conjecture on the dimension of the space spanned by MZVs at the sequences indexed by odd integers greater than 1 (called totally odd MZV). His conjecture suggests that the modular forms and the linear relations among totally odd MZVs are deeply related with each other. We will give a partial answer to his conjecture in the case of depth 4 by showing that there is an injective linear map from the space of even period polynomials to the space of linear relations among totally odd MZVs. We shall also announce a result related with multiple Eisenstein series.

## §1. 序文

本稿では, $\Gamma_1 := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式 (特に, 周期多項式) と関連して得られる多重ゼータ値の線形関係式について, 以下の (2.1) で定義される整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ を係数に持つ行列を用いて, 知られている結果や最近の著者の論文 [17] の結果の概略を述べる. 整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ は, $r=2$ の場合, 偶周期多項式, 伊原余作用, 2 重 Eisenstein 級数といったもの

Received April 7, 2014. Revised September 29, 2014.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11F32, Secondary 11F67.
*Key Words*: *Multiple zeta values, Multiple Eisenstein series, Period polynomials.*
This work is partially supported by Japan Society for the Promotion of Science, Grant-in-Aid for JSPS Fellows (No. 241440).
*Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, JAPAN.
e-mail: koji.tasaka@math.nagoya-u.ac.jp

に現れる．この関係から, Zagier [18, 19] により示唆された “モジュラー形式が 2 重ゼータ値の間の線形関係式を与える” ことに対する説明が得られる (命題 2.3, 2.4, 注意 2.6)．論文 [17] の主結果は, 命題 2.3 の部分的な一般化 (定理 2.7) とある行列 $C_{k,r}$ のランクに対する Brown 予想 (2.11) の $r=4$ の場合の部分的な解決である．

これらの研究の一つの動機となる問題が Brown [4] による純奇多重ゼータ値予想である．これを述べ, 二つ目の結果を述べる．自然数の $r$ 組 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{>0}^r$ $(k_r\geq 2)$ に対し, 多重ゼータ値を次で定義する:

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\dots,k_r)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

以下, $\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k_1+\cdots+k_r$ を重さ, $\mathrm{dep}(\mathbf{k})=r$ を深さと呼ぶ．慣例的に 1 は重さ 0 深さ 0 の多重ゼータ値だと理解する．重さ $k$ 深さ $r$ 以下の多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k^{(r)}$ とおく ($r\notin\{1,2,\dots,k-1\}$ では $\mathcal{Z}_k^{(r)}:=\{0\}$ としておく)．次数付き可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}:=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$ ($\mathcal{Z}_k:=\mathcal{Z}_k^{(k-1)},\mathcal{Z}_0:=\mathbb{Q}$) における $\zeta(2)$ が生成するイデアルを $(\zeta(2))$ とし, 商ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k^{(r)}\big/\big(\mathcal{Z}_k^{(r-1)}+(\zeta(2))\cap\mathcal{Z}_k^{(r)}\big)$ を $\mathcal{Z}_{k,r}$ と表す．空間 $\mathcal{Z}_{k,r}$ はフィルター代数 $\mathcal{Z}/(\zeta(2))$ の次数化 $\mathrm{gr}\big(\mathcal{Z}/(\zeta(2))\big)\cong\bigoplus_{k,r\geq 0}\mathcal{Z}_{k,r}$ の $(k,r)$ 次成分であることに注意する．商空間 $\mathcal{Z}_{k,r}$ において, 重さ $k$ 深さ $r$ の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ の属す類を $\zeta_{\mathfrak{D}}(\mathbf{k})$ と表す．全ての $k_i$ が 3 以上の奇数であるような $\zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,\dots,k_r)$ を純奇多重ゼータ値とよび, 重さ $k$ 深さ $r$ の純奇多重ゼータ値が張る $\mathcal{Z}_{k,r}$ の部分空間を $\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}$ と表記する:

$$\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}:=\langle\zeta_{\mathfrak{D}}(\mathbf{k})\in\mathcal{Z}_{k,r}\mid\mathbf{k}\in S_{k,r}\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

但し, 集合 $S_{k,r}$ は重さ $k$ 深さ $r$ の純奇インデックスの集合である．

$$S_{k,r}=\{(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 3}^r\mid k_1+\cdots+k_r=k,\ k_1,\dots,k_r:\mathrm{odd}\}.$$

空間 $\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}$ に対する次の次元予想を純奇多重ゼータ値予想と呼ぶ:

**予想 1.1.** 次が成り立つ．

$$1+\sum_{k>r>0}\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}x^ky^r\overset{?}{=}\frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2}.$$

ここで, $\mathbb{O}(x)=\frac{x^3}{1-x^2}=x^3+x^5+x^7+x^9+\cdots$, $\mathbb{S}(x)=\frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)}=x^{12}+x^{16}+x^{18}+\cdots$.

**注意**. 空間 $\mathcal{Z}_{k,r}$ の次元予想は Broadhurst-Kreimer 予想と呼ばれ ([5]), 現在の多重ゼータ値の研究において中心的な問題となっている．最近 Brown[4] によって, モチビック版の Broadhurst-Kreimer 予想がある Lie 環 (depth-graded motivic Lie algebra) のホモロジーに関する予想に言い換えられた ([4, Conjecture 4])．彼の予想 (Conjecture 4) が正しければ, モチビック版の予想 1.1(uneven part of motivic Broadhurst-Kreimer conjecture [4, Conjecture 5]) が従うことが期待される (この期待には, 実行しなくてはいけない計算がまだ残っている)．

空間 $\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}$ の次元の自明な上限 $|S_{k,r}|$ の母関数が $\mathbb{O}(x)^r = \sum_{k>0}|S_{k,r}|x^k$ であることと, $\Gamma_1$ に関する重さ $k$ のカスプ形式が張る $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $S_k(\Gamma_1)$ と表すと $\mathbb{S}(x) = \sum_{k>0}\dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_1)x^k$ が成り立つことに注意する. 予想 1.1 の右辺の $y=0$ におけるテイラー展開は

$$\frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2} = 1+\mathbb{O}(x)y+\big(\mathbb{O}(x)^2-\mathbb{S}(x)\big)y^2+\big(\mathbb{O}(x)^3-2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x)\big)y^3 \\ +\big(\mathbb{O}(x)^4-3\mathbb{O}(x)^2\mathbb{S}(x)+\mathbb{S}(x)^2\big)y^4+\cdots$$

である. 従って, 予想 1.1 は純奇多重ゼータ値の間の線形関係式がカスプ形式と密接に関係して存在することを示唆している. 現在のところ, 2 重次数付き $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathrm{gr}\big(\mathcal{Z}/(\zeta(2))\big)$ の代数生成元の個数に対する Goncharov [8, Theorems 2.4 and 2.5] の結果 ([10, Proposition 18], [11, Theorem 19] 等も参照) より次がわかる:

$$\sum_{k>0}\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,2}^{\mathrm{odd}}x^k \le \sum_{k>0}\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,2}x^k \le \mathbb{O}(x)^2-\mathbb{S}(x),$$
$$\sum_{k>0}\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,3}^{\mathrm{odd}}x^k \le \sum_{k>0}\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_{k,3}x^k \le \mathbb{O}(x)^3-2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x).$$

ここで, $\sum_{k>0}a_kx^k \le \sum_{k>0}b_kx^k$ は, 全ての $k>0$ に対し, $a_k \le b_k$ を意味する. (注意 : Gangl-金子-Zagier [7, Theorem 2] により $\mathcal{Z}_{k,2}^{\mathrm{odd}} = \mathcal{Z}_{k,2}$ が知られるが, $\mathcal{Z}_{k,3}^{\mathrm{odd}} \stackrel{?}{=} \mathcal{Z}_{k,3}$ は未解決である.) 論文 [17] の結果を用いると, $r=4$ の場合に次のことがわかる.

**定理 1.2.** *予想 2.8 の $r=4$ の場合が正しければ, 次が成り立つ.*

$$\sum_{k>0}\dim\mathcal{Z}_{k,4}^{\mathrm{odd}}x^k \le \mathbb{O}(x)^4-3\mathbb{O}(x)^2\mathbb{S}(x)+\mathbb{S}(x)^2.$$

本稿の内容は以下である. §2 は, 深さ 2 の場合の偶周期多項式と純奇 2 重ゼータ値の線形関係式の対応を復習することから始め (§2.1, 2.2), 整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ を成分に持つある行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の考察を行う. (2.1) で天下りに定義する $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ と伊原作用との関係を明確にすることで, 純奇多重ゼータ値の線形関係式とモジュラー形式の関係が行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ を介して得られる. §3 では, 純奇多重ゼータ値の級数シャッフル積 (調和積) に関する代数構造について言及し, 主結果を用いて, 定理 1.2 の証明の概略を述べる. §4 において, 整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ が多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開から得られる事を示す (定理 4.2). 現状, このことによる多重ゼータ値への新しい応用は得られていないが, この機に多重 Eisenstein 級数に関する問題点をあげてみる. §5 では, 最近 Zagier [20] により示された, 奇数重さの 2 重ゼータ値の線形関係式と周期多項式との関係を整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ を用いて説明し, 一般化に対する観察を述べる.

## §2. 偶周期多項式と純奇多重ゼータ値の関係式

序文冒頭で述べた整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}}$ を次で定める: $k_1,\dots,k_r,s_1,\dots,s_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$\varepsilon_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}}=\delta_{(s_1,\dots,s_r),(k_1,\dots,k_r)}+\sum_{i=1}^{r-1}\delta_{(\hat{s}_1,\dots,\hat{s}_{i+1},\dots,s_r),(k_1,\dots,\hat{k}_i,\hat{k}_{i+1},\dots,k_r)}C^{s_1}_{k_i,k_{i+1}}. \tag{2.1}$$

ここで, $\delta_{(s_1,\dots,s_r),(k_1,\dots,k_r)}$ は

$$\delta_{(s_1,\dots,s_r),(k_1,\dots,k_r)}=\begin{cases}1 & \text{if } s_i=k_i \text{ for all } i\in\{1,\dots,r\}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

で定め (クロネッカー記号), 整数 $C^s_{k,k'}$ は, $s,k,k'\geq 1$ に対し

$$C^s_{k,k'}=(-1)^k\binom{s-1}{k-1}+(-1)^{k'-s}\binom{s-1}{k'-1}$$

により定める. また, $(s_1,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_r)=(s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_r)$ とする. $|S_{k,r}|\times|S_{k,r}|$ 行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ を以下で定める:

$$\mathcal{E}_{k,r}=\left(\varepsilon_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}}\right)_{\substack{(s_1,\dots,s_r)\in S_{k,r}\\(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}}}.$$

但し, $(s_1,\dots,s_r)$ が行を走り $(k_1,\dots,k_r)$ が列を走る. 本節では, 行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の性質を調べる.

### §2.1. 周期多項式

文献 [7, §5] や [13, §1.1] などを参考に, 周期多項式の復習をする. 以下, $k$ は偶数であると仮定する. 2 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x_1,x_2]$ の $k-2$ 次斉次多項式のなす部分空間を $V_k:=\mathbb{Q}[x_1,x_2]_{(k-2)}$ とおく. 多項式 $f(x_1,x_2)\in V_k$ への $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}):=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$(但し, $I$ は単位行列) の作用を $f(x_1,x_2)\big|\gamma:=f(ax_1+bx_2,cx_1+dx_2)$ により定め, この作用を群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})]$ に自然に拡張しておく. $S=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $T=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ と置くと, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})=\langle S,T\rangle$ である. $U=ST$ と置いておく ($U^3=I$ である). これらの記号のもと, 周期多項式の空間 $W_k$ を以下で定める:

$$W_k:=\{p(x_1,x_2)\in V_k \mid p(x_1,x_2)\big|(I+S)=p(x_1,x_2)\big|(I+U+U^2)=0\}.$$

周期多項式を定める上記関係式は, カスプ形式 $f\in S_k(\Gamma_1)$ の周期

$$r_n(f):=\int_0^\infty f(it)t^n dt$$

が満たす $\mathbb{Q}$ 線形関係式から来ている. 実際, $\varphi_f:\Gamma_1\to V_k\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ を $\varphi_f(\gamma)=\int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)}f(z)(x_1-x_2z)^{k-2}dz$ により定めると, $\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ に対し $\varphi_f(\gamma_1\gamma_2)=\varphi_f(\gamma_1)+\varphi_f(\gamma_2)\big|\gamma_1^{-1}$(つ

まり, $\varphi_f$ は 1-cocycle) を満たすので, $\varphi_f(S)(=\varphi_f(U)) \in W_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ となる. 周期の間の線形関係式は, 多項式 $\varphi_f(S)$ の係数が周期 $r_n(f)$ の定数倍となることに注意すると, $\varphi_f(S)\big|(I+S)=\varphi_f(S)\big|(I+U+U^2)=0$ から得られる.

$\varepsilon=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ に対し, $W_k\big|\varepsilon=W_k$ がわかる. 従って, $W_k$ の $\varepsilon$ による固有空間を $W_k^{\pm}=\{p\in W_k \mid p\big|\varepsilon=\pm p\}$ とおくと, $W_k=W_k^+\oplus W_k^-$ である. このとき, Eichler-志村 [16, Chapter 8] によるカスプ形式と 1 次のパラボリックコホモロジーとの対応は次のように述べられる (参照:[13, p.200]):

**定理 2.1.** $\mathbb{C}$ 線形写像 $\varphi^{\pm}: S_k(\Gamma_1)\to W_k^{\pm}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ を $f\mapsto \varphi_f^{\pm}(x_1,x_2):=\frac{1}{2}\varphi_f(S)\big|(1\pm\varepsilon)$ により定めると, $\varphi^+$ は単射かつ像の余次元が 1 となり, $\varphi^-$ は同型写像となる.

空間 $W_k$ を定める関係式は 1 本の関係式に纏められる (参照:[7, §5]). これにより, 空間 $V_k^+=\bigoplus_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}\mathbb{Q}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}$ の部分空間 $W_k^{+,0}$ を

$$W_k^{+,0}:=\{p(x_1,x_2)\in V_k^+ \mid p(x_1,x_2)-p(x_2-x_1,x_2)+p(x_2-x_1,x_1)=0\}$$

により定めると, $W_k^+=W_k^{+,0}\oplus\mathbb{Q}(x_1^{k-2}-x_2^{k-2})$ となる. 従って, 定理 2.1 の帰結として次を得る.

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_k^{+,0}=\dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_1). \tag{2.2}$$

**例 2.2.** $k=12$ に対する空間 $W_k^{+,0}$ の基底は $x_1^2x_2^8-3x_1^4x_2^6+3x_1^6x_2^4-x_1^8x_2^2$ である.

## § 2.2. Baumard-Schneps の結果

**行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の左零化ベクトル.** Baumard-Schneps [6] は行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の左零化ベクトルが偶周期多項式と 1 対 1 対応する事を示した:

**命題 2.3.** ([6, Proposition 3.2]) 行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の左零化ベクトル (任意の $(k_1,k_2)\in S_{k,2}$ に対し, $\sum_{(s_1,s_2)\in S_{k,2}} a_{s_1,s_2}\varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}}=0$ を満たす有理数成分の行ベクトル $(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}$ を意味する) が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\ker\mathcal{E}_{k,2}$ とおく. このとき, 次は同型写像となる.

$$\begin{aligned} W_k^{+,0} &\longrightarrow \ker\mathcal{E}_{k,2}\\ \sum_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} a_{k_1,k_2}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1} &\longmapsto (a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}.\end{aligned}$$

ここでは, 偶周期多項式と整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}}$ との関係を明確にするために, [17, Proposition 2.3] の証明方法に沿った, 写像の well-defined 性 (単射性) のみ確かめる. 空間 $W_k^{+,0}$ を特徴付ける式 $p(x_1,x_2)-p(x_2-x_1,x_2)+p(x_2-x_1,x_1)$ の斉次部分の展開を計算すると, 以下が確かめられる ($k=s_1+s_2$ とおく):

$$x_1^{s_1-1}x_2^{s_2-1}-(x_2-x_1)^{s_1-1}x_2^{s_2-1}+(x_2-x_1)^{s_1-1}x_1^{s_2-1}=\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 1}}\varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}.$$

($\varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}} = \delta_{(s_1,s_2),(k_1,k_2)} + (-1)^{k_1}\binom{s_1-1}{k_1-1} + (-1)^{k_2-s_1}\binom{s_1-1}{k_2-1}$ に注意.) 従って, $p(x_1,x_2) = \sum_{(s_1,s_2)\in S_{k,2}} a_{s_1,s_2}x_1^{s_1-1}x_2^{s_2-1} \in W_k^{+,0}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
0 &= p(x_1,x_2) - p(x_2-x_1,x_2) + p(x_2-x_1,x_1) \\
&= \sum_{(s_1,s_2)\in S_{k,2}} a_{s_1,s_2}\bigl(x_1^{s_1-1}x_2^{s_2-1} - (x_2-x_1)^{s_1-1}x_2^{s_2-1} + (x_2-x_1)^{s_1-1}x_1^{s_2-1}\bigr) \\
&= \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2\geq 1}} \Bigl(\sum_{(s_1,s_2)\in S_{k,2}} a_{s_1,s_2}\varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}}\Bigr)x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}
\end{aligned}
$$

となるので, 行ベクトル $(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}$ は行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の左零化ベクトルであることがわかる.

**行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の右零化ベクトル.** この部分節では, 行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の右零化ベクトルと言うと, 任意の $(s_1,s_2)\in S_{k,2}$ に対し, $\sum_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} \varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}}a_{k_1,k_2} = 0$ を満たす有理数成分の列ベクトル ${}^t(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}$ のことを言う (§2.3 以降, 右零化ベクトルは行列 ${}^t\mathcal{E}_{k,2}$ の左零化ベクトルとして扱われる).

**命題 2.4.** ([6, Proposition 3.4]) *行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の右零化ベクトル ${}^t(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}$ に対し, 次が成り立つ:*

$$\sum_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} a_{k_1,k_2}\zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2) = 0.$$

*この等式は, $\sum_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} a_{k_1,k_2}\zeta(k_1,k_2) \in \mathbb{Q}\cdot\zeta(k)$ を意味する.*

**(証明の概略)**. ここでは, 伊原余作用 $D_s$ を使った証明を与える (この証明は大阪大学の安田正大さんの示唆による). 記号の煩雑を避けるため, 伊原余作用の定義や計算方法は [3, Definition 4.4, §5] を参照する. 整数 $k>0$, $(s_1,s_2),(k_1,k_2)\in S_{k,2}$ とモチビック 2 重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,k_2)$(定義は [2, Definition 2.1] を参照) に対し, $D_{s_1}(\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,k_2))$ を計算する. これを計算するには, 列 $(0;1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2-1};1)$ から $s_1+2$ 個の成分からなる部分列で, 1 が 2 個あり最初と最後が等しくないものを取り出せばよい (それ以外の部分列が与えるモチビック反復積分は [3, §5.1] の条件 **R1** から 0 である). 左から順に部分列の取り出し方を考えると, 以下の 3 つの場合に限られることがわかる:

$$
\begin{aligned}
&(0;1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1};1) && s_1=k_1 \text{ のとき}, \\
&(1;\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{s_1-k_1};0) && s_1\geq k_1 \text{ のとき}, \\
&(0;\underbrace{0,\ldots,0}_{s_1-k_2},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2-1};1) && s_1\geq k_2 \text{ のとき}.
\end{aligned}
$$

従って, [3, §5.1] の条件 **R0, R2, R3** を用いると, 以下を得る:

$$D_{s_1}(\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,k_2)) = \varepsilon_{\binom{s_1,s_2}{k_1,k_2}}\pi(\zeta^{\mathfrak{m}}(s_1)) \otimes \zeta^{\mathfrak{m}}(s_2).$$

すると, 行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の右零化ベクトル ${}^t(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}}$ に対し

$$\sum_{(s_1,s_2)\in S_{k,2}} D_{s_1}\left(\sum_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} a_{k_1,k_2}\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,k_2)\right) = 0$$

となるので, Brown の結果 [2, Theorem 3.3] と Derinfel'd 結合子が誘導する写像 $per$ の性質 [2, (2.19)] から主張を得る. □

**例 2.5.** $k=12$ のときの具体例を見る. 考える行列は

$$\mathcal{E}_{12,2} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\binom{3,9}{3,9}} & \varepsilon_{\binom{3,9}{5,7}} & \varepsilon_{\binom{3,9}{7,5}} & \varepsilon_{\binom{3,9}{9,3}} \\ \varepsilon_{\binom{5,7}{3,9}} & \varepsilon_{\binom{5,7}{5,7}} & \varepsilon_{\binom{5,7}{7,5}} & \varepsilon_{\binom{5,7}{9,3}} \\ \varepsilon_{\binom{7,9}{5,9}} & \varepsilon_{\binom{7,5}{5,7}} & \varepsilon_{\binom{7,5}{7,5}} & \varepsilon_{\binom{7,5}{9,3}} \\ \varepsilon_{\binom{9,3}{3,9}} & \varepsilon_{\binom{9,3}{5,7}} & \varepsilon_{\binom{9,3}{7,5}} & \varepsilon_{\binom{9,3}{9,3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 6 \\ -15 & -14 & 15 & 15 \\ -27 & -42 & 42 & 28 \end{pmatrix}$$

である. 左零化域は $(1,-3,3,-1)$ で張られ, 例 2.2 の $W_{12}^{+,0}$ の基底と対応する. 一方, 右零化域は ${}^t(14,75,84,0)$ で張られる. これは次の関係式を与える:

$$14\zeta_{\mathfrak{D}}(3,9) + 75\zeta_{\mathfrak{D}}(5,7) + 84\zeta_{\mathfrak{D}}(7,5) = 0.$$

**注意 2.6.** (i) 不等式 (1.1) の証明について言及しておく. (1.1) の右辺の $x^k$ の係数は $|S_{k,2}| - \dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_1)$ ($k$ : 偶数) であることに注意する. 命題 2.4 より, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{k,2}^{\mathrm{odd}} \le |S_{k,2}| - \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{E}_{k,2}$ である. 命題 2.3 と等式 (2.2) から

$$\dim_{\mathbb{Q}} \ker \mathcal{E}_{k,2} = \dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_1) \tag{2.3}$$

を得るので, 主張が従う.

(ii) 行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ の右零化ベクトルと偶周期多項式の間に簡単な関係があることが知られる ([7, Theorem 3], [6, Proposition 3.4]). ここからも不等式 (1.1) が従うが, 後の節で定義される多重 Eisenstein 級数の 2 重の場合である 2 重 Eisenstein 級数 $G_{k_1,k_2}(\tau) = \zeta(k_1,k_2)/(2\pi\sqrt{-1})^{k_1+k_2} + O(q)$ を用いても, 純奇 2 重ゼータ値の間の具体的な関係式を組合せ的に得る事が可能である (詳しくは [12] や §4 を参照).

## § 2.3. 主結果

有理数成分の行ベクトル $(a_{k_1,\dots,k_r})_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}}$ のなす $|S_{k,r}|$ 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{V}_{k,r}$ と表記する:

$$\mathcal{V}_{k,r} = \{(a_{k_1,\dots,k_r})_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}} \mid a_{k_1,\dots,k_r} \in \mathbb{Q}\}.$$

以下, 行列 $M = \left(m_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}\right)_{\substack{(s_1,\ldots,s_r)\in S_{k,r}\\(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}} \in M_{|S_{k,r}|}(\mathbb{Z})$ (但し, 行は $(s_1,\ldots,s_r)$, 列は $(k_1,\ldots,k_r)$ が走る) が誘導する $\mathcal{V}_{k,r}$ 上の線形写像を $M:\mathcal{V}_{k,r}\to\mathcal{V}_{k,r}, v\to M(v):=v\cdot M$ により定め, 行列 $M$ の左零化ベクトルが張る $\mathcal{V}_{k,r}$ の部分空間を $\ker M$ と表記する:

$$M\big((a_{k_1,\ldots,k_r})_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}\big) = \Big(\sum_{(s_1,\ldots,s_r)\in S_{k,r}} a_{s_1,\ldots,s_r} m_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}\Big)_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}$$

$$\ker M = \{v\in\mathcal{V}_{k,r} \mid M(v)=0\}.$$

また, ${}^tM = \left(m_{\binom{k_1,\ldots,k_r}{s_1,\ldots,s_r}}\right)_{\substack{(s_1,\ldots,s_r)\in S_{k,r}\\(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}}$ と定める.

**命題 2.3 の部分的な一般化.** $r$ 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_r]$ の部分空間 $V_{k,r}$ を

$$V_{k,r} := \bigoplus_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}} \mathbb{Q}\cdot x_1^{k_1-1}\cdots x_r^{k_r-1}$$

とおき, その部分空間 $W_{k,r}$ $(r\geq 2)$ を次で定める:

$$W_{k,r} = \{p\in V_{k,r} \,|\, p(x_1,\ldots,x_r)-p(x_2-x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r)+p(x_2-x_1,x_1,x_3,\ldots,x_r)=0\}.$$

定義から $\dim_{\mathbb{Q}} V_{k,r} = |S_{k,r}|$ である. また, 空間 $W_{k,r}$ の定義より $W_{k,2} = W_k^{+,0}$ および $W_{k,r} \cong \bigoplus_{1<p<k} W_{p,2}\otimes_{\mathbb{Q}} V_{k-p,r-2}$ であるので, 以下を得る:

$$\sum_{k>0} \dim_{\mathbb{Q}} W_{k,r}x^k = \mathbb{S}(x)\cdot\mathbb{O}(x)^{r-2}. \tag{2.4}$$

このとき, 次が成り立つ.

**定理 2.7.** ([17]) 整数 $r\geq 2$ に対し, 次は単射*:*

$$\mathcal{F}_{k,r} : W_{k,r} \longrightarrow \ker\mathcal{E}_{k,r}$$
$$\sum_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}} p_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1-1}\cdots x_r^{k_r-1} \longmapsto (p_{k_1,\ldots,k_r})_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}\cdot\mathcal{F}_{k,r}.$$

但し, $\mathcal{F}_{k,r}$ は次で定義される $|S_{k,r}|\times|S_{k,r}|$ 行列である*:*

$$\mathcal{F}_{k,r} := \left(\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}} - \delta_{(s_1,\ldots,s_r),(k_1,\ldots,k_r)}\right)_{\substack{(s_1,\ldots,s_r)\in S_{k,r}\\(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}} (= \mathcal{E}_{k,r}-I).$$

この写像の well-defined 性と単射性はともに泥臭い計算で確かめられる (数値実験によれば全射であると予想されるが, 今のところ証明できていない). 空間 $W_{k,r}$ の次元 (2.4) がわかっているので, 定理 2.7 から $\ker\mathcal{E}_{k,r}$ の次元の評価を得ることができる:

$$\sum_{k>0} \dim_{\mathbb{Q}} \ker\mathcal{E}_{k,r}x^k \geq \mathbb{S}(x)\cdot\mathbb{O}(x)^{r-2}. \tag{2.5}$$

**命題 2.4 の一般化.** Brown による, $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ の基本群へのガロア作用をもとに定義される (線形化) 伊原作用の多項式表示を定義する (詳しくは [4, §6] を参照). 伊原作用 $\underline{\circ}:\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_a]\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_b]\to\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_{a+b}]$ を $f(x_1,\ldots,x_a),g(x_1,\ldots,x_b)$ に対し, 次で定める:

$$f\,\underline{\circ}\,g(x_1,\ldots,x_{a+b})=\sum_{i=0}^{b}f(x_{i+1}-x_i,\ldots,x_{i+a}-x_i)g(\underbrace{x_1,\ldots,x_i}_{i},\underbrace{x_{i+a+1},\ldots,x_{a+b}}_{b-i})$$

$$+(-1)^{\deg(f)+a}\sum_{i=1}^{b}f(x_{i+a-1}-x_{i+a},\ldots,x_i-x_{i+a})g(\underbrace{x_1,\ldots,x_{i-1}}_{i-1},\underbrace{x_{i+a},\ldots,x_{a+b}}_{b-i+1}).$$

但し, $x_0=0,\ x_{a+b+1}=x_{a+b}$ である. 整数 $c_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ を, $k=s_1+\cdots+s_r=k_1+\cdots+k_r$ なる整数 $k_1,\ldots,k_r,s_1,\ldots,s_r\geq 1$ に対し,

$$x_1^{s_1-1}\,\underline{\circ}\,(\cdots x_1^{s_{r-2}-1}\,\underline{\circ}\,(x_1^{s_{r-1}-1}\,\underline{\circ}\,x_1^{s_r-1})\cdots)=\sum_{k_1+\cdots+k_r=k}c_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}x_1^{k_1-1}\cdots x_r^{k_r-1}\tag{2.6}$$

により定め, $|S_{k,r}|\times|S_{k,r}|$ 行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ を

$$\mathcal{C}_{k,r}=\left(c_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}\right)_{\substack{(s_1,\ldots,s_r)\in S_{k,r}\\(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}}$$

と定義する. 行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ に対し, Brown の予想 ([4, Conjecture 4]) から次のことが予想される.

**予想 2.8.** 行ベクトル $(a_{k_1,\ldots,k_r})_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}\in\ker{}^t\mathcal{C}_{k,r}$ に対し, 以下が成り立つ:

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}a_{k_1,\ldots,k_r}\zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,\ldots,k_r)=0.$$

予想 2.8 は, $r=2,3$ の場合は証明できるが, $r\geq 4$ 以上では現状未解決である. Brown の予想 ([4, Conjecture 4]) が正しければ, 空間 $\ker{}^t\mathcal{C}_{k,r}$ はすべてのモチビック純奇多重ゼータ値の線形関係式を生成する (すなわち, 予想 2.8 は正しい主張である) ことがわかる.

(2.1) で定義される整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ は, 伊原作用を用いて定義できる. 実際, 整数 $k_1,\ldots,k_r,s_1,\ldots,s_r\geq 1$ に対し, 直接計算により以下を得る:

$$x_1^{s_1-1}\,\underline{\circ}\,(x_1^{s_2-1}\cdots x_{r-1}^{s_r-1})=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=s_1+\cdots+s_r\\k_1,\ldots,k_r\geq 1}}\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}x_1^{k_1-1}\cdots x_r^{k_r-1}.\tag{2.7}$$

式 (2.6) と (2.7) から $c_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}=\sum_{(t_1,\ldots,t_r)\in S_{k,r}}\delta_{s_1,t_1}c_{\binom{s_2,\ldots,s_r}{t_2,\ldots,t_r}}\varepsilon_{\binom{t_1,\ldots,t_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ が得られる. 従って, $|S_{k,r}|\times|S_{k,r}|$ 行列 $\mathcal{E}_{k,q}^{(r)}$ $(2\leq q\leq r-1)$ を

$$\mathcal{E}_{k,q}^{(r)}=\left(\delta_{(s_1,\ldots,s_{r-q}),(k_1,\ldots,k_{r-q})}\cdot\varepsilon_{\binom{s_{r-q+1},\ldots,s_r}{k_{r-q+1},\ldots,k_r}}\right)_{\substack{(s_1,\ldots,s_r)\in S_{k,r}\\(k_1,\ldots,k_r)\in S_{k,r}}}\tag{2.8}$$

により定めると, 帰納的に以下が確かめられる (この等式は安田正大さんにより指摘されたものである):

$$\mathcal{C}_{k,r} = \mathcal{E}^{(r)}_{k,2} \cdot \mathcal{E}^{(r)}_{k,3} \cdots \mathcal{E}^{(r)}_{k,r-1} \cdot \mathcal{E}_{k,r} \quad \big(\text{もしくは } {}^t\mathcal{C}_{k,r} = {}^t\mathcal{E}_{k,r} \cdot {}^t\mathcal{E}^{(r)}_{k,r-1} \cdots {}^t\mathcal{E}^{(r)}_{k,2}\big). \tag{2.9}$$

予想 2.8 と式 (2.9) により, 行ベクトル $(a_{k_1,\dots,k_r})_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}} \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,r}$ に対し, 以下が成り立つと予想される:

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}} a_{k_1,\dots,k_r} \zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,\dots,k_r) = 0.$$

**例 2.9.** $r=3$ の場合, 最初に非自明な右零化域をもつのは, $\mathcal{E}_{15,3}$ の場合であり, 空間 $\ker {}^t\mathcal{E}_{15,3}$ は $(-14,15,6,0,0,36,0,0,0,0)$ により張られる. よって, 次の関係式を得る (予想 2.8 が $r=3$ で正しいという事実から, 実際に正しい関係式である):

$$-14\zeta_{\mathfrak{D}}(3,3,9) + 15\zeta_{\mathfrak{D}}(3,5,7) + 6\zeta_{\mathfrak{D}}(3,7,5) + 36\zeta_{\mathfrak{D}}(5,5,5) = 0.$$

**注意 2.10.** 深さ $r$ における予想 2.8 を仮定すると, 以下の評価が得られる:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^{\mathrm{odd}}_{k,r} \le |S_{k,r}| - \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{C}_{k,r} = \mathrm{rank}\ \mathcal{C}_{k,r}. \tag{2.10}$$

従って, 予想 2.8 が正しければ, 行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ のランクの計算を行う事で $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^{\mathrm{odd}}_{k,r}$ の評価を得ることができる. Brown は行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ の成分を具体的に計算する事により次を予想している:

$$1 + \sum_{k>r>0} \mathrm{rank}\ \mathcal{C}_{k,r} x^k y^r \overset{?}{=} \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2}. \tag{2.11}$$

## §3. 定理 1.2 の証明の概略

不等式 (2.10) より, 定理 1.2 は, 次の不等式から直ちに従う:

$$\sum_{k>0} \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{C}_{k,4} x^k \ge 3\mathbb{S}(x)\cdot\mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{S}(x)^2. \tag{3.1}$$

まず, 一番簡単な場合の観察を紹介し, 不等式 (3.1) の証明方針を説明する.

数値計算から, $\dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{C}_{18,4} = 3$ がわかる. 従って, 重さ 18 深さ 4 の純奇多重ゼータ値の間の独立な線形関係式が少なくとも 3 個あることが予想される. 一方, $\ker {}^t\mathcal{E}_{18,4}$ の元から得られる関係式 (証明可能) と, 例 2.5, 2.9 で得られた関係式にそれぞれ $\zeta(3,3)$ および $\zeta(3)$ を掛けて級数シャッフル積 (調和積) で展開して得られる関係式たちは重さ 18 深さ 4 の 3 個の独立な関係式を与える:

$$70\zeta_{\mathfrak{D}}(3,3,3,9) - 75\zeta_{\mathfrak{D}}(3,3,5,7) - 30\zeta_{\mathfrak{D}}(3,3,7,5) + 36\zeta_{\mathfrak{D}}(3,5,5,5) = 0,$$
$$\zeta_{\mathfrak{D}}(3,3)\big(14\zeta_{\mathfrak{D}}(3,9) + 75\zeta_{\mathfrak{D}}(5,7) + 84\zeta_{\mathfrak{D}}(7,5)\big) = 0,$$
$$\zeta_{\mathfrak{D}}(3)\big(-14\zeta_{\mathfrak{D}}(3,3,9) + 15\zeta_{\mathfrak{D}}(3,5,7) + 6\zeta_{\mathfrak{D}}(3,7,5) + 36\zeta_{\mathfrak{D}}(5,5,5)\big) = 0.$$

これら 3 個の関係式達の係数は $\ker {}^t\mathcal{C}_{18,4}$ の元を与えることが確かめられる.

この観察からわかるように, 一般に, $(k',r') < (k,r)$ に対し $\ker {}^t\mathcal{E}_{k',r'}$ から得られる行ベクトルが級数シャッフル積に対応するベクトル空間上の写像 ($\Theta$ と表記される) で $\ker {}^t\mathcal{C}_{k,r}$ に持ち上がることを示し, 持ち上がった行ベクトル達の独立なものの個数を調べることで, $\dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{C}_{k,r}$ の評価が可能になると考えられる. これを $r=4$ の場合に行うことで, 不等式 (3.1) が証明される.

## § 3.1. シャッフル代数

文字の集合 $\{z_{2i+1} \mid i \geq 1\}$ で生成される非可換多項式環を $\mathfrak{V}$ とする:

$$\mathfrak{V} = \mathbb{Q}\langle z_3, z_5, z_7, \ldots \rangle.$$

ここで, 語 $z_{k_1} \cdots z_{k_r}$ に対し, $k_1 + \cdots + k_r$ を重さ, $r$ を深さと呼び, 重さ $k$ 深さ $r$ の語が生成する部分空間を $\mathfrak{V}_{k,r}$ とする. ベクトル空間 $\mathfrak{V}$ の基底の語に対し, シャッフル積 ш を次で定め, これを $\mathbb{Q}$ 双線形に拡張しておく:

$$z_{k_1} \cdots z_{k_r} \ \text{ш}\ z_{k_{r+1}} \cdots z_{k_{r+s}} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s} \\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(r) \\ \sigma(r+1)<\cdots<\sigma(r+s)}} z_{k_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots z_{k_{\sigma^{-1}(r+s)}}. \tag{3.2}$$

但し, $\mathfrak{S}_n$ は $n$ 次対称群である. 非可換環 $\mathfrak{V}$ はシャッフル積 ш に対し, 2 重次数付き可換 $\mathbb{Q}$ 代数となる.

多重ゼータ値の級数シャッフル積 (調和積) は Hoffman によって定式化された (参照:[9]). それは, 次のように書ける:

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r)\zeta(k_{r+1},\ldots,k_{r+s}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s} \\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(r) \\ \sigma(r+1)<\cdots<\sigma(r+s)}} \zeta(k_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,k_{\sigma^{-1}(r+s)}) + (\text{深さ } r+s-1 \text{ 以下の多重ゼータ値の線形和}).$$

従って, $\mathrm{gr}\big(\mathcal{Z}/(\zeta(2))\big)$ には級数シャッフル積が誘導する (インデックスのシャッフルによる) 可換な積により代数構造が入り, 部分空間 $\bigoplus_{k,r\geq 0} \mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}$ はその部分代数をなす. これにより, $z_{k_1} \cdots z_{k_r} \mapsto \zeta_{\mathfrak{D}}(k_1,\ldots,k_r)$ なる対応により, $\mathfrak{V}$ から $\bigoplus_{k,r\geq 0} \mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}$ への 2 重次数付き可換 $\mathbb{Q}$ 代数に関する全射準同型が得られることに注意しておく.

今, $k_1 < k_2$ に対し, $z_{k_1} < z_{k_2}$ と文字に順序を入れ, それを辞書式に拡張する事で $\mathfrak{V}$ の語全体に全順序を定める. このとき, 語 $l \neq 1$ が Lyndon 語であるとは, $l$ が文字 $z_k$ $(k=3,5,\ldots)$ であるか, 或いは任意の分解 $l = l_1 l_2$ $(l_1, l_2 \neq 1 : \text{語})$ に対し, $l_1 < l_2$ が成立するときを言う. 例えば, 深さ 2 の Lyndon 語は $z_{k_1} z_{k_2}$ $(k_1 < k_2)$ の形で表される. 一般に, シャッフル代数は Lyndon 語で生成される多項式環と同型であることが知られる (参照:[14, Theorem p.589], [15]). 従って, ベクトル空間 $\mathfrak{V}_{k,r}$ は Lyndon 語の (シャッフル積

に関する) 単項式による基底を持つ．この基底の存在から, 不等式 (3.1) の証明において重要な次の系が得られる [1]:

**系 3.1.** ([17]) *(i)* $\mathfrak{V}_{k,3}$ の部分空間 $V_0$ に対し, $\mathfrak{V}_{k+p,4}$ の部分空間 $\langle z_p ш w \mid w \in V_0\rangle$ の次元は $\dim_{\mathbb{Q}} V_0$ と一致する．
*(ii)* $\mathfrak{V}_{k_1,2}$ と $\mathfrak{V}_{k_2,2}$ の部分空間をそれぞれ $V_1,V_2$ とし, 空間 $\mathfrak{V}_{k_1+k_2,4}$ の部分空間 $\langle w_1 ш w_2 \mid w_1 \in V_1, w_2 \in V_2\rangle$ を $S(V_1,V_2)$ と表す．このとき, もし $V_1 \cap V_2 = 0$ ならば $\dim S(V_1,V_2) = \dim V_1 \times \dim V_2$ が成り立ち, もし $V_1 \supset V_2$ ならば $\dim S(V_1,V_2) = \dim V_1 \times \dim V_2 - \sharp\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le \dim V_2\}$ が成り立つ．

## § 3.2. キーとなる恒等式

シャッフル代数 $\mathfrak{V}$ 上のシャッフル積 (3.2) が誘導するベクトル空間 $\mathcal{V} = \bigoplus_{k,r\ge 0} \mathcal{V}_{k,r} (\cong \mathfrak{V})$ 上の線形写像を定義する．同型写像 $\pi = \pi_{k,r} : \mathcal{V}_{k,r} \to \mathfrak{V}_{k,r}$ を

$$(a_{k_1,\dots,k_r})_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}} \mapsto \sum_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}} a_{k_1,\dots,k_r} z_{k_1} \cdots z_{k_r}$$

により定め, $w \in \mathfrak{V}_{k_1,r_1}$ が誘導する $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\Theta_w$ を次の合成により定める:

$$\begin{array}{rccccccc} \Theta_w : \mathcal{V}_{k_2,r_2} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{V}_{k_2,r_2} & \longrightarrow & \mathfrak{V}_{k_1+k_2,r_1+r_2} & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \mathcal{V}_{k_1+k_2,r_1+r_2} \\ v & \longmapsto & \pi(v) & \longmapsto & \pi(v) ш w & \longmapsto & \pi^{-1}(\pi(v) ш w). \end{array}$$

特に, 語 $z_{k_1} \cdots z_{k_r}$ が誘導するものを $\Theta_{k_1,\dots,k_r}$ と表記する．系 3.1 から, 写像 $\Theta_p$ および $\Theta_{p_1,p_2}$ は単射となることに注意しておく．

不等式 (3.1) の証明に重要な恒等式を述べる．$(p_1,\dots,p_{r-q}) \in S_{p,r-q}$ に対し, 空間 $\mathcal{V}_{k-p,q}$ の $\mathcal{V}_{k,r}$ への埋め込み $\iota_{p_1,\dots,p_{r-q}}$ を次で定める (使うのは $r=4, q=2,3$ の場合):

$$\begin{array}{rcl} \iota_{p_1,\dots,p_{r-q}} : \mathcal{V}_{k-p,q} & \longrightarrow & \mathcal{V}_{k,r} \\ (a_{k_1,\dots,k_q})_{(k_1,\dots,k_q)\in S_{k-p,q}} & \longmapsto & \left(\delta_{(p_1,\dots,p_{r-q}),(k_1,\dots,k_{r-q})} \cdot a_{k_{r-q+1},\dots,k_r}\right)_{(k_1,\dots,k_r)\in S_{k,r}}. \end{array}$$

**補題 3.2.** ([17]) $k,p$ を整数とする．
*(i)* $v \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,3}$ *(i.e.* $\mathcal{E}_{k-p,3} \cdot {}^t v = 0$*)* に対し, 以下が成り立つ*:*

$${}^t\mathcal{E}_{k,4}\big(\Theta_p(v)\big) = \iota_p(v).$$

*(ii)* $(p_1,p_2) \in S_{p,2}$, $v \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,2}$ に対し, 次が成り立つ*:*

$${}^t\mathcal{E}^{(4)}_{k,3}\Big({}^t\mathcal{E}_{k,4}\big(\Theta_{p_1,p_2}(v)\big)\Big) = \sum_{(t_1,t_2)\in S_{p,2}} \varepsilon_{\binom{t_1,t_2}{p_1,p_2}} \iota_{t_1,t_2}(v).$$

[1]系 3.1 は, §3.2 冒頭に定義される写像 $\Theta_p, \Theta_{p_1,p_2}$ 達の単射性を含む ((i) は同値) 主張で, 以下の次元を評価する議論で重要な主張となっている．筆者はこの単射性の証明に, 具体的な Lyndon 基底を用いた組み合わせ的な証明を考えていたが, これら写像の単射性の証明だけなら, $\mathfrak{V}$ が整域であることから従う．これはレフェリーにご指摘頂いたところである．この場を借りて, レフェリーに感謝申し上げます．

行列 $\mathcal{E}_{k,q}^{(r)}$ の定義 (2.8) を思い出すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,q}^{(r)} &= \bigoplus_{\substack{1<p<k\\(p_1,\dots,p_{r-q})\in S_{p,r-q}}} \mathcal{E}_{k-p,q}\\ &= diag(\underbrace{\mathcal{E}_{3q,q},\dots,\mathcal{E}_{3q,q}}_{|S_{k-3q,r-q}|},\underbrace{\mathcal{E}_{3q+2,q},\dots\mathcal{E}_{3q+2,q}}_{|S_{k-3q-2,r-q}|},\dots,\mathcal{E}_{N-3(r-q),q})\end{aligned}$$

である. 従って,

$$\ker {}^t\mathcal{E}_{k,q}^{(r)} = \bigoplus_{\substack{1<p<k\\(p_1,\dots,p_{r-q})\in S_{p,r-q}}} \iota_{p_1,\dots,p_{r-q}}\big(\ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,q}\big) \tag{3.3}$$

であるので, 補題 3.2 から, ${}^t\mathcal{E}_{k,4}\big(\Theta_p(v)\big) \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}$ および ${}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}\big({}^t\mathcal{E}_{k,4}\big(\Theta_{p_1,p_2}(v)\big)\big) \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,2}^{(4)}$ を得る. 式 (2.9)(この場合, ${}^t\mathcal{C}_{k,4} = {}^t\mathcal{E}_{k,4}\cdot{}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}\cdot{}^t\mathcal{E}_{k,2}^{(4)}$) を思い出すと, 次の系が従う.

**系 3.3.** 正の整数 $k,p$ に対し, 次が成り立つ.
*(i)* $v\in\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,3}$ *に対し,* $\Theta_p(v)\in\ker{}^t\mathcal{C}_{k,4}$ *が成り立つ;*
*(ii)* $(p_1,p_2)\in S_{p,2}$ *と* $v\in\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,2}$ *に対し,* $\Theta_{p_1,p_2}(v)\in\ker{}^t\mathcal{C}_{k,4}$ *が成り立つ.*

この系により, 深さ $r=2,3$ の $\ker{}^t\mathcal{E}_{k,r}$ から来る関係式が級数シャッフル積により $\ker{}^t\mathcal{C}_{k,4}$ に持ち上がる事がわかる.

## § 3.3. 定理 1.2 の証明

これまでの議論から, 以下を得る:

$$\ker{}^t\mathcal{C}_{k,4}\supset\ker{}^t\mathcal{E}_{k,4}+\sum_{1<p<k}\Theta_p\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,3}\big)+\sum_{\substack{1<p<k\\(p_1,p_2)\in S_{p,2}}}\Theta_{p_1,p_2}\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,2}\big). \tag{3.4}$$

写像 $\Theta_p$ および $\Theta_{p_1,p_2}$ の単射性から, $\dim_{\mathbb{Q}}\Theta_p\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,3}\big)=\dim_{\mathbb{Q}}\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,3}$ および $\dim_{\mathbb{Q}}\Theta_{p_1,p_2}\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,2}\big)=\dim_{\mathbb{Q}}\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,2}$ となることに注意しておく. 今, 式 (3.4) の右辺二つ目の空間を $\mathcal{G}_k^{(1)}$ とし, 三つ目の空間を $\mathcal{G}_k^{(2)}$ と表す. 例えば, $\mathcal{G}_k^{(1)}$ の次元は, $\mathfrak{V}_{k,4}$ の部分空間 $\sum_{1<p<k}\big\langle z_p ш w \mid w\in\pi\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,3}\big)\big\rangle_{\mathbb{Q}}$ の次元を計算することと同じだが, 一般にシャッフル積で得られる元の間の独立な関係式の個数を得る事は難しい. これは補題 3.2 を用いることにより避けられる. まず, 補題 3.2 を用いて次を示す:

(i) $\ker{}^t\mathcal{E}_{k,4}\cap\mathcal{G}_k^{(1)}=\{0\}$, (ii) $\mathcal{G}_k^{(1)}=\bigoplus_{1<p<k}\Theta_p\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,3}\big)$,
(iii) $\big(\ker{}^t\mathcal{E}_{k,4}\bigoplus\mathcal{G}_k^{(1)}\big)\cap\widetilde{\mathcal{G}}_k^{(2)}=\{0\}$, (iv) $\widetilde{\mathcal{G}}_k^{(2)}=\bigoplus_{1<p<k}\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}$.

但し, 空間 $\mathcal{G}_k^{(2)}$ の部分空間 $\widetilde{\mathcal{G}}_k^{(2)}=\sum_{1<p<k}\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}$ は, $\mathrm{Im}\ {}^t\mathcal{E}_{p,2}={}^t\mathcal{E}_{p,2}\big(\mathcal{V}_{p,2}\big)$ に対し, 次で定められる:

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}:=\Big\langle\sum_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}}a_{p_1,p_2}\Theta_{p_1,p_2}(v)\;\Big|\;(a_{p_1,p_2})_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}}\in\mathrm{Im}\ {}^t\mathcal{E}_{p,2},v\in\ker{}^t\mathcal{E}_{k-p,2}\Big\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

(i) を示す．今, $v \in \mathcal{G}_k^{(1)}$ を取ると, ある $v_p \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,3}$ があって, $v = \sum_{1<p<k} \Theta_p(v_p)$ と書ける．補題 3.2 (i) と (3.3) から,

$$ {}^t\mathcal{E}_{k,4}(v) = \sum_{1<p<k} {}^t\mathcal{E}_{k,4}\big(\Theta_p(v_p)\big) = \sum_{1<p<k} \iota_p(v_p) \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)} = \bigoplus_{1<p<k} \iota_p\big(\ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,3}\big) $$

となるので, ${}^t\mathcal{E}_{k,4}(v) = 0$ と仮定すると, 全ての $p$ に対し $v_p = 0$ である．よって, $v = 0$ となり, 主張を得る．(ii) は, $v = \sum_{1<p<k} \iota_p(v_p) \in \mathcal{G}_k^{(1)}$ に対し, $v = 0$ と仮定すると, $0 = {}^t\mathcal{E}_{k,4}(v)$ から先の計算により全ての $p$ に対し $v_p = 0$ であることから従う．(iii) を示す．まず, $\Theta_p$ の単射性と (3.3) から $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{G}_k^{(1)} = \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}$ であるので, (i) の議論から ${}^t\mathcal{E}_{k,4}\big(\mathcal{G}_k^{(1)}\big) = \ker {}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}$ がわかる．すると, $v \in \ker {}^t\big(\mathcal{E}_{k,3}^{(4)} \cdot \mathcal{E}_{k,4}\big)$ に対し, ある $v' \in \mathcal{G}_k^{(1)}$ が存在し, $v - v' \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,4}$ であるゆえ, $\ker {}^t\big(\mathcal{E}_{k,3}^{(4)} \cdot \mathcal{E}_{k,4}\big) = \ker {}^t\mathcal{E}_{k,4} \oplus \mathcal{G}_k^{(1)}$ を得る (“$\supset$”は自明)．次に, 空間 $\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}$ の元の表示について議論する．空間 $\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}$ の元 $w_j = \sum_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} b_{p_1,p_2}^{(j)} \Theta_{p_1,p_2}(\alpha_j)$ $(j=1,2)$ に対し, 集合 $\{v_i^{(p)}\}_{i=1}^{d_p}$ を空間 $\ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,2}$ の基底の一つとし, $\alpha_j = \sum_{i=1}^{d_p} c_i^{(j)} v_i^{(p)}$ $(j=1,2)$ とかく．すると, 以下が成り立つ．

$$ w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{d_p} \sum_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} \big(c_i^{(1)} b_{p_1,p_2}^{(1)} + c_i^{(2)} b_{p_1,p_2}^{(2)}\big) \Theta_{p_1,p_2}(v_i^{(p)}). $$

従って, $\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}$ の元 $v$ は, 各 $i \in \{1,\dots,d_p\}$ に対しあるベクトル $(a_{p_1,p_2}^{(i)})_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} \in \mathrm{Im}\ {}^t\mathcal{E}_{p,2}$ $(1 \le i \le d_p)$ が存在し, $v = \sum_{i=1}^{d_p} \sum_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} a_{p_1,p_2}^{(i)} \Theta_{p_1,p_2}(v_i^{(p)})$ と書ける．主張を示すために, $v = \sum_{1<p<k} \alpha_p \sum_{i=1}^{d_p} \sum_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} a_{p_1,p_2}^{(i)} \Theta_{p_1,p_2}(v_i^{(p)}) \in \widetilde{\mathcal{G}}_k^{(2)}$ に対し, ${}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}\big({}^t\mathcal{E}_{k,4}(v)\big) = 0$ ならば $v = 0$ を示す．補題 3.2 (ii) と (3.3) より,

$$ \begin{aligned} 0 = {}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}\big({}^t\mathcal{E}_{k,4}(v)\big) &= \sum_{p=1}^{k} \sum_{i=1}^{d_p} \sum_{(t_1,t_2)\in S_{p,2}} \alpha_p \Big( \sum_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} a_{p_1,p_2}^{(i)} \varepsilon_{\binom{t_1,t_2}{p_1,p_2}} \Big) \iota_{t_1,t_2}(v_i^{(p)}) \\ &\in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,2}^{(4)} = \bigoplus_{\substack{1<p<k \\ (p_1,p_2)\in S_{p,2}}} \iota_{p_1,p_2}\big(\ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,2}\big) \end{aligned} $$

を得る．各 $p$ に対し, 集合 $\{\iota_{t_1,t_2}(v_i^{(p)}) \mid 1 \le i \le d_p,\ (t_1,t_2) \in S_{p,2}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立なので, $\alpha_p = 0$ もしくは全ての $i \in \{1,\dots,d_p\}$ に対し, $(a_{p_1,p_2}^{(i)})_{(p_1,p_2)\in S_{p,2}} \in \ker {}^t\mathcal{E}_{p,2} \cap \mathrm{Im}\ {}^t\mathcal{E}_{p,2} = \{0\}$ である．従って $v = 0$ を得る．また, $v = \sum_{1<p<k} w_p \in \widetilde{\mathcal{G}}_k^{(2)}$ に対し, $v = 0$ を仮定すると $0 = {}^t\mathcal{E}_{k,3}^{(4)}\big({}^t\mathcal{E}_{k,4}(v)\big)$ より, 上と同じ理由から全ての $p$ に対し $w_p = 0$ となる．これは, (iv) を主張する．(i)–(iv) をあわせて, 次を得る:

$$ \ker {}^t\mathcal{C}_{k,r} \supset \ker {}^t\mathcal{E}_{k,r} \oplus \bigoplus_{1<p<k} \Theta_p\big(\ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,3}\big) \oplus \bigoplus_{1<p<k} \widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}. $$

ところで, 系 3.1 (ii) から,

$$ \dim_{\mathbb{Q}} \big(\widetilde{\mathcal{G}}_{k,p}^{(2)}\big) = \mathrm{rank}\ {}^t\mathcal{E}_{p,2} \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,2} $$

であるので

$$\dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{C}_{k,4} \geq \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{E}_{k,4} + \sum_{1<p<k} \big( \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,3} + \operatorname{rank}\ {}^t\mathcal{E}_{p,2} \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t\mathcal{E}_{k-p,2} \big)$$

を得る. 従って, 等式 (2.3) と主結果の不等式 (2.5) から, 欲しかった不等式 (3.1) を得る.

**注意 3.4.** 一般に, $\dim_{\mathbb{Q}} \ker \mathcal{C}_{k,r}$ は次のようになると予想される:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \ker \mathcal{C}_{k,r} \stackrel{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \ker \mathcal{E}_{k,r} + \sum_{1 \leq q \leq r-2} \Big( \sum_{1<p<k} \operatorname{rank}\ \mathcal{C}_{p,q} \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \ker \mathcal{E}_{k-p,r-q} \Big).$$

この式と, 不等式 (2.5) において等式が成り立つという予想 (定理 2.7 の写像 $\mathcal{F}_{k,r}$ が全射という主張) をあわせると, 純奇多重ゼータ値予想の解決で重要な行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ のランクに関する予想 (2.11) は $r$ に関する帰納法で証明される.

## § 4. 多重 Eisenstein 級数

$\Gamma_1$ に関する Eisenstein 級数を多重化した複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数である多重 Eisenstein 級数は, 2 重の場合について Gangl-金子-Zagier の論文 [7, §7] で取り扱われ, その Fourier 展開と伊原余作用 (Goncharov の余積) の間に関係があることが示唆されていた (これは金子昌信先生の示唆による. また, Stephanie Belcher 氏による研究もあるようだが, 残念ながら筆者はその内容を聞いた事がない). ここでは, (2.7) で伊原作用 $\underline{\circ}$ により得られる整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ が多重 Eisenstein 級数のある Fourier 係数に現れることを主張し (定理 4.2), そこから生じる自然な問題に言及する. なお, 本節の内容は, いずれ Hamburg 大学の Henrik Bachmann 氏と共同で論文を書く事にしている.

**多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開.** 以下, $\tau$ は複素上半平面 $\mathbb{H}$ の元とする. 自然数の $r$ 組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 2}$(絶対収束のため $k_r \geq 3$ とする) に対し, 多重 Eisenstein 級数 $G_{\mathbf{k}}(\tau)$ を以下で定める.

$$G_{\mathbf{k}}(\tau) = G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}} \sum_{\substack{0<\lambda_1<\cdots<\lambda_r \\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}} \frac{1}{\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_r^{k_r}}.$$

ここで, $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \ni m\tau + n$ に対し, 「$m > 0$ もしくは $m = 0$ ならば $n > 0$」であるとき正である ($m\tau + n > 0$) とし, 順序関係 $m\tau + n > m'\tau + n'$ を $(m - m')\tau + (n - n') > 0$ により定める.

Bachmann により得られている Fourier 展開を述べる. 先に, $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $g_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)$ を次のように定義しておく ($q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$).

$$g_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) = \frac{(-1)^{k_1+\cdots+k_r}}{(k_1-1)! \cdots (k_r-1)!} \sum_{\substack{0<u_1<\cdots<u_r \\ v_1,\ldots,v_r \in \mathbb{Z}_{>0}}} v_1^{k_1-1} \cdots v_r^{k_r-1} q^{u_1 v_1 + \cdots + u_r v_r}.$$

**命題 4.1.** (Bachmann [1, Satz 4.5.5]) $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 2}$ $(k_r\geq 3)$ に対し, $k=\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ とおく. 多重 *Eisenstein* 級数 $G_{\mathbf{k}}(\tau)$ の *Fourier* 展開は, ある $\xi^{(d)}_{s_1}\in\left\langle\widetilde{\zeta}(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k})/\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\;\middle|\;\zeta(\mathbf{k})\in\mathcal{Z}^{(d)}_{s_1}\right\rangle_{\mathbb{Q}}$ があって, 以下のように書ける:

$$
\begin{aligned}
G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)&=\widetilde{\zeta}(k_1,\ldots,k_r)+\sum_{s_1+s_2=k}\xi^{(r-1)}_{s_1}g_{s_2}(\tau)+\sum_{s_1+s_2+s_3=k}\xi^{(r-2)}_{s_1}g_{s_2,s_3}(\tau)\\
&+\sum_{s_1+\cdots+s_4=k}\xi^{(r-3)}_{s_1}g_{s_2,s_3,s_4}(\tau)+\cdots+\sum_{s_1+\cdots+s_{r-1}=k}\xi^{(2)}_{s_1}g_{s_2,\ldots,s_{r-1}}(\tau)\\
&+\sum_{s_1+\cdots+s_r=k}\xi^{(1)}_{s_1}g_{s_2,\ldots,s_r}(\tau)+g_{k_1,\ldots,k_r}(\tau).
\end{aligned}
$$

命題 4.1 の証明において, $\widetilde{\zeta}(s_1)g_{s_2,\ldots,s_r}(\tau)$ の係数を具体的に求める事により, (2.1) で定義した整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}$ が現れる:

**定理 4.2.** 整数 $k_r\geq 3,\ k_i\geq 2$ $(1\leq i\leq r-1)$ に対し, 次が成り立つ:

$$\xi^{(1)}_{s_1}=\varepsilon_{\binom{s_1,\ldots,s_r}{k_1,\ldots,k_r}}\widetilde{\zeta}(s_1).$$

**(証明)**. 多重 Eisenstein 級数 $G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)$ の定義級数の多重和は次のように分ける事ができる:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<m_1\tau+n_1<\ldots<m_r\tau+n_r}\\
&=\sum_{\substack{0=m_1=\cdots=m_r\\0<n_1<\cdots<n_r}}\\
&+\sum_{\substack{0<m_1=\cdots=m_r\\n_1<\cdots<n_r}}+\sum_{\substack{0=m_1<m_2=\cdots=m_r\\n_1>0,n_2<\cdots<n_r}}+\cdots+\sum_{\substack{0=m_1=\cdots m_{r-1}<m_r\\0<n_1<\cdots<n_{r-1},n_r\in\mathbb{Z}}}\\
&+\cdots\\
&+\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_{r-1}=m_r\\n_1,\ldots,n_{r-2}\in\mathbb{Z},n_{r-1}<n_r}}+\cdots+\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_{r-2}=m_{r-1}<m_r\\n_1,\ldots,n_{r-3},n_r\in\mathbb{Z},n_{r-2}<n_{r-1}}}+\sum_{\substack{0=m_1<\cdots<m_r\\n_1>0,n_2\ldots,n_r\in\mathbb{Z}}}\\
&+\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\n_1,\ldots,n_r\in\mathbb{Z}}}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

ここで, 関数 $\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)$ を

$$\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k_1+\cdots+k_r}}\sum_{n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{(\tau+n_1)^{k_1}\cdots(\tau+n_r)^{k_r}}$$

で定めると, 部分分数展開により (参照:[7, §7]), $n,m\geq 2$ に対し

$$\Psi_{n,m}(\tau)=\sum_{\substack{p+q=n+m\\p,q\geq 2}}\left((-1)^n\binom{p-1}{n-1}+(-1)^{p-m}\binom{p-1}{m-1}\right)\widetilde{\zeta}(p)\Psi_q(\tau)$$

であり, Fourier 展開の計算 ([1, Lemma 4.3.4]) から

$$g_{s_1,\dots,s_r}(\tau) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \Psi_{s_1}(m_1\tau)\cdots\Psi_{s_r}(m_r\tau)$$

となる. このとき, 式 (4.1) の 4 番目の式を計算することにより以下を得る:

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}=m_r} \Psi_{k_1}(m_1\tau)\cdots\Psi_{k_{r-2}}(m_{r-2}\tau)\Psi_{k_{r-1},k_r}(m_r\tau)+\cdots\\
&+\sum_{0=m_1=m_2<\cdots<m_r} \Psi_{k_1,k_2}(m_1\tau)\Psi_{k_3}(m_3\tau)\cdots\Psi_{k_r}(m_r\tau)\\
&+\widetilde{\zeta}(k_1)\sum_{0<m_2<\cdots<m_r} \Psi_{k_2}(m_2\tau)\cdots\Psi_{k_r}(m_r\tau)\\
&=\sum_{\substack{s_1+\cdots+s_r=k\\ s_1\geq 2,\, s_2,\dots,s_r\geq 1}} \varepsilon_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}}\widetilde{\zeta}(s_1)g_{s_2,\dots,s_r}(\tau).
\end{aligned}$$

□

**多重 Eisenstein 級数の代数構造.** 伊原作用と整数 $\varepsilon_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}}$ の関係 (2.7) が多重ゼータ値の線形関係式との関係を導いたが, 多重 Eisenstein 級数においてどのような寄与があるかを考えたい. 例 2.5 の関係式から, $G_k(\tau) := \widetilde{\zeta}(k) + g_k(\tau) \in \mathbb{C}[[q]]$ $(k \geq 2)$ とおくと,

$$14G_{3,9}(\tau) + 75G_{5,7}(\tau) + 84G_{7,5}(\tau) - \frac{5197}{1382}G_{12}(\tau)$$

は $\mathbb{C}[[q]]$ の元として, 定数項が 0 となる. 全体は 0 ではないが, $\mathbb{Q}[[q]]$ の元となり, 特に重さ 12 のカスプ形式となっている. 一般に, $\sum_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} a_{k_1,k_2}G_{k_1,k_2}(\tau)$ が $\mathbb{Q}[[q]]$ に入る必要十分条件が $(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in S_{k,2}} \in \ker {}^t\mathcal{E}_{k,2}$ であることが知られており, このとき必ずモジュラー形式となる (参照:[12, 定理 2 の系]). この特筆すべき性質は, 今のところ 3 重以上になるとよくわからない. 例えば, 例 2.9 の関係式と対応する $q$ 級数

$$\begin{aligned}
&-14G_{3,3,9}(\tau) + 15G_{3,5,7}(\tau) + 6G_{3,7,5}(\tau) + 36G_{5,5,5}(\tau)\\
&-42G_7(\tau)G_8(\tau) - 17G_9(\tau)G_6(\tau) - \frac{1797}{2}G_{11}(\tau)G_4(\tau) + 5733G_{13}(\tau)G_2(\tau)\\
&-\frac{206887}{20}G_{15}(\tau)
\end{aligned}$$

は 0 でないと思われるが, どのような $q$-級数で書けるだろうか. これに対し, 極自然に次のような予想がたてられる. 多重ゼータ値の代数 $\mathcal{Z}$ への全射 (定数項を取る事による射影) があるような, 多重 Eisenstein 級数で生成される可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{E}$ が存在し, 次の完全系列を満たす:

$$0 \longrightarrow \left(S^{\mathbb{Q}}\right) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow 0.$$

但し, $\left(S^{\mathbb{Q}}\right)$ は $\Gamma_1$ に関する $\mathbb{Q}$ 上のカスプ形式で生成される $\mathcal{E}$ のイデアルを意味する.

## § 5. Zagier の奇数重さの 2 重ゼータ値と周期多項式の関係の一般化に対する考察

§2.2 において, 偶周期多項式が偶数重さの 2 重ゼータ値の線形関係式を与えることをみた. ここでは, 奇数重さの 2 重ゼータ値の線形関係式と周期多項式との対応に関する Zagier [20] の結果を述べ, その一般化に向けた観察を紹介する.

**Zagier の結果.** 整数 $k > r > 0$ に対し, 商空間 $\mathcal{Z}_k^{(r)}/\mathcal{Z}_k^{(r-1)}$ を $\overline{\mathcal{Z}}_{k,r}$ と表記し, $\overline{\mathcal{Z}}_{k,r}$ における重さ $k$ 深さ $r$ の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ が属す類を $\zeta_{\mathfrak{d}}(\mathbf{k})$ と表記する. インデックスの集合 $U_{k,r}$ を次で定める.

$$U_{k,r} = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^r \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k,\ k_1, \dots, k_{r-1} : \mathrm{odd},\ k_r : \mathrm{even}\}.$$

空間 $\overline{\mathcal{Z}}_{k,r}$ の部分空間 $\mathcal{U}_{k,r}$ を次のようにおく:

$$\mathcal{U}_{k,r} = \langle \zeta_{\mathfrak{d}}(\mathbf{k}) \in \overline{\mathcal{Z}}_{k,r} \mid \mathbf{k} \in U_{k,r} \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

(2.6) で定義した整数 $c_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}}$ を用いて $|U_{k,r}| \times |U_{k,r}|$ 行列 $\mathcal{B}_{k,r}$ を考える:

$$\mathcal{B}_{k,r} = \left( c_{\binom{s_1,\dots,s_r}{k_1,\dots,k_r}} \right)_{\substack{(s_1,\dots,s_r)\in U_{k,r} \\ (k_1,\dots,k_r)\in U_{k,r}}}.$$

これらの設定のもと, Zagier の結果 ([20, §6]) は次のように述べられる.

**命題 5.1.** *(i) 次の単射が存在する.*

$$W_{k-1}^{-} \oplus W_{k+1}^{+,0} \longrightarrow \ker \mathcal{B}_{k,2}.$$

*(ii) ベクトル* $(a_{k_1,k_2})_{(k_1,k_2)\in U_{k,2}} \in \ker {}^t\mathcal{B}_{k,2}$ *に対し, 次が成り立つ.*

$$\sum_{(k_1,k_2)\in U_{k,2}} a_{k_1,k_2} \zeta_{\mathfrak{d}}(k_1, k_2) = 0.$$

定理 2.1 より, $W_k^{-} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong S_k(\Gamma_1) \cong W_k^{+,0} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ であるので, 命題 5.1 から次の評価が得られる:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{k,2} \leq \mathrm{rank}\ \mathcal{B}_{k,2} \leq |U_{k,2}| - \dim_{\mathbb{C}} S_{k-1}(\Gamma_1) - \dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}(\Gamma_1).$$

**行列 $\mathcal{B}_{k,r}$ と $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{k,r}$ の観察.** 行列 $\mathcal{B}_{k,r}$ は Brown の行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ の類似であり, ベクトル $(a_{k_1,\dots,k_r})_{(k_1,\dots,k_r)\in U_{k,r}} \in \ker {}^t\mathcal{B}_{k,r}$ に対し,

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in U_{k,r}} a_{k_1,\dots,k_r} \zeta_{\mathfrak{d}}(k_1, \dots, k_r) \overset{?}{=} 0$$

が成立すると思われる (これは予想 2.8 と同じレベルの問題であり, 現状解決は難しいと思われる. $r = 2, 3$ の場合は示せる.). 従って, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{k,r} \leq |U_{k,r}| - \dim_{\mathbb{Q}} \ker \mathcal{B}_{k,r} = \mathrm{rank}\ \mathcal{B}_{k,r}$ であるが, 数値実験によれば $\mathrm{rank}\ \mathcal{B}_{k,r} \overset{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{k,r}$ が成り立つと予想される:

♣ 数値実験による $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{k,r}$.

| $r\backslash k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |
| 2 | | | | 1 | | 2 | | 3 | | 3 | | 4 | | 5 | | 5 | | 6 | |
| 3 | | | | | | | 1 | | 3 | | 5 | | 8 | | 11 | | 15 | | 19 |
| 4 | | | | | | | | | | 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | - | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | 1 | | 5 | | - | | - |

♣ rank $\mathcal{B}_{k,r}$.

| $r\backslash k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |
| 2 | | | | 1 | | 2 | | 3 | | 3 | | 4 | | 5 | | 5 | | 6 | |
| 3 | | | | | | | 1 | | 3 | | 5 | | 8 | | 11 | | 15 | | 19 |
| 4 | | | | | | | | | | 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | 26 | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | 1 | | 5 | | 14 | | 29 |

Brown の純奇多重ゼータ値予想の基となる行列 $\mathcal{C}_{k,r}$ のランク予想 (2.11) と同様, rank $\mathcal{B}_{k,r}$ の計算から $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{k,r}$ の次元予想を与えたい. これに対し, $r \in \{2,3,4\}$ の場合に対する rank $\mathcal{B}_{k,r}$ の母関数表示の予想が得られたので, 最後にこれを述べる. 母関数 $\mathbb{E}(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ とおくと, $\sum_{k>0} |U_{k,r}| x^k = \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^{r-1}$ に注意する. このとき, 次が成り立つと予想される.

$$\sum_{k>0} \text{rank } \mathcal{B}_{k,2} x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x) - (x + \frac{1}{x})\mathbb{S}(x),$$

$$\sum_{k>0} \text{rank } \mathcal{B}_{k,3} x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^2 - (x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})\mathbb{S}(x)\mathbb{O}(x),$$

$$\sum_{k>0} \text{rank } \mathcal{B}_{k,4} x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^3 - (x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3})\mathbb{S}(x)\mathbb{O}(x)^2 + (x + \frac{1}{x})\mathbb{S}(x)^2.$$

## 謝辞

文末ではありますが, RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」にて講演の機会をくださいました世話人の落合先生, 辻先生, 木村先生に感謝の意を表したいと思います. ありがとうございました.

## References

[1] H. Bachmann, *Multiple Zeta-Werte und die Verbindung zu Modulformen durch Multiple Eisensteinreihen*, Master thesis in Hamburg University (2012).

[2] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math., **175**(2) (2012), 949–976.

[3] F. Brown, *On the decomposition of motivic multiple zeta values*, 'Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry', Adv. Studies in Pure Math. 68, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2012), 31–58.

[4] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, arXiv:1301.3053.

[5] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393**, no. 3-4 (1997), 403–412.

[6] S. Baumard, L. Schneps, *Period polynomial relations between double zeta values*, Ramanujan J., **32**(1) (2013), 83–100.
[7] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, In:Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.
[8] A. B. Goncharov, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, Duke Math. J., **110**(3) (2001), 397–487.
[9] M.E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. of Algebra, **194** (1997), 477–495.
[10] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.
[11] K. Ihara, H. Ochiai, *Symmetry on linear relations for multiple zeta values*, Nagoya Math. J., **189** (2008), 49–62
[12] M. Kaneko, 二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数, およびモジュラー形式, 京大数理研短期共同「多重ゼータ値の研究」, RIMS 講究録 **1549** (2007), 31–46.
[13] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood (1984), 197–249.
[14] G. Melancon, C. Reutenauer, *Lyndon words, free algebras and shuffle algebras*, Can. J. Math., **41**(4) (1989), 577–591.
[15] C. Reutenauer, *Free Lie algebras.* Oxford Science Publications, Oxford, (1993).
[16] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Kanô Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., (1971).
[17] K. Tasaka, *On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials*, preprint(2014).
[18] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.
[19] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, in Hokei-keishiki to L-kansuu no kenkyuu (= Research on Automorphic Forms and L-Functions), RIMS Kokyuroku, **843** (1993), 162–170.
[20] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values* $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$, Ann. of Math., **175**(2) (2012), 977–1000.