

3 重ゼータ値とモジュラー形式

田坂 浩二 (名大多元)

概要

筆者と Ding Ma 氏との共同研究で得られた結果である, ある 3 重ゼータ値で生成されるベクトル空間の次元の上限公式について論ずる. モジュラー形式 (周期多項式) との関連も述べる.

1 序

1.1 多重ゼータ値とモジュラー形式

自然数 $n_1, \dots, n_r$ ($n_r \geq 2$) に対し, 多重ゼータ値を次の多重級数で定義する:

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}.$$

ここで, 条件 $n_r \geq 2$ は多重ゼータ値の絶対収束条件である. $n_1 + \dots + n_r$ を重さ, r を深さと呼ぶ.

Zagier [18, p.508] は深さ 2 の多重ゼータ値 (2 重ゼータ値と呼ぶ) と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式との間に興味深い関係を見つけた. これは, 次のような予想として述べられる:

予想 1. 偶数 $N > 2$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \langle \zeta(n, N-n) \mid 1 \leq n \leq N-2 \rangle_{\mathbb{Q}} \stackrel{?}{=} \frac{N}{2} - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_N(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

但し, $S_N(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ は重さ N , $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式で生成される $\mathbb{C}$ ベクトル空間である.

これは, 2 重ゼータ値で生成されるベクトル空間とカスプ形式の空間との間に密接な関係があること示唆する. 予想 1 に対し, Zagier 自身により, 不等式 “ $\leq$ ” が示されており, Gangl, 金子, Zagier [9] によって, カスプ形式の critical value と 2 重ゼータ値の間のより直接的な関係が得られている. 予想 1 が提唱されたあと, Broadhurst と Kreimer [6] は, 予想 1 を一般の深さに対して観察し, 深さと重さを固定した多重ゼータ値で生成されるベクトル空間の次元予想を提唱している (Broadhurst-Kreimer 予想). 深さ 2 の場合然り, この予想のほとんどの場合が依然として未解決であり, その解決が切望されている. これら Broadhurst-Kreimer 予想とその進展については, 著者の報告集 [15] などを参照されたい^{*1}.

1.2 主結果

本稿の主結果は, 深さ 3 の “モチビク多重ゼータ値” と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式との間の関係を示唆するものである. 主結果の証明には, Brown により発展された, モチビク多重ゼータ値へ

^{*1} 数値実験方法についても報告集 [16] で扱った. 稚拙ながら, 参考になれば幸いである.

のガロア理論的な手法が使われる．それ故，以下では実数値としての多重ゼータ値を論ずる代わりに，混合 Tate モチーフのモチビク周期である，モチビク多重ゼータ値

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, \dots, n_r)$$

を扱う (2 節で定義する)．周期写像により，モチビク多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{H}$ から多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ への全射があることに注意しておく．空間 $\mathcal{H}$ は，深さに関する filtration と重さに関する次数により，フィルター付き次数付き $\mathbb{Q}$ 代数となる：

$$\mathfrak{D}_0\mathcal{H} := \mathbb{Q} \subset \mathfrak{D}_1\mathcal{H} \subset \dots \subset \mathfrak{D}_r\mathcal{H} \subset \dots \subset \mathcal{H} = \bigoplus_N \mathcal{H}_N.$$

但し，空間 $\mathcal{H}_N$ と空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{H}$ は各々重さ N および深さ r 以下のモチビク多重ゼータ値で生成されるベクトル空間である．モチビク多重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, \dots, n_r)$ の商空間 $\mathfrak{D}_r\mathcal{H}/\mathfrak{D}_{r-1}\mathcal{H}$ での像を $\zeta_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{m}}(n_1, \dots, n_r)$ と書き，深さ次数化モチビク多重ゼータ値と呼ぶ．主結果は，ある深さ次数化モチビク 3 重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元の上限である．

$j \in \{1, 2, 3\}$ に対し，次のインデックスの集合を考える：

$$\mathbb{I}_N^{(j)} := \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_{>1}^3 \mid n_j : \text{even}, n_i : \text{odd}(i \neq j)\}.$$

これは， j 番目が偶数で，その他の要素が 3 以上の奇数であるような重さ N 深さ 3 のインデックスの集合である (論文 [13] では， j -th almost totally odd index と呼ばれる)．これに対し，次のベクトル空間を考える．

$$\mathcal{T}_N^{(j)} := \langle \zeta_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3) \mid (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(j)} \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

例えば， $\mathcal{T}_{10}^{(2)} = \mathbb{Q}\zeta_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{m}}(5, 2, 3) + \mathbb{Q}\zeta_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{m}}(3, 4, 3) + \mathbb{Q}\zeta_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{m}}(3, 2, 5)$ であり， $\mathcal{T}_8^{(3)} = \mathbb{Q}\zeta_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{m}}(3, 3, 2)$ である．簡単にわかるように，集合 $\mathbb{I}_N^{(j)}$ の要素の個数の母関数は，次のように書ける：

$$\sum_{N>0} |\mathbb{I}_N^{(j)}| x^N = \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^2.$$

これは，空間 $\mathcal{T}_N^{(j)}$ の次元の自明な上限の母関数である．但し，

$$\mathbb{E}(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 + x^4 + \dots, \quad \mathbb{O}(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x^3 + x^5 + \dots$$

である．カスプ形式の次元の母関数を以下で記す：

$$\mathbb{S}(x) = \sum_{k>0} \dim_{\mathbb{C}} S_N(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) x^N = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)} = x^{12} + x^{16} + \dots.$$

このとき，主結果は次のように述べられる．

定理 2. [13, Theorem 1.1, 1.2] 任意の $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し，以下が成り立つ：

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(j)} x^N \leq \mathbb{E}(x)\mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{E}(x)\mathbb{S}(x).$$

特に, $j = 3$ の場合には, 次の評価が成り立つ:

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(3)} x^N \leq \mathbb{E}(x) \mathbb{O}(x)^2 - \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x) - \left(\frac{1}{x} + x\right) \mathbb{O}(x) \mathbb{S}(x).$$

但し, $\sum a_N x^N \leq \sum b_N x^N$ は各 N に対し $a_N \leq b_N$ を意味する.

空間 $\mathcal{T}_N^{(j)}$ の予想次元については注意 16 を参照されたい. 定理 2 の前半の主張は, 証明方法は異なるが Broadhurst-Kreimer 予想の深さ 3 に対する Goncharov の結果からも従うことに注意する. 以下に, 証明についての基本的な方針を述べる.

証明の第 1 ステップは, 定理 6 における同型写像 $\phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ を計算することである. ここで, $\mathcal{U}$ は次数 $2i+1$ の記号 f_{2i+1} で生成される次数付き非可換多項式環の多項式環 $\mathbb{Q}[f_2]$ による係数拡大とする:

$$\mathcal{U} = \mathbb{Q}\langle f_{2i+1} \mid i \geq 1 \rangle \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[f_2] = \bigoplus_{N \geq 0} \mathcal{U}_N.$$

これは, 単に形式的な元 $f_{2i_1+1} \cdots f_{2i_r+1} \otimes f_2^k$ たちで生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となっている. 記号 f_2 は f_{2i+1} 達と可換であるので, 必ず右に書くと約束し, 混乱がない場合テンソル記号を省く. 定理 6 では ϕ を algebra comodule 射として扱うが, ここでは線形空間としての同型と理解すれば十分である.

幾つかの場合, 同型写像 ϕ の像が具体的に計算できる. 例えば, $\mathcal{U}_5 = \mathbb{Q}f_3f_2 \oplus \mathbb{Q}f_5$ であるので, 空間 $\mathcal{H}_5$ の元の ϕ による像は, f_3f_2 と f_5 の一次結合となるはずである. これに対し, 以下の公式を証明することができる:

$$\begin{aligned} \phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) &= 3f_3f_2 - \frac{11}{2}f_5 \\ \phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(3, 2)) &= -2f_3f_2 + \frac{9}{2}f_5 \end{aligned}$$

写像 ϕ を計算することにより, モチビック多重ゼータ値の間の独立性や関係式を証明することができる. 実際, 上記の例において, 係数行列の行列式が 0 でないことが確かめられるので, ϕ の単射性から $\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)$ と $\zeta^{\mathfrak{m}}(3, 2)$ の一次独立性がわかる.

最後のステップは, 我々が考えている空間 $\mathcal{T}_N^{(j)}$ の ϕ による像の空間の次元を評価することである. これは, 上述の例のように, 係数行列を取り出して, その階数を評価することで得られる. この取り出した係数行列が, カスプ形式の周期多項式と密接に関係していることが鍵となり, 定理 2 の評価を得ることができる.

1.3 本稿の構成

本稿の構成は以下である. 2 節において, モチビック多重ゼータ値に関する基本事項をまとめ, 同型写像 ϕ (定理 6) の説明を行う. 3 節では, 同型写像 ϕ の Brown 作用素 $D_{<N}$ を用いた計算方法を紹介し, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ の公式 (命題 10) を与える. 4 節で, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ の像の係数行列と周期多項式との結びつき (定理 14, 15) を述べ, 定理 2 の証明を述べる. 本稿では, これら証明に重要ないくつかの公式を明記するものの, 計算 (証明) 方法などは適時論文 [13] を参照と

し、アイデアや概略を述べるにとどめる。付録 A において、この報告集のアイデンティティのためにも、モチビク 2 重ゼータ値の写像 ϕ での像の計算方法について、論文 [13] では扱わなかった方法 (Brown[5] により示唆された複シャッフル方程式の具体的な解もしくは有理数係数の結合子を使う方法) を紹介する。

2 モチビク多重ゼータ値と Brown の定理

モチビク多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{H}$ は、大雑把に言うと、2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$ をモチビク関係式族 $J^{\mathcal{MT}}$ で割った商空間として定義される：

$$\mathcal{H} := \mathfrak{H} / J^{\mathcal{MT}}.$$

商空間 $\mathcal{H}$ の元 $e_1 e_0^{n_1-1} \cdots e_1 e_0^{n_r-1}$ を $\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, \dots, n_r)$ と表記し、モチビク多重ゼータ値と呼ぶ (cf. [2, Definition 2.1])^{*2}. 後ほどモチビク多重ゼータ値の algebra comodule 構造が必要になるので、 $J^{\mathcal{MT}}$ の定義も含めて、 $\mathcal{H}$ の代数構造を述べ、Brown の定理を紹介する。

2.1 シャッフル正規化多重ゼータ値

周期写像によるモチビク多重ゼータ値の像はシャッフル正規化多重ゼータ値になる。ここでは、井原、金子、Zagier [11] に習い、シャッフル正規化多重ゼータ値を復習する^{*3}。

2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H}$ にシャッフル積 $\mathfrak{m}$ を入れた可換代数を $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ と表す。シャッフル積は以下のように帰納的に定義される：

$$xu \mathfrak{m} yv = x(u \mathfrak{m} yv) + y(xu \mathfrak{m} v) \quad (x, y \in \{e_0, e_1\}, u, v : \text{words}).$$

単位元は 1 とし、 $\mathfrak{m} : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ へと $\mathbb{Q}$ 双線形に拡張する。 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ の部分空間を $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^0 := \mathbb{Q} + e_1 \mathfrak{H} e_0$ と定めると、これは部分代数となる。よく知られるように、任意の語 $w \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ は、

$$w = \sum_{i,j \geq 0} w_{i,j} \mathfrak{m} e_0^i \mathfrak{m} e_1^j \quad (w_{i,j} \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^0)$$

と一意的に書き表せる。この表記における定数項への全射を $\text{reg}^{\mathfrak{m}}$ と書く：

$$\begin{aligned} \text{reg}^{\mathfrak{m}} : \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}} &\longrightarrow \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^0 \\ w &\longmapsto w_{0,0} \end{aligned}$$

これは代数射となることに注意しておく。全ての多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ で表すと、多重ゼータ値の反復積分表示により、次の積分写像が定義される：

$$\begin{aligned} \zeta^{\mathfrak{m}} : \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}} &\longrightarrow \mathcal{Z} \\ w &\longmapsto \int \text{reg}^{\mathfrak{m}}(w) \end{aligned}$$

^{*2} 淡中圈 $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ のモチビク周期としての定式化については、[4, 17] を参照されたい。

^{*3} 多重ゼータ値の定義和の取り方が逆なので、全て逆順になることに注意しておく。

但し, $e_{i_1} \cdots e_{i_N} \in \mathfrak{H}_{\text{m}}^0$ に対し,

$$\int e_{i_1} \cdots e_{i_N} = \int_{0 < t_1 < \cdots < t_N < 1} \omega_{i_1}(t_1) \cdots \omega_{i_N}(t_N) \quad \left(\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t} \right)$$

と定める. 射 ζ^{m} は反復積分の基本事実により代数射となる. 像 $\zeta^{\text{m}}(w)$ をシャッフル正規化多重ゼータ値と呼ぶ. 特に, $k_r \geq 2$ ならば

$$\zeta^{\text{m}}(e_1 e_0^{k_1-1} \cdots e_1 e_0^{k_r-1}) = \zeta(k_1, \dots, k_r)$$

である.

注意 3. 基本的な問題として, 空間 $\ker \zeta^{\text{m}}$ の生成元は何かという問題がある. 空間 $\ker \zeta^{\text{m}}$ は $\mathfrak{H}_{\text{m}}$ のイデアルなので, イデアルの生成系は何かという問題とも思える. これに対し, Zagier により

$$\ker \zeta^{\text{m}} \stackrel{?}{=} (\text{正規化複シャッフル関係式族})$$

が予想されている (cf. [11]). 現在のところ, 次の包含関係が知られている:

$$\ker \zeta^{\text{m}} \supset (\text{モチビック関係式族}) \supset (\text{結合子関係式族}) \supset (\text{正規化複シャッフル関係式族})$$

最後の包含関係は古庄 [8] の結果である.

2.2 モチビック関係式族

モチビック関係式族 J^{MT} は, “混合 Tate モチーフのなす圏 $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ (淡中圏) のガロア群 U^{dR} (de Rham fiber functor の淡中基本群の副巾単根基) の余作用で stable な $\ker \zeta^{\text{m}}$ の最大な部分イデアル”と定義される. 以下では, 淡中圏 $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ やアファイン群スキーム U^{dR} についての詳細 (cf. [17, §10~§12]) を省き, 余作用の計算方法についてのみ触れる.

以下, 代数 $\mathfrak{H}_{\text{m}}$ に余結合積 $\Delta \bullet$ を定め, Hopf 代数とみる^{*4}. Hopf 代数 $\mathfrak{H}_{\text{m}}$ を座標環にもつアファイン群スキームを $\text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}}$ と表す. 伊原の仕事により, 次の図式を可換にするような射 $\rho : U^{dR} \rightarrow \text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}}$ が存在することが知られている:

$$\begin{array}{ccc} U^{dR} \times \text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}} \\ \rho \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \circ : \text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}} \times \text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}} \end{array}$$

ここで, $\circ$ は伊原作用と呼ばれ, $f \circ g = g(e_0, f e_1 f^{-1})f$ で与えられる ($\mathbb{Q}$ 代数 R に対し, $\text{Spec } \mathfrak{H}_{\text{m}}(R) = \text{Hom}(\mathfrak{H}_{\text{m}}, R) \cong \{f(e_0, e_1) \in R \langle e_0, e_1 \rangle^\times \text{ s.t. } f \text{ is group-like}\}$ に注意). これにより, U^{dR} の座標環 $\mathcal{A}^{\text{MT}} := \mathcal{O}(U^{dR})$ の余作用 $\Delta^{\text{MT}} : \mathfrak{H}_{\text{m}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{MT}} \otimes \mathfrak{H}_{\text{m}}$ が定義される. これを用いて, モチビック関係式族 J^{MT} を以下のように定義する:

^{*4} 語 $w = e_{i_1} \cdots e_{i_N}$ に対し, $\Delta \bullet(w)$ は各 $e_{i_j} e_{i_{j+1}}$ の間にテンソル積を入れて足しあげたものである. 後ほど, $\mathcal{U}$ を説明するときにも現れる.

定義 4. $\ker \zeta^{\mathfrak{m}}$ に含まれる次数付きイデアルのうち, $\Delta^{\mathcal{MT}}$ で *stable* な最大のものを $J^{\mathcal{MT}}$ と記し, モチビック関係式族とよぶ.

定義から, $\Delta^{\mathcal{MT}}(J^{\mathcal{MT}}) \subset \mathcal{A}^{\mathcal{MT}} \otimes J^{\mathcal{MT}}$ であるゆえ, $\mathcal{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}/J^{\mathcal{MT}}$ は $\mathcal{A}^{\mathcal{MT}}$ -comodule となることがわかる. 淡中圏の基本事項から, U^{dR} はアファイン群スキームとなるので, $\mathcal{A}^{\mathcal{MT}}$ は Hopf 代数である. Goncharov により, $\mathcal{A} := \mathcal{H}/\zeta^{\mathfrak{m}}(2)\mathcal{H}$ から $\mathcal{A}^{\mathcal{MT}}$ への Hopf 代数としての単射の存在が示されている. これにより, 以下では, $\mathcal{H}$ を $\mathcal{A}$ -comodule として扱い, 余作用を同じく $\Delta^{\mathcal{MT}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ で表す.

注意 5. 射 $\rho : U^{dR} \rightarrow \text{Spec } \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ を具体的に計算するのは困難である. よって, $\mathcal{A}^{\mathcal{MT}}$ の余作用を計算するのは難しい. しかし, 伊原作用の座標環版である, Goncharov 余積 $\Delta^G : \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ では, 形式的な計算が可能である. 例えば, Goncharov 余積の公式 (cf. [2, (2.18) 式], [10, §2]) を用いると, $\Delta^{\mathcal{MT}} \zeta^{\mathfrak{m}}(2) = 1 \otimes \zeta^{\mathfrak{m}}(2)$ を容易に確かめることができる.

2.3 Brown の定理

Brown[2] は, モチビック多重ゼータ値に対する Hoffman 基底予想を解決することで, 空間 $\mathcal{H}$ の次元を完全に決定した. これは, Goncharov により示された単射 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{MT}}$ の持ち上げ $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{MT}} \otimes \mathbb{Q}[f_2]$ が同型射になるという定理である. この同型射を詳しく説明する.

次数 $2i+1$ の記号 f_{2i+1} で生成される非可換多項式環

$$\mathcal{U}' = \mathbb{Q}\langle f_{2i+1} \mid i \geq 1 \rangle.$$

を考える. 記号 f_{2i+1} たちに関するシャッフル積 $\mathfrak{m}$ と余結合 $\Delta^\bullet$ により, $\mathcal{U}'$ を Hopf 代数とみなす:

$$\Delta^\bullet(f_{2i_1+1} \cdots f_{2i_r+1}) = \sum_{j=0}^r f_{2i_1+1} \cdots f_{2i_j+1} \otimes f_{2i_{j+1}+1} \cdots f_{2i_r+1}.$$

古典的な結果により, $\mathcal{A}^{\mathcal{MT}}$ は $\mathcal{U}'$ と Hopf 代数として同型である. この同型を介して, 空間 $\mathcal{A}$ から空間 $\mathcal{U}'$ への Hopf 代数としての単射を

$$\phi' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{MT}} \cong \mathcal{U}'$$

と書く.

空間 $\mathcal{U}$ を次で定める:

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}' \otimes \mathbb{Q}[f_2].$$

Hopf 代数 $\mathcal{U}'$ の余積を $\Delta^\bullet(f_2) = 1 \otimes f_2$ と定め, 代数射として $\mathcal{U}$ へと延長し, $\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}'$ -comodule とみなす. $\mathcal{H} \cong \mathcal{A} \otimes \mathbb{Q}[\zeta^{\mathfrak{m}}(2)]$ なので, 注意 5 から, 単射 $\phi' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}'$ は algebra comodule 射として, $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ に持ち上がる. すなわち, $\Delta^\bullet \circ \phi = (\phi' \otimes \phi) \circ \Delta^{\mathcal{MT}}$ が成立する. algebra comodule 射 ϕ の一つの標準化として, [2, Lemma 3.2] により, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(N)) = f_N$ と置くことができる. 但し,

$$f_{2k} := \frac{\zeta^{\mathfrak{m}}(2k)}{\zeta^{\mathfrak{m}}(2)^k} f_2^k \quad (k \geq 1).$$

このとき, Brown の定理は次のように述べられる.

定理 6. 空間 $\mathcal{H}$ は *algebra comodule* として $\mathcal{U}$ と同型であり, 同型写像 $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ で, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(N)) = f_N$ ととれるものが存在する.

同型写像 ϕ の像が具体的に計算できると, モチビック多重ゼータ値の線形関係式のみならず, 一次独立性の問題にまで応用ができる. 次節で, ϕ の計算方法を述べる.

3 Brown 作用素を使った同型写像 ϕ の計算方法

写像 ϕ の像を一般的に計算することは難しい問題であるが, 深さ 3 までであれば, Brown[2, Definition 3.1] により導入された Brown 作用素 $D_{<N}$ を使うことで (ある程度) 計算できる. 詳細は論文 [13] に譲り, 必要な補題を述べて, 結果を述べる.

3.1 Brown 作用素

Brown 作用素 $D_{<N}$ を定義し, $D_{<N}(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ の公式を与える.

定義 7 (Brown 作用素). 空間 $\mathcal{A}$ の商空間 $\mathcal{L} := \mathcal{A}_{>0}/(\mathcal{A}_{>0})^2$ に対し, 射影を $\pi : \mathcal{A}_{>0} \rightarrow \mathcal{L}$ と書く. 線形写像 $D_{<N}$ を写像の合成 $(\pi \otimes \text{id}) \circ (\Delta^{\mathcal{M}^T} - 1 \otimes \text{id})$ により定める:

$$D_{<N} : \mathcal{H}_N \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{M}^T} - 1 \otimes \text{id}} \mathcal{A}_{>0} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}} \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}.$$

像の重さは N になることに注意しておく.

Brown 作用素 $D_{<N}$ は, Goncharov 余積の公式 [2, (2.18) 式] において左テンソル要素の積が現れないものとなるので, 幾分シンプルな公式を持つ (cf. [2, (3.4) 式]). この公式と, 形式的反復積分やそのシャッフル正規化に関する公式を用いることで, Brown 作用素の計算が可能になる. 具体的な計算方法は [2, 3] や [13, §3] を参照とし, 結果だけ述べよう.

自然数の組 $(m_1, \dots, m_r), (n_1, \dots, n_r)$ に対し, $\delta_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}$ でクロネッカー記号を表すとする:

$$\delta_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r} = \begin{cases} 1 & \text{if } m_i = n_i \text{ for all } i \in \{1, \dots, r\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

整数 $e_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}$ を以下で定める:

$$e_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r} = \delta_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r} + \sum_{i=1}^{r-1} \delta_{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+2}, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_i, m_{i+2}, \dots, m_r} b_{n_i, n_{i+1}}^{m_1} \in \mathbb{Z},$$

但し, $b_{n, n'}^m$ は以下で定める整数である:

$$b_{n, n'}^m = (-1)^n \binom{m-1}{n-1} + (-1)^{n'-m} \binom{m-1}{n'-1}.$$

補題 8. [13, Corollary 3.4] $\zeta^{\mathfrak{m}}(m)$ の $\mathcal{L}$ での像を ξ_m と書く. このとき,

(i) $N = n_1 + n_2$ に対し, 次が成り立つ:

$$D_{<N}(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2)) = \sum_{1 < m < N: \text{odd}} e\binom{m, N-m}{n_1, n_2} \xi_m \otimes \zeta^{\mathfrak{m}}(N-m).$$

(ii) $N = n_1 + n_2 + n_3$ に対し, ある有理数 $a_m(n_1, n_2, n_3)$ があって, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} D_{<N}(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3)) &= \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=N \\ k_1, k_2, k_3 \geq 1}} e\binom{k_1, k_2, k_3}{n_1, n_2, n_3} \xi_{k_1} \otimes \zeta^{\mathfrak{m}}(k_2, k_3) \\ &+ \sum_{1 < m < N: \text{odd}} a_m(n_1, n_2, n_3) \xi_m \otimes \zeta^{\mathfrak{m}}(N-m). \end{aligned}$$

3.2 $\mathcal{U}$ に関する補題

$\mathcal{U}'$ の商空間 $L := \mathcal{U}'_{>0} / (\mathcal{U}'_{>0})^2$ と射影 $\pi^\bullet : \mathcal{U}'_{>0} \rightarrow L$ に対し, 次の合成写像を考える:

$$D_{<N}^\bullet : \mathcal{U}_N \xrightarrow{\Delta^\bullet - 1 \otimes \text{id}} \mathcal{U}'_{>0} \otimes \mathcal{U} \xrightarrow{\pi^\bullet \otimes \text{id}} L \otimes \mathcal{U}.$$

定理 6 より, 次の図式は可換であることに注意する:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_N & \xrightarrow{D_{<N}} & \mathcal{L} \otimes \mathcal{H} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \bar{\phi} \otimes \phi \\ \mathcal{U}_N & \xrightarrow{D_{<N}^\bullet} & L \otimes \mathcal{U} \end{array} \quad (3.1)$$

但し, $\bar{\phi} : \mathcal{L} \rightarrow L$ は ϕ' が誘導する Lie 余代数としての同型射である.

写像 $D_{<N}^\bullet$ に対し, 次の補題が重要な役割を果たす:

補題 9. [2, Lemma 2.7] 整数 $N > 2$ に対し, $\ker D_{<N}^\bullet = \mathbb{Q}f_N$.

重さ 5 の場合を見てみよう. 例えば, 定義通りの計算により $D_{<5}^\bullet(af_3f_2 + bf_5) = \bar{a}\bar{f}_3 \otimes f_2$ となる. 但し, $\bar{f}_{2i+1}$ で f_{2i+1} の L での像を意味する. よって, $D_{<5}^\bullet(af_3f_2 + bf_5) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ であるので, $\ker D_{<5}^\bullet = \mathbb{Q}f_5$ となることがわかる. 補題 9 の証明は容易であるが, 詳細は [2] を参照とする.

3.3 $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ の計算

補題 8 と補題 9 を合わせると, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ の計算が可能になる. ここでは, 深さ 2 の場合の導出方法を例解し, 深さ 3 の場合の公式を述べる.

$\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2))$ を計算する. 簡単のため, 重さ 5 の場合を考えよう. 補題 8 (i) から, $D_{<5}(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) = 3\xi_3 \otimes \zeta^{\mathfrak{m}}(2)$ となる. 可換図式 (3.1) から,

$$D_{<5}^\bullet \circ \phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) = (\bar{\phi} \otimes \phi) \circ D_{<5}(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) = 3\bar{f}_3 \otimes f_2$$

である. 一方, 定義から $D_{<5}^\bullet(3f_3f_2) = 3\bar{f}_3 \otimes f_2$ であるので,

$$\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) - 3f_3f_2 \in \ker D_{<5}^\bullet.$$

したがって, ある有理数 $a \in \mathbb{Q}$ があって,

$$\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) = 3f_3f_2 + af_5$$

となることがわかる^{*5}.

同様の計算から, 次の深さ 2 の場合の公式が得られる: 自然数 $N = n_1 + n_2$ に対し,

$$\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2)) - \sum_{\substack{m_1+m_2=N \\ m_1 \geq 3:\text{odd} \\ m_2 \geq 2}} e\binom{m_1, m_2}{n_1, n_2} f_{m_1} f_{m_2} \in \mathbb{Q}f_N. \quad (3.2)$$

深さが 3 の場合の公式を概観しよう. 自然数の組み $(m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3)$ に対し, 整数 $c\binom{m_1, m_2, m_3}{n_1, n_2, n_3}$ を次で定める:

$$c\binom{m_1, m_2, m_3}{n_1, n_2, n_3} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=N \\ k_1, k_2, k_3 \geq 1}} \delta\binom{m_1}{k_1} e\binom{m_2, m_3}{k_2, k_3} e\binom{k_1, k_2, k_3}{n_1, n_2, n_3}.$$

命題 10. [13, Proposition 3.7 (ii)] 自然数 $N = n_1 + n_2 + n_3$ に対し,

$$\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3)) - \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=N \\ m_1, m_2 \geq 3:\text{odd} \\ m_3 \geq 2}} c\binom{m_1, m_2, m_3}{n_1, n_2, n_3} f_{m_1} f_{m_2} f_{m_3} \in \mathcal{U}_{N,2}.$$

但し, $\mathcal{U}_{N,2}$ は $f_{2n+1}f_{N-2n-1}$ ($1 \leq n < (N-1)/2$) と f_N で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を表す.

証明は深さ 2 の場合と同様になされる (補題 8 (ii) に深さ 2 の場合の公式 (3.2) を代入し, 計算するだけである). この方法では, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ における $f_{m_1}f_{m_2}f_{m_3}$ の項たちの係数以外を決定することができないが, 定理 2 を証明するための準備としては, これで十分である.

3.4 ϕ の像を計算しての関係式を得る方法

同型写像 ϕ の像を計算して関係式を得る方法について, 深さ 2 の場合を説明し, 深さ 3 の場合の結果を述べる.

再び, 重さ 5 の場合を考えよう. 公式 (3.2) から, ある有理数 $a, b \in \mathbb{Q}$ があって $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)) = 3f_3f_2 + af_5$, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(3, 2)) = -2f_3f_2 + bf_5$ という表示を得る. 簡単にわかるように,

$$\phi(2\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3) + 3\zeta^{\mathfrak{m}}(3, 2)) = (2a + 3b)f_5 = \phi((2a + 3b)\zeta^{\mathfrak{m}}(5))$$

であるので, ϕ の単射性から $\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3)$ と $\zeta^{\mathfrak{m}}(3, 2)$ の modulo $\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(5)$ の関係式を得ることができる:

$$2\zeta^{\mathfrak{m}}(2, 3) + 3\zeta^{\mathfrak{m}}(3, 2) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(5)}.$$

^{*5} [3, §5.3] でも述べられているように, この方法では f_5 の係数 a の決定において, 近似値計算が必要になる. 付録 A において, 近似値計算が不要な f_N の係数の計算方法に言及する.

一般に、 ϕ による像の $f_{m_1}f_{m_2}$ の係数が全て消えているような $\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2)$ の一次結合は、 $\zeta^{\mathfrak{m}}(N)$ の有理数倍であることがわかる。

深さ 3 の場合も同様の議論が可能である。この場合、一次結合 $\xi = \sum a_{n_1, n_2, n_3} \zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3)$ で $\phi(\xi)$ の像の $f_{m_1}f_{m_2}f_{m_3}$ の係数が全て 0 であれば、 $\xi \in \mathfrak{D}_2\mathcal{H}$ となることが示せる。

補題 11. [13, Theorem 4.3] 偶数 $N > 4$ と有理数達 $a_{n_1, n_2, n_3} \in \mathbb{Q}$ ($n_1 + n_2 + n_3 = N$) に対し、次は同値:

- (1) $\sum_{n_1+n_2+n_3=N} a_{n_1, n_2, n_3} \zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3) \in \mathfrak{D}_2\mathcal{H}_N$,
- (2) 任意の $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)}$ に対し,

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=N} a_{n_1, n_2, n_3} c_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2, m_3)} = 0.$$

証明には、 N が偶数ならでの性質 “parity result” (cf. [11, Corollary 8]) を使う。 N が奇数の場合に補題 11 を示すには、 $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3))$ の $f_{od}f_{ev}$ 達の係数の寄与をまじめに計算*6しなくてはならないのだが、議論を空間 $\mathcal{A}$ に制限してやれば、補題 11 と同じ結果が得られる (この場合、parity result により、偶数重さの 3 重ゼータ値は全て $\mathfrak{D}_2\mathcal{A}$ の元になる)。

4 定理 2 の証明の概略

定理 2 を証明するには、考えている空間 $\mathcal{T}_N^{(j)}$ の ϕ による像の次元、すなわち、係数行列 $C_N^{(j)}$ の階数を計算できればよい。実際には、係数行列 $C_N^{(j)}$ の左零化ベクトルと偶周期多項式とを結びつけることにより、係数行列 $C_N^{(j)}$ の階数の評価が得られる。係数行列 $C_N^{(j)}$ の性質を述べて、定理 2 の証明を行う。

4.1 $\mathcal{T}_N^{(j)}$ の次元と行列 $C_N^{(j)}$ の右零化ベクトル

補題 11 より、係数行列 $C_N^{(j)}$ の右零化ベクトルは、 $\mathfrak{D}_2\mathcal{H}_N$ に入る $\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2, n_3)$ ($(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(j)}$) たちの線形和を与える。これにより、 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(j)} = \text{rank } C_N^{(j)}$ が従う。これを正確に述べよう。

正方行列 $C_N^{(j)}$ を以下で定める:

$$C_N^{(j)} := \left(c_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2, m_3)} \right)_{\substack{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)} \\ (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(j)}}}.$$

但し、 (m_1, m_2, m_3) は行を走り、 (n_1, n_2, n_3) は列を走るとする。 $C_N^{(j)}$ の右零化ベクトルで張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\ker {}^t C_N^{(j)}$ を次で定める:

$$\ker {}^t C_N^{(j)} = \left\{ (a_{n_1, n_2, n_3})_{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(j)}} \in \mathbb{Q}^{|\mathbb{I}_N^{(j)}|} \mid \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(j)}} a_{n_1, n_2, n_3} c_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2, m_3)} = 0 \right. \\ \left. (\forall (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)}) \right\}.$$

補題 11 から、 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(j)} = |\mathbb{I}_N^{(j)}| - \dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^t C_N^{(j)}$ である。行列 $C_N^{(j)}$ は $|\mathbb{I}_N^{(j)}|$ 次正方行列なので、結果として次の定理を得る:

*6 論文 [13] では扱わなかった。

定理 12. [13, Corollary 4.4] 偶数 N と $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(j)} = \text{rank } C_N^{(j)} (= |\mathbb{I}_N^{(j)}| - \dim_{\mathbb{Q}} \ker C_N^{(j)}).$$

4.2 周期多項式と $C_N^{(j)}$ の左零化ベクトル

周期多項式の空間から $C_N^{(j)}$ の左零化ベクトルの空間への単射が具体的に構成できる. 詳細は論文 [13] に譲り, 単射の存在性だけを述べる.

斉次偶多項式 $p(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ で, $p(x_1, 0) = 0$ かつ

$$p(x_1, x_2) - p(x_2 - x_1, x_2) + p(x_2 - x_1, x_1) = 0$$

となる多項式を簡約化偶周期多項式という. 次数 $N - 2$ の簡約化偶周期多項式で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathbf{W}_N^{\text{ev}}$ と表記する. よく知られるように, $\mathbf{W}_N^{\text{ev}} \otimes \mathbb{C} \cong S_N(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ (Eichler-志村-Manin 対応 [12]) となる. したがって, 次元の母関数は以下で与えられる:

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{W}_N^{\text{ev}} x^N = \mathbb{S}(x). \quad (4.1)$$

次数 $N - 2$ の簡約化偶周期多項式 $p(x_1, x_2) = \sum_{\substack{m_1+m_2=N \\ m_1, m_2 \geq 3: \text{odd}}} a_{m_1, m_2} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1}$ の係数 a_{m_1, m_2} は, 各 $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し, $C_N^{(j)}$ の左零化ベクトル^{*7}となる. これを正確に述べると, 次のようになる.

命題 13. [13, §5] 偶数 N と各 $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し, 次の写像は単射:

$$\bigoplus_{\substack{1 < m < N \\ m: \text{even}}} (\mathbf{W}_{N-m}^{\text{ev}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} x_3^{m-1}) \longrightarrow \ker C_N^{(j)} \\ \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)}} a_{m_1, m_2, m_3} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} x_3^{m_3-1} \longmapsto (a_{m_1, m_2, m_3})_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)}}$$

行列 $C_N^{(3)}$ の場合は, より多くの周期多項式との関係が見出せる. この場合, 係数 $c_{(n_1, n_2, n_3)}^{(m_1, m_2, m_3)}$ の定義から行列 $C_N^{(3)}$ は次の二つの正方行列の積となる: $C_N^{(3)} = F_N \cdot E_N$ で,

$$F_N = \left(\delta_{(n_1)}^{(m_1)} e_{(n_2, n_3)}^{(m_2, m_3)} \right)_{\substack{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)} \\ (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)}}}, \\ E_N = \left(e_{(n_1, n_2, n_3)}^{(m_1, m_2, m_3)} \right)_{\substack{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)} \\ (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{I}_N^{(3)}}}.$$

すると, 簡単な線形代数から

$$\ker C_N^{(3)} = \ker F_N \oplus (\text{Im } F_N \cap \ker E_N) \quad (4.2)$$

^{*7} 右零化ベクトルではない. 係数行列の右零化ベクトルが関係式を与え, 左零化ベクトルが周期多項式であるという見方は, 深さ 2 の場合に Baumard-Schneps[7] によって与えられたものである.

となることに注意する. 以下, 右辺の各々の空間について周期多項式との対応を述べる.

$\ker F_N$. 正方行列 F_N は, Zagier[19, §6] により研究された行列からなるブロック対角行列である (cf. [13, (6.3) 式]). したがって, Zagier の結果 [13, Theorem 6.3] の帰結として, 簡約化偶周期多項式の空間と奇周期多項式の空間から行列 F_N の左零化ベクトルへの単射が存在する (具体的な対応に興味がある方は [13, Theorem 6.3] を参照されたい). ここで, 奇周期多項式とは, 関係式 $p(x_1, x_2) - p(x_1 + x_2, x_2) - p(x_1 + x_2, x_1) = 0$ を満たす斉次奇多項式であり, 次数 $N - 2$ の奇周期多項式で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathbf{W}_N^{\text{od}}$ と表記すると, 偶周期多項式のとき同様, $\mathbf{W}_N^{\text{od}} \otimes \mathbb{C} \cong S_N(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ が成り立つ:

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{W}_N^{\text{od}} x^N = \mathbb{S}(x). \quad (4.3)$$

定理 14. 次の単射が存在する:

$$\left(\bigoplus_{\substack{1 \leq m \leq N \\ m:\text{odd}}} \mathbf{W}_{N-1-m}^{\text{od}} \otimes \mathbb{Q}x_3^{m-1} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{1 \leq m \leq N \\ m:\text{odd}}} \mathbf{W}_{N+1-m}^{\text{ev}} \otimes \mathbb{Q}x_3^{m-1} \right) \longrightarrow \ker F_N.$$

$\text{Im } F_N \cap \ker E_N$. 空間 $\text{Im } F_N \cap \ker E_N$ は, 簡約化偶周期多項式との対応がある. この対応の基本的なアイデアは [14] で発展させたものである. 詳細を割愛して結論を述べると, 簡約化偶周期多項式の空間から空間 $\text{Im } F_N \cap \ker E_N$ への単射な写像が構成できるというものである.

定理 15. [13, Theorem 6.5] 次の単射が存在する:

$$\bigoplus_{\substack{0 \leq m \leq N \\ m:\text{even}}} \mathbf{W}_{N-m}^{\text{ev}} \otimes \mathbb{Q}x_3^{m-1} \longrightarrow \text{Im } F_N \cap \ker E_N.$$

定理 15 の対応において, ローラン多項式 (x_3^{-1}) を許していることに注意しておく.

4.3 定理 2 の証明

これまでの結果を用いて, 定理 2 の証明を述べる.

まず, 定理 2 の前半の主張は, 命題 13 に現れる簡約化偶周期多項式の空間の次元の母関数が, (4.1) より $\mathbb{S}(x)\mathbb{E}(x)$ であることから直ちにわかる. 実際, 各 $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し,

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \ker C_N^{(j)} x^N \geq \mathbb{E}(x)\mathbb{S}(x)$$

であるので, 定理 12 より

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(j)} x^N \leq \mathbb{O}(x)^2 \mathbb{E}(x) - \mathbb{E}(x)\mathbb{S}(x)$$

を得る.

後半の主張を示す. 式 (4.2) より, $\dim_{\mathbb{Q}} \ker C_N^{(3)} = \dim_{\mathbb{Q}} \ker F_N + \dim_{\mathbb{Q}} (\text{Im } F_N \cap \ker E_N)$ である. これに対し, 定理 14 と (4.1), (4.3) から,

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \ker F_N x^N \geq (x + \frac{1}{x})\mathbb{S}(x)\mathbb{O}(x)$$

であり, 定理 15 から

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} (\operatorname{Im} F_N \cap \ker E_N) x^N \geq \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x)$$

を得るので, これらをあわせて

$$\sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \ker C_N^{(3)} x^N \geq \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x) + \left(\frac{1}{x} + x\right) \mathbb{O}(x) \mathbb{S}(x)$$

を得る. よって, 定理 12 により $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(3)}$ の評価が得られる.

注意 16. 行列 $C_N^{(j)}$ の階数は計算機で簡単に計算できる. 数値実験によれば, 空間 $\mathcal{T}_N^{(j)}$ の予想次元は以下になると予想される:

$$\begin{aligned} \sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(1)} x^N &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^2 \mathbb{E}(x) - \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x), \\ \sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(2)} x^N &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^2 \mathbb{E}(x) - \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x), \\ \sum_{N>0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_N^{(3)} x^N &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^2 \mathbb{E}(x) - \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x) - \left(\frac{1}{x} + x\right) \mathbb{O}(x) \mathbb{S}(x). \end{aligned}$$

定理 2 を鑑みると, $j = 1, 3$ の場合は, 周期多項式との対応が各全単射になることが期待される. $j = 2$ の場合は $\frac{1}{x^2} \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x) - \mathbb{E}(x) \mathbb{S}(x) = \mathbb{S}(x)$ に対応するだけ, 関係が存在するはずである. このカスプ形式に対応する未発見な部分は, 奇周期多項式の “微分” と対応しそうであることを観察している ([13, Remark 5.5]). Zagier の仕事 [19] で簡約化偶周期多項式の微分が現れるのは知られていたが, 奇周期多項式の微分とのつながりは初めての現象である.

付録 A モチビック 2 重ゼータ値の ϕ の計算

本節では, $n_1 + n_2$ が偶数の場合に $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2))$ の像の $f_{n_1+n_2}$ の係数を決定する方法について述べる. 重さが奇数の場合は, parity result の明示公式 ([19, Proposition 7]) と Goncharov 余積の明示公式 ([1, (21) 式]) を使うと, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2))$ の $f_{n_1+n_2}$ の係数の明示公式が計算できることに注意しておく.

重さ N が偶数の場合, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2))$ の $f_{n_1+n_2}$ の係数を $\tau(n_1, n_2)$ と置く. このとき, 次が成り立つ:

定理 17. 偶数 $N > 2$ と自然数 n_1, n_2 ($n_1 + n_2 = N$) に対し,

$$\begin{aligned} \tau(n_1, n_2) = & -\frac{1}{12} \left(5 + 3(-1)^{n_2} \binom{N-1}{n_2-1} - (-1)^{n_2} \binom{N-1}{n_2} \right) \\ & + \frac{\beta_{n_1} \beta_{n_2}}{3\beta_N} + \frac{(-1)^{n_2}}{3} \sum_{\substack{m_1+m_2=N \\ m_1, m_2 \geq 1}} \binom{m_1-1}{n_2-1} \frac{\beta_{m_1} \beta_{m_2}}{\beta_N}. \end{aligned}$$

但し, $\beta_n := -\frac{B_n}{2n!}$.

Proof. 証明は天下りの的に $\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2)$ の間の全ての関係式が $\ker \phi$ に入っていることを確かめることでなされる. この場合, 正規化された複シャッフル関係式

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2) + \zeta^{\mathfrak{m}}(n_2, n_1) + \zeta^{\mathfrak{m}}(N) - \zeta^{\mathfrak{m}}(n_1)\zeta^{\mathfrak{m}}(n_2), \\ 0 &= \sum_{k_1+k_2=N} \left(\binom{k_2-1}{n_1-1} + \binom{k_2-1}{n_2-1} \right) \zeta^{\mathfrak{m}}(k_1, k_2) - \zeta^{\mathfrak{m}}(n_1)\zeta^{\mathfrak{m}}(n_2) \end{aligned}$$

の各右辺が $\ker \phi$ に入ることが示せば良い (但し, $(n_1, n_2) \neq (1, 1)$). 仮定より,

$$\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, n_2)) = \sum_{\substack{m_1+m_2=N \\ m_1, m_2 \geq 3: \text{odd}}} e\binom{m_1, m_2}{n_1, n_2} f_{m_1} f_{m_2} + \tau(n_1, n_2) f_N$$

であるので, $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1)\zeta^{\mathfrak{m}}(n_2)) = \frac{\beta_{n_1}\beta_{n_2}}{\beta_{n_1+n_2}} f_{n_1+n_2}$ (n_1, n_2 : 偶数) となることに注意すると, $\tau(n_1, n_2)$ は次の関係式を満たすべきである:

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(n_1, n_2) + \tau(n_2, n_1) + 1 - \frac{\beta_{n_1}\beta_{n_2}}{\beta_N}, \\ 0 &= \sum_{k_1+k_2=N} \left(\binom{k_2-1}{n_1-1} + \binom{k_2-1}{n_2-1} \right) \tau(k_1, k_2) - \frac{\beta_{n_1}\beta_{n_2}}{\beta_N}. \end{aligned} \quad (\text{付録 A.1})$$

これを証明するには, Gangl, 金子, Zagier[9, Supplement to Proposition 5] により得られた拡張化奇周期多項式に関する命題を用いる (Brown[5, Theorem 7.1] による有理数係数の結合子を用いてもよい). ここで, 多項式

$$\hat{P}(x_1, x_2) = \sum_{\substack{n_1+n_2=N \\ n_1, n_2 \geq 0}} p_{n_1, n_2} x_1^{n_1-1} x_2^{n_2-1}$$

が拡張化奇周期多項式であるとは, $\hat{P}(-x_1, x_2) = -\hat{P}(x_1, x_2)$ かつ

$$\hat{P}(x_1, x_2) - \hat{P}(x_1 + x_2, x_2) - \hat{P}(x_1 + x_2, x_1) = 0$$

を満たすものをいう. 次数 $N-2$ の拡張化奇周期多項式の空間を $\widehat{\mathbf{W}}_N^{\text{od}}$ と表記する. 簡単にわかるように, $\hat{P}(x_1, x_2) \in \widehat{\mathbf{W}}_N^{\text{od}}$ ならば, $\hat{P}(x_1, x_2)$ は対称関数である: $p_{n_1, n_2} = p_{n_2, n_1}$. また, $\widehat{\mathbf{W}}_N^{\text{od}} \otimes \mathbb{C} \cong M_N(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に注意しておく (cf. [20, Theorem p.453]).

今, $\hat{P}(x_1, x_2)$ として, Eisenstein 級数に対応する元を取る: 偶数 $N \geq 4$ に対し,

$$\hat{\mathcal{E}}_N(x_1, x_2) := \sum_{\substack{n_1+n_2=N \\ n_1, n_2 \geq 0}} \beta_{n_1}\beta_{n_2} x_1^{n_1-1} x_2^{n_2-1} = \mathcal{E}_N(x_1, x_2) - \frac{\beta_N}{2} \left(\frac{x_1^{N-1}}{x_2} + \frac{x_2^{N-1}}{x_1} \right).$$

簡単にわかるように, $\hat{\mathcal{E}}_N(x_1, x_2) \in \widehat{\mathbf{W}}_N^{\text{od}}$ である. 多項式

$$Q_N(x_1, x_2) = 5 \frac{x_1^{N-1} - x_2^{N-1}}{x_1 - x_2} + 3 \frac{(x_1 - x_2)^{N-1} - x_1^{N-1}}{x_2} - \frac{(-x_1 + x_2)^{N-1} - x_2^{N-1}}{x_1}.$$

に対し, 多項式

$$\frac{1}{3}(\mathcal{E}_N(x_1 - x_2, x_2) + \mathcal{E}_N(x_1, x_2)) - \frac{\beta_N}{12} Q_N(x_1, x_2)$$

の $x_1^{n_1-1}x_2^{n_2-1}$ の係数を $\tau'(n_2, n_1)$ (Gangl, 金子, Zagier の 2 重ゼータ値の定義和の順序が逆であるため, n_1 と n_2 を入れ替えた) とおくと,

$$\begin{aligned}\tau'(n_2, n_1) = & -\frac{\beta_N}{12} \left(5 + 3(-1)^{n_1} \binom{N-1}{n_1-1} - (-1)^{n_1} \binom{N-1}{n_1} \right) \\ & + \frac{\beta_{n_1}\beta_{n_2}}{3} + \frac{(-1)^{n_1}}{3} \sum_{\substack{m_1+m_2=N \\ m_1, m_2 \geq 1}} \binom{m_1-1}{n_1-1} \beta_{m_1}\beta_{m_2}\end{aligned}$$

である. [9, Supplement to Proposition 5] から $\tau'(n_1, n_2)$ は次の関係式を満たすことがわかる: 偶数 $N \geq 4$ と $N = n_1 + n_2$ に対し,

$$\begin{aligned}0 &= \tau'(n_1, n_2) + \tau'(n_2, n_1) + \beta_N - \beta_{n_1}\beta_{n_2}, \\ 0 &= \sum_{k_1+k_2=N} \left(\binom{k_2-1}{n_1-1} + \binom{k_2-1}{n_2-1} \right) \tau'(k_1, k_2) - \beta_{n_1}\beta_{n_2}.\end{aligned}$$

したがって, $\tau(n_1, n_2) = \tau'(n_1, n_2)/\beta_{n_1+n_2}$ は (付録 A.1) を満たす. □

謝辞

今回, 講演の機会をくださいました世話人の方々に感謝の意を表したいと思います. ありがとうございました.

参考文献

- [1] H. Bachmann, K. Tasaka, *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. J., accepted for publication.
- [2] F. Brown, *Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$* , Ann. of Math., **175**(2) (2012), 949–976.
- [3] F. Brown, *On the decomposition of motivic multiple zeta values*, ‘Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry’, Adv. Studies in Pure Math. 68, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2012), 31–58.
- [4] F. Brown, *Motivic periods and $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$* , arXiv:1407.5165.
- [5] F. Brown, *Zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of a punctured elliptic curve*, arXiv:1504.04737.
- [6] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393**, no. 3-4 (1997), 403–412.
- [7] S. Baumard, L. Schneps, *Period polynomial relations between double zeta values*, Ramanujan J., **32**(1) (2013), 83–100.
- [8] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Ann. of Math., **174**(1) (2011), 341–360.

- [9] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, In: Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.
- [10] A.B. Goncharov, *Galois symmetries of fundamental groupoids and non-commutative geometry*, Duke Math. J., **128**(2) (2005), 209–284.
- [11] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.
- [12] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood (1984), 197–249.
- [13] D. Ma, K. Tasaka, *On triple zeta values of even weight and their connections with period polynomials*, 40 pages, arXiv:1603.01013.
- [14] K. Tasaka, *On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials*, Kyushu J. Math. **70**(1) (2016), 1–28.
- [15] 田坂浩二, 多重ゼータ値の次元予想の紹介 –Broadhurst-Kreimer 予想から Brown 予想まで–, 第 6 回多重ゼータミニセミナー報告集, 1–21, 2013. <http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/6thMZV-Proceeding.pdf>
- [16] 田坂浩二, 周期たちの間の線形関係式の数値実験, 第 11 回代数学と計算報告集, 2016 予定. <http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/AC2015-Proceeding.pdf>
- [17] 安田正大, 多重ゼータ値の *Hoffman* 基底, RIMS kôkyûroku Bessatsu, **B51** (2014), 375–433.
- [18] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.
- [19] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$* , Ann. of Math., **175**(2) (2012), 977–1000.
- [20] D. Zagier, *Periods of modular forms and Jacobi theta functions*, Invent. Math., **104** (1991), 449–465.