

第26回整数論サマースクール報告集  
「多重ゼータ値」

2018年9月10日～9月14日

於 愛知県田原市 伊良湖シーパーク&スパ

## まえがき

第26回整数論サマースクール「多重ゼータ値」は、2018年9月10日から9月14日にかけて愛知県の渥美半島の先端にある『伊良湖シーパーク&スパ』にて開催されました。この報告集には、サマースクールでの講演をもとに、講演者の方々にご執筆いただいた原稿が収録されています。また、ポスター発表者の方々にも寄稿をお願いしました。

テーマである多重ゼータ値は、近年、様々な数学や物理の対象と結びつきながら活発に研究されています。今回のサマースクールでは、次元予想や反復積分表示などの多重ゼータ値の基本事項から始め、実数世界に住む多重ゼータ値が、有限多重ゼータ値（「アデル的環」世界の多重ゼータ値）や $p$ 進多重ゼータ値（「 $p$ 進」世界の多重ゼータ値）、モチヴィック多重ゼータ値（「モチーフ」世界の多重ゼータ値）といった別々の世界に住むゼータ値と結びついていく様を概観しました。また、多重ゼータ関数の非負整数点での値の研究、結合子、モジュラー形式との関係など、多重ゼータ値のさらなる広がり期待して発展的な話題も学習しました。各方面の最前線をいく講演者の方々に、研究の進捗状況を臨場感をもってお話しいただきました。この報告集からも、その臨場感は十分に読み取れることと思います。

この報告集では、2018年現在の多重ゼータの研究成果と課題を可能な限り集約することを一つの目標に掲げました。いくなれば『多重ゼータガイドブック2018』です。多重ゼータの各方面の研究の最前線を幅広く知ることができるよう、講演者の方々にまとめていただきました。未解決問題も多分に含まれていますので、多重ゼータに興味があるという方は問題に取り組んでみられると良いかもしれません。多重ゼータ値の初学者向けの教科書として、故荒川恒男先生と金子昌信先生による『多重ゼータ値入門 (COE Lecture Note Vol.23, 九州大学, 2010)』（その前身は立教大学での講究録(2005)）があります。多重ゼータ値を研究している今の若い世代のほとんどがこの教科書を手に学んだと思います。これから多重ゼータ値を研究されるという方には一読をお勧めします。

サマースクールの企画・運営にあたって、大変多くの方々にご協力いただきました。講演者の方々には、予稿の準備、事前打合せ、講演準備、報告集の執筆など、長期にわたる膨大な作業に多大な労力を費やしていただきました。台風等の気象災害に妨げられた回もありましたが、各グループに分かれて、2017年8月九州大学における最初の打合せから数えて計10回もの事前打合せを行いました。ここに記録として残しておきます。どの打合せも共同研究のような自由な雰囲気で行えたことは、大変有難かったです。また、1分間ショットトーク（ポスター発表者）、多重ゼータ値の関係式のポスター（田中立志さん、Henrik Bachmannさん）、多重ゼータ値公式集（広瀬稔さん）、多重ゼータ値の計算機実演（門田慎也さん）など、様々な企画にも多くの方々のご尽力をいただきました。企画について、手探りで準備を進める中、大野泰生先生、井原健太郎先生には初期の段階から多くのご助言を賜りました。特に大野先生には整数論サマースクール世話人経験者としても貴重なアドバイスを頂戴し、本サマースクールの企画・運営を根本から支え続けていただきました。また、松本耕二先生、津村博文

先生，中村弥生さん，田中立志さん，鎌野健さん，佐々木義卓さん，斎藤新悟さんにも貴重なご助言をいただきました。運営については，伊吹山知義先生，青木宏樹さん，水澤靖さん，木村巖さん，原隆さんにも諸事につけてご相談させていただきました。写真によるスクールの記録をご担当くださった大槻玲さん，当日の会場で受付やホワイトボード清掃，お茶菓子の補充など裏方の重要な仕事を引き受けてくださった大学院生の皆さんにも多大なご協力を賜りました。会場とした伊良湖シーパーク&スパの皆様には，期間中，非常に快適な環境を提供していただきました。この場を借りて，皆様に感謝の意を表したいと思います。本当にありがとうございました。

本サマースクールは，以下の研究資金から援助を受けております。

1. 科学研究費・基盤研究 (S) 16H06336 (研究代表者：金子昌信)
2. 科学研究費・基盤研究 (A) 18H03667 (研究代表者：都築暢夫)
3. 科学研究費・基盤研究 (B) 18H01110 (研究代表者：古庄英和)
4. 科学研究費・若手研究 18K13393 (研究代表者：田坂浩二)
5. 科学研究費・若手研究 18K13398 (研究代表者：三柴善範)
6. 科学研究費・特別研究員奨励費 17J01827 (研究代表者：佐久川憲児)
7. 公益財団法人大幸財団 (研究代表者：田坂浩二)
8. 独立行政法人日本学術振興会 二国間交流事業オープンパートナーシップ共同研究 (研究代表者：金子昌信)

参加費をご自身の研究費や，学生の場合，指導教員の研究費などで工面された方々もいらっしゃるものと存じます。これらもサマースクールへの実質的な支援だと思えます。本サマースクールをご支援くださいました皆様に感謝申し上げます。

今年で25周年を迎えた整数論サマースクールですが，この貴重な機会が今後も受け継がれていくことを切に祈りつつ，結びの言葉とさせていただきます。

第26回整数論サマースクール 世話係

佐久川憲児 (京都大学)

田坂浩二 (愛知県立大学)

三柴善範 (福岡工業大学)



## 第26回整数論サマースクール「多重ゼータ値」

日時 2018年9月10日(月) – 14日(金)

場所 愛知県田原市 伊良湖シーパーク&スパ

世話人 佐久川憲児(京都大学), 田坂浩二(愛知県立大学), 三柴善範(福岡工業大学)

### プログラム

9月10日(月)

- 14:30 – 16:30 金子昌信(九州大学)  
多重ゼータ値の正規化基本定理
- 16:45 – 18:15 川崎菜穂(東北大学)  
Yamamoto 積分表示と積分級数等式
- 19:30 – 21:00 ポスター発表

9月11日(火)

- 9:00 – 10:30 原田遼太郎(名古屋大学)  
KZ 方程式と KZ 結合子
- 10:45 – 12:15 原隆(東京電機大学)  
「実/複素ゼータの世界」から「 $p$ 進ゼータの世界」へ
- 13:30 – 15:00 小野雅隆(慶應義塾大学)  
「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ
- 15:15 – 16:45 安田正大(大阪大学)  
「 $p$ 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ
- 17:00 – 18:30 関真一郎(東北大学)  
「 $\mathcal{F}$ -有限多重ゼータ値」から「 $\widehat{\mathcal{F}}$ -有限多重ゼータ値」へ: ただし,  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$  or  $\mathcal{S}$

9月12日(水)

- 9:00 – 10:30 小野塚友一(九州大学)  
多重ゼータ関数の解析接続と負の整数点での極限值
- 10:45 – 12:15 小見山尚(名古屋大学)  
特異点解消法と繰り込み法

9月13日(木)

- 9:00 – 10:30 山本修司(慶應義塾大学)  
多重ゼータ値と  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  の基本群
- 10:45 – 12:15 佐久川憲児(京都大学)  
Hodge理論で次元評価したら失敗した件について
- 13:30 – 16:00 萩原啓(理化学研究所/慶應義塾大学)  
「多重ゼータ値」から「モチヴィック多重ゼータ値」へ
- 16:15 – 17:45 広瀬稔(九州大学)  
Brownの定理の証明の概略
- 18:00 – 19:00 田坂浩二(愛知県立大学)  
多重ゼータ値のモジュラー現象

9月14日(金)

- 9:00 – 10:30 寺杣友秀(東京大学)  
退化楕円曲線と多重ゼータ値の重さフィルトレーションについて
- 10:45 – 12:15 古庄英和(名古屋大学)  
アイについて...

参加者リスト (91名, 敬称略, 所属は参加申請時のもの)

東北大学	大野泰生 関真一朗 川崎菜穂 内間木将斗 石澤夏希 中山拓実 安部民将 村上友哉 窪田隆弘 常盤裕太 桜田紘佑 木村藍貴 伊東邦大	名古屋大学	古庄英和 Henrik Bachmann 梅澤瞭太 丹羽裕紀 館野莊平 藤井大輔 中森幸佑 早水遼 小見山尚 原田遼太郎
都留文科大学 東京大学	岡野恵司 寺杣友秀 佐藤謙 片岡武典	名古屋工業大学	南範彦 山縣幸司 山本康太 柳井裕道 齋藤正顕 喜友名朝也 佐久川憲児
東京理科大学	多田圭汰 関川隆太郎 青木宏樹 小松亨 野村次郎	愛知工業大学 名古屋文理大学 舞鶴高専 京都大学	石井竣 石塚裕大 安田正大 伊吹山知義 勢力稔也 佐々木義卓
東京工業大学 国立情報学研究所 日本大学 東京電機大学	鈴木正俊 町出智也 下元数馬 原隆 植木潤	大阪大学	伊吹山知義 勢力稔也 佐々木義卓 中村弥生 井原健太郎 長谷川武博
上智大学	中筋麻貴 角皆宏	大阪体育大学 近畿大学	北山秀隆 加藤正輝 土肥雅之 山崎義徳 門田慎也 金子昌信
早稲田大学	神辺晃太郎 隈川直貴 木村直記	滋賀大学 和歌山大学 神戸大学	池田穰 古園孔士 小野塚友一 広瀬稔 吉原周 小谷久寿 小山宏次郎
理化学研究所	萩原啓 石川勲	愛媛大学 新居浜高専 九州大学	村原英樹 三柴善範 菊田俊幸
慶應義塾大学	山本修司 大槻玲 松村英樹 金村佳範 小野雅隆	元九州大学 中村学園大学 福岡工業大学	Sprung Florian 佐藤信夫 Yen-Tsung Chen
筑波大学 茨城大学 新潟大学	竹山美宏 松尾和周 星明考 金井和貴 長谷川寿人 木村巖	アリゾナ州立大学 国立台湾大学 (NCTS) 国立清華大学, 台湾	
富山大学 愛知県立大学	田坂浩二		

## 目次

まえがき

写真

プログラム

参加者リスト

1. 多重ゼータ値導入-定義から正規化まで-  
金子昌信（九州大学）
2. Yamamoto 積分表示と積分級数等式  
川崎菜穂（東北大学）
3. KZ 方程式と KZ 結合子  
原田遼太郎（名古屋大学）
4. 「実/複素ゼータの世界」から「 $p$ 進ゼータの世界」へ  
原隆（東京電機大学）
5. 「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ  
小野雅隆（慶應義塾大学）
6. 「 $p$ 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ  
安田正大（大阪大学）
7. 「 $\mathcal{F}$ -有限多重ゼータ値」から「 $\widehat{\mathcal{F}}$ -有限多重ゼータ値」へ: ただし,  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$  or  $\mathcal{S}$   
関真一郎（東北大学）
8. 多重ゼータ関数の解析接続と負の整数点での極限值  
小野塚友一（九州大学）
9. 特異点解消法と繰り込み法  
小見山尚（名古屋大学）
10. 多重ゼータ値と  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  の基本群  
山本修司（慶應義塾大学）
11. Hodge 理論で次元評価したら失敗した件について  
佐久川憲児（京都大学）
12. 「多重ゼータ値」から「モチヴィック多重ゼータ値」へ  
萩原啓（理化学研究所/慶應義塾大学）

13. Brown の定理の証明の概略  
広瀬稔 (九州大学)
14. 多重ゼータ値のモジュラー現象  
田坂浩二 (愛知県立大学)
15. 退化楕円曲線と多重ゼータ値の重さフィルトレーションについて  
寺杣友秀 (東京大学)
16. Kontsevich's eye, Lie graphs and the Alekseev-Torossian associator  
古庄英和 (名古屋大学)

#### ポスター発表報告

17. 多重ポリログ関数に対する Landen 型接続公式の多変数化について  
伊東邦大 (東北大学)
18. 重さ, 深さ, 高さを固定した有限多重ゼータ値の和の双対性について  
桜田紘佑 (東北大学)

#### ポスター掲載

19.  $3x + 1$  関数の一般化における無限軌道の剰余列の非周期性について (ポスター)  
藤井大輔 (名古屋大学)
20. A relation for multi-poly-Bernoulli polynomials (ポスター)  
内間木将斗 (東北大学)
21. Confluence relations for multiple zeta values (ポスター)  
佐藤信夫 (National Center for Theoretical Sciences, 国立台湾大学)

#### 番外編

22. Multiple zeta values and their relations (ポスター)  
Henrik Bachmann (名古屋大学)
23. 多重ゼータ値公式集  
広瀬稔 (九州大学)

# 多重ゼータ値導入

— 定義から正規化まで —

金子昌信

## 1 定義

多重ゼータ値 (Multiple Zeta Value, MZV と略す) とは, 与えられた自然数の組  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して次の無限級数で定まる実数のことである.

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}. \quad (1.1)$$

和の  $m_i$  は自然数をわたっている.  $\mathbf{k}$  のことをインデックス (index) とかインデックス集合 (index set) とか言う. 一番最後の  $k_r$  が 1 だと発散し,  $k_r > 1$  であると収束するので,  $k_r \geq 2$  と仮定する. この発散, 収束は簡単に分かるのであるが,  $k_i$  をより一般に複素数とした場合の絶対収束域について小野塚さんの稿の冒頭に述べられており, そのごく特殊な場合と言うことで, ここでは省略する. 多重ゼータ「値」と言えばもっぱら  $k_i$  が自然数の場合を指す.

定義 (1.1) の右辺の和を  $\zeta(k_r, \dots, k_1)$  のように,  $k_i$  を逆に並べて書く流儀もあるので文献にあたる際は注意が必要である. これはそれぞれの流儀について, 他の関連対象との整合性や好み, 思い入れなどが相俟って, どちらかに段々と統一されていくというものではなさそうである. 私自身はどちらの流儀でも論文を書いている, 強い主張はないが, 現在は上記の流儀で書くことが多い.

多重ゼータ値は Goldbach と Euler が  $r = 2$  の場合 (「二重ゼータ値」) を考えたのが始まりで, 1742 年から 43 年にかけて, 二重ゼータ値に関する二人の間の手紙のやりとりが 5 通残されている. それによれば Goldbach が二重ゼータ値を最初に考えた人となるようである. 彼に刺激を受けて, その性質について Euler が格段に研究を進めた. それ以後いろいろな研究がなされてきたわけであるが, 様々な分野との関わりから活発に研究されるようになったのは 1990 年代以降である. そのことは, 現代の MZV 研究のパイオニアの一人 Hoffman 氏が収集している文献情報の Web ページ [12] を見るとよく分かる.

私事にわたって誠に恐縮であるが, この機会に少し思い出話を差し挟むことをご寛恕願いたい. 私自身が多重ゼータ値を初めて知ったのは, 恐らく 1992 年, Zagier 氏が京都大学で行った何かの講演 (保型形式のシンポジウムでの話だったか, 別の何かセミナーでの話だったか, 思い出せない) であったと思う. しかしその時は自分の研究対象になるとは夢にも思わず, 超特異楕円曲線の  $j$  不変量とか, 別のことをやっていた. 93 年 3 月から 94 年 9 月までドイツに行き, Zagier 氏と共同研究もするようになるのであるが, ドイツでは彼と多重ゼータ値の話は一切しなかったように思う. 私がドイツに行ったのが村上順さんの帰国直前の頃で, 順さん (阪大時代の助手仲間, 先輩) とは少し彼の地で多重ゼータ値の話をした記憶がある. というのも, 丁度その頃順さんが Le-Murakami の関係式として知られる結果を含む, 結び目理論における仕事をされた頃で,  $\zeta(3)$

の無理性の別証明がこんなところから出来ないか、などという話をビールを飲みながらした。恐らく順さんが日本人で最初に多重ゼータ値を研究対象として扱った人である。ではなぜ私が多重ゼータ値に取り組むようになったかという、それはその頃戯れに定義をして「遊んで」いた、多重ベルヌーイ数というものを通じての、ある偶然と、故荒川恒男さん(2003年10月3日歿)の大きい導きによる。

私は1990年10月に大阪大から京都工芸繊維大に移り、半年間はもとの宝塚の住まい(両親の家)から京都の北まで2時間以上かけて通っていたので、通勤電車の中は講義準備や読書などに恰好の場であった。ある日(ノートによれば90年12月8日とある。この日は土曜日で、当時土曜の夜間コースのクラスを持っていた)、講義の参考に使っていた杉浦光夫先生の「解析入門I」を眺めていて(それはおそらく第IV章 §13 末の問題3)であると思う)、dilogarithm

$$Li_2(x) = \int_0^x \frac{-\log(1-x)}{x} dx$$

において  $x = 1 - e^{-t}$  なる変数変換を行うと

$$Li_2(x) = \int_0^{-\log(1-x)} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

となり、 $-\log(1-x) = y$  とおいて両辺を  $y$  で微分すると古典的 Bernoulli 数の母関数が現れる、それなら同様の操作を  $Li_2(x)$  の代わりに一般の多重対数関数  $Li_k(x)$  を使って行って得られる級数の展開係数として「多重ベルヌーイ数」が定義できるのではないかと考えたのである。

私は大学一年生のとき微積分の講義を杉浦先生から受けた。学生生活を通じて最も印象的な講義の一つであった。この本はその講義の翌年か翌々年に出て、あの内容のほぼ全部を一年間に講義してしまわれたのには今更ながら驚くが、ともかく自分の講義の参考として手元にあった。杉浦先生の講義を聴いていなかったら、おそらくこの本を購入することもなかったと思われ、多重ベルヌーイ数を定義することもなかったに違いない。しばらくは定義ただけで放ってあったのだが、翌1991年9月22日、九大から阪大に移られて間もない伊吹山さんから、概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値は「高次ベルヌーイ数」(それがどんなものかは分からないと言われた)で書いて、それが実は通常のベルヌーイ数で書ける、ということになっているのではという話を聞き、もしかしたら以前定義した多重ベルヌーイ数もまんざら無意味ではないかも知れないと思った。ノートによれば9月30日より少しずつ計算を開始して、1992年の4月頃には、ポルドーの雑誌に出た最初の論文“Poly-Bernoulli numbers”に書いてあることは大体出来ている。私は当時まだスターリング数を知らなかったの、それにあたる数も自分で定義し性質を調べたりして微笑ましい。これを学会などで話したところ、荒川さんが興味を持って下さった。ドイツ滞在中の93年の9月にポルドーであった Journées Arithmétiques でも発表し、そこに荒川さんも来られていて、いろいろとお話した(ところで上記の多重ベルヌーイ数の最初の論文は、詳しい事情は書かないが随分出版が遅れ、Journées Arithmétiques 特集号の2年後の97年にやっと出た)。

帰国後の95年、次の偶然が訪れる。私は京都大で非常勤講師をしていて、線形代数を教えていた。講義のあとなどに、当時の教養部の談話室のようなところで新着雑誌を眺めるのが習慣であった。ある日、リーマンゼータ値についてのある公式が載っている論文が目にとまり(タイトルその他、残念ながらもう忘れてしまった)、それが何となく多重ベルヌーイ数について得ていた等式に似ていたことからヒントを得て、数値実験をして、しかし結局新しいことは得られなかったという顛末を書いた手紙を荒川さんに書いた。当時は電子メールもあるにはあったが、まだまだ手紙が普通の時代であった。その手紙の当該部分だけを引用すると

荒川様

— (略) —

それはともかく、最近少し考えたことを書きます。結局 Zagier さんの “multiple zeta” に帰してしまい新しいことはないのですが、

第2種スターリング数  $\widehat{\mathfrak{S}}_n^m$  を (ふつうのやつ) の  $m!$  倍)

$$x^n = \sum_{m=0}^n \widehat{\mathfrak{S}}_n^m \binom{x}{m}$$

で def すると, poly-Bern. #  $B_n^{(k)}$  は

$$B_n^{(k)} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+n} \widehat{\mathfrak{S}}_n^m}{(m+1)^k} \quad (n \geq 0, \forall k) \quad (*)$$

でした。一方, 第一種  $\widehat{S}_n^m$  を

$$\binom{x}{n} = \sum_{m=0}^n \widehat{S}_n^m x^m$$

とすると,

$$\zeta(n+1) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \widehat{S}_n^m}{m}$$

というリーマンゼータの公式があります (Jordan の本 p. 166 (6))。そこで,

$$\zeta_n^{(k)} := \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \widehat{S}_n^m}{m^k}$$

と def してみます。(\*) と何となく似てます。

$B_n^{(k)}$  は  $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)} \quad \forall n, k \geq 0$  をみたましました。数値実験の末

$$\zeta_n^{(k)} = \zeta_k^{(n)} ? \quad \text{と}$$

$$\zeta_2^{(k)} \text{ を } \zeta(\ell)\text{'s で書き表す式,}$$

を予想しました。

ところが、すぐわかったことは

$$\zeta_n^{(k)} = \zeta(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1}, k+1)$$

(Zagier's multiple zeta value, cf. ECM volume, Birkhäuser) で、上の予想も Zagier さんの loc. cit. の論文にある式で O.K. となり、何だ、ということですが、

“ $B_n^{(k)}$  は良い数である” ことの状況証拠のひとつになればと思います。

— (略) —

すると約2ヶ月後、荒川さんから、“Multiple zeta values, poly-logarithmic functions and poly-Bernoulli numbers” と題した7ページの英文ノートとともに、返事が送られてきた。

金子昌信様

7月28日付お手紙ありがとうございました。お手紙の内容に示唆されて Zagier の Multiple zeta values について考えてみました。

MZV にならって zeta 関数を

$$\zeta(k_1, \dots, k_r; s) = \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r < n_{r+1}} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r} n_{r+1}^s}$$

として定義する ( $\text{Re}(s) > 1$  で絶対収束)。それを  $s$  の関数として解析接続することを考えてみました。poly-Bernoulli #’s が負整数点での特殊値として現れるような、zeta 関数を作りたいというのが願望です。これに関して、ノートを作りましたので同封します。批判的にお読み頂ければ幸いです。p. 4 にあるように、これらの Multiple zeta 関数を使って

$$\zeta_{r+1}(s) = \zeta(\overbrace{2, 1, \dots, 1}^r; s) + \zeta(\overbrace{1, 2, 1, \dots, 1}^r; s) + \dots + \text{等々}$$

と定義すると、 $\zeta_{r+1}(s)$  は Dirichlet 級数にはなりませんが、この負整数点での値が poly-Bernoulli # と密接に結びつきます。

お手紙大変おもしろかったです。Multiple zeta value を考えるというのは大変役にたちました、少し、このあたり一緒に考えてみませんか？今後とも情報をお願いします。

9月19日

荒川恒男

この手紙にある  $\zeta_{r+1}(s)$  (の  $(-1)^r$  倍) が現在  $\xi_{r+1}(s)$  と書かれる関数であって、私はこれは Arakawa zeta 関数と呼ばれるべきものであると思っている。

これ以後、荒川さんとの共同研究がはじまり、自分でも本格的に多重ゼータ値の研究をするようになった。そうして自然と Zagier さんとも多重ゼータ値について議論をするようになる。その後の話はまた膨大なことになるし、いつか機会があればということにして、本論に戻るとする(個人的なことで紙幅を費やし済みません。)

定義 1.1. インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  にたいし、量  $|\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_r$  および  $\text{dep}(\mathbf{k}) := r$  をそれぞれ重さ (weight), 深さ (depth) という。  $k_r > 1$  であるようなインデックスを許容的 (admissible) もしくは収束インデックスという。収束しないインデックスについても何か意味のある量を取り出そう、というのが「正規化」の話である。

重さとか深さはインデックスに対してははっきり定まる量であるが、ときに  $\zeta(k_1, \dots, k_r)$  の重さが  $k_1 + \dots + k_r$  であるとか、深さが  $r$  であるとか言うこともある。しかしそこには曖昧さが潜んでいることは認識しておく必要がある。実際、例えばあとで出て来る  $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  という等式があるので、この数の深さは何ですかということになるし、重さについても、異なる重さの多重

ゼータ値は独立だと考えられているが証明はされていないので,  $17\zeta(3, 2) = 12\zeta(7)$  のような等式が成り立たないとは限らず, そうすると「値」の重さが well-defined かも現状では分からない.

重さ 5 までの多重ゼータ値を書き出してみると

	wt=2	wt=3	wt=4	wt=5
dep=1	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$	$\zeta(4)$	$\zeta(5)$
dep=2		$\zeta(1, 2)$	$\zeta(1, 3), \zeta(2, 2)$	$\zeta(1, 4), \zeta(2, 3), \zeta(3, 2)$
dep=3			$\zeta(1, 1, 2)$	$\zeta(1, 1, 3), \zeta(1, 2, 2), \zeta(2, 1, 2)$
dep=4				$\zeta(1, 1, 1, 2)$

この表を見るとすぐ見当がつくことと思うが, 重さが  $k$  で深さが  $r$  の多重ゼータ値 (インデックス) の個数は二項係数  $\binom{k-2}{r-1}$  に等しい. そして重さ  $k$  のインデックスの総数は  $2^{k-2}$  である.

## 2 多重ゼータ値の代数

多重ゼータ値で張られる  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間というものが一つの考察の対象である.

定義 2.1. 重さが  $k$  の多重ゼータ値で張られる  $\mathbb{R}$  の部分  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間を  $\mathcal{Z}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) と書く. 重さ 0 のインデックスとして空インデックスを考え,  $\zeta(\emptyset) = 1$  としておくとなんか都合がよい. この約束の下,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathbb{Q}, \quad \mathcal{Z}_1 = \{0\}, \\ \mathcal{Z}_k &= \sum_{\substack{1 \leq r \leq k-1 \\ k_1, \dots, k_{r-1} \geq 1, k_r \geq 2 \\ k_1 + \dots + k_r = k}} \mathbb{Q} \cdot \zeta(k_1, \dots, k_r) \quad (k \geq 2), \end{aligned}$$

さらに

$$\mathcal{Z} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_k$$

と定義する.

重さが 2 の元は  $\zeta(2)$  しかないから,  $\mathcal{Z}_2 = \mathbb{Q} \cdot \zeta(2)$  (一次元) である. 重さ 3 には  $\zeta(3)$  と  $\zeta(1, 2)$  の二つがあるが, さきにも書いた Euler による有名な関係  $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  があるので,  $\mathcal{Z}_3 = \mathbb{Q} \cdot \zeta(1, 2) + \mathbb{Q} \cdot \zeta(3) = \mathbb{Q} \cdot \zeta(3)$  (一次元) である. あとで  $\mathcal{Z}_4$  もまた  $\zeta(4)$  で張られる一次元空間であることを示す. 現状では, 5 以上の  $k$  で  $\mathcal{Z}_k$  の次元が真に 1 より大きいことが示しているものは一つもない. これは例えば  $\zeta(5)$  と  $\zeta(2, 3)$  が  $\mathbb{Q}$  上独立であるというようなことを示す必要があって, その手の結果が全くないことによる. そのような現状ではあるが,  $\mathcal{Z}_k$  の次元については Zagier による, 今では非常によく知られたはっきりとした予想がある.

数列  $d_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を次の漸化式で定める.

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3). \quad (2.1)$$

Fibonacci 数列に似ているが, 二つ前と三つ前の和をとっている. 予想は次の通り.

予想 2.2 (Zagier [19]).  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$  であろう.

この予想についての決定的な結果が Goncharov や寺杣さんによって知られている。

定理 2.3 (Goncharov [9], Terasoma [16], Deligne-Goncharov [7]). 不等式  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$  が成り立つ。

上に述べたように、逆向きの不等式について分かっていることは  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \geq 1$  という自明なものに過ぎない。

ここで数列  $d_k$  と、各重さの収束インデックスの総数 ( $= 2^{k-2}$ ) を表にしてみる。

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$d_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28
$2^{k-2}$	—	—	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

これを見ると、 $d_k$  の大きさが  $2^{k-2}$  に比してずっと小さいことが分かる（実際の大きさも漸化式から分かる。）ということは、次元を  $d_k$  以下に落とすだけの沢山の関係式があるということになる。実際に様々な背景を持つ関係式族が（非常に！）多く知られており、また今なお見つけ続けていて、それらの間の包含関係に関する結果や、どれを使えば全部の関係式が出てきそうか、という予想もいくつかある。これらの一部はこのサマースクール報告集の中で述べられるであろう。

本稿では、定義から自然に出てくると言ってもよい「複シャッフル関係式」というものと、それを「正規化」という作業によって、非収束インデックスにまで拡張して得られる関係式について紹介する。

まず、ベクトル空間  $\mathcal{Z}$  が  $\mathbb{Q}$  代数の構造を持つことを示す。

命題 2.4.  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間  $\mathcal{Z}$  は通常の実数の積で閉じており  $\mathbb{Q}$  代数となる。またその積は重さについて  $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$  を満たす。

*Proof.* この命題は少なくとも二通りの証明がある。一つは定義級数 (1.1) を用いるもので、その積（を和として書き表す仕方）は調和積とか *stuffle* 積（訳語は見たことがない）と呼ばれる。もう一つは、後で説明する積分表示を用いる。ここでは前者による証明を行う。

自然数  $N$  を固定し、和を  $N - 1$  までの範囲で打ち切った有限和  $\zeta_N(k_1, \dots, k_r)$  を考える：

$$\zeta_N(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r < N} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}.$$

有限和であるから  $k_i$  は正である必要はないが、ここでは引き続き自然数のみを考える。ただし  $k_r = 1$  の場合も許す。この場合も区別なく考慮できることが後々大事になる。 $k_r > 1$  であるとき、この有限和は  $N \rightarrow \infty$  とすると多重ゼータ値  $\zeta(k_1, \dots, k_r)$  に収束する。

二つのインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$  に対し、深さの和  $r + s$  に関する帰納法で

積  $\zeta_N(\mathbf{k})\zeta_N(\mathbf{l})$  は、適当なインデックス  $\mathbf{m}$  たちによる  $\zeta_N(\mathbf{m})$  の一次結合である

ことを証明する。証明から分かるように、 $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{l}$  が収束インデックスならば  $\mathbf{m}$  たちも収束インデックスに取れて、 $N \rightarrow \infty$  の極限をとれば、命題の主張の前半がいえる。そしてやはり証明を見れば重さについての言明も証明されていることになることが分かる。

まず  $r + s = 2$  のとき , つまり  $r = s = 1$  のときは ,

$$\begin{aligned}\zeta_N(k)\zeta_N(l) &= \sum_{0 < m < N} \frac{1}{m^k} \sum_{0 < n < N} \frac{1}{n^l} = \sum_{0 < m, n < N} \frac{1}{m^k n^l} \\ &= \left( \sum_{0 < m < n < N} + \sum_{0 < n < m < N} + \sum_{0 < m = n < N} \right) \frac{1}{m^k n^l} \\ &= \zeta_N(k, l) + \zeta_N(l, k) + \zeta_N(k + l)\end{aligned}$$

と計算されて , 確かに正しい . 右辺の重さが皆  $k + l$  になっていることに注意しよう . 次に  $r + s > 2$  と仮定し , 深さの和が  $r + s$  より小さい場合は主張が正しいとする . このとき , 同じ考え方 , つまり最後の  $m_r$  と  $n_s$  の大小関係で和を三つに分けて ,

$$\begin{aligned}\zeta_N(\mathbf{k})\zeta_N(\mathbf{l}) &= \sum_{\substack{0 < m_1 < \dots < m_r < N \\ 0 < n_1 < \dots < n_s < N}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r} n_1^{l_1} \dots n_s^{l_s}} \\ &= \left( \sum_{\substack{0 < n_s < m_r < N \\ 0 < m_1 < \dots < m_r \\ 0 < n_1 < \dots < n_s}} + \sum_{\substack{0 < m_r < n_s < N \\ 0 < m_1 < \dots < m_r \\ 0 < n_1 < \dots < n_s}} + \sum_{\substack{0 < m_r = n_s < N \\ 0 < m_1 < \dots < m_r \\ 0 < n_1 < \dots < n_s}} \right) \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r} n_1^{l_1} \dots n_s^{l_s}} \\ &= \sum_{0 < m_r < N} \zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-) \zeta_{m_r}(\mathbf{l}) \frac{1}{m_r^{k_r}} + \sum_{0 < n_s < N} \zeta_{n_s}(\mathbf{k}) \zeta_{n_s}(\mathbf{l}_-) \frac{1}{n_s^{l_s}} + \sum_{0 < m_r < N} \zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-) \zeta_{m_r}(\mathbf{l}_-) \frac{1}{m_r^{k_r + l_s}}\end{aligned}$$

と計算する . ここに  $\mathbf{k}_- = (k_1, \dots, k_{r-1})$ ,  $\mathbf{l}_- = (l_1, \dots, l_{s-1})$  で ,  $\zeta_{\bullet}(\emptyset) = 1$  と約束している ( $\bullet$  は何か自然数) . 帰納法の仮定から積  $\zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-) \zeta_{m_r}(\mathbf{l})$  は  $\zeta_{m_r}(\mathbf{m})$  たちの和であり ,

$$\sum_{0 < m_r < N} \zeta_{m_r}(\mathbf{m}) \frac{1}{m_r^{k_r}} = \zeta_N(\mathbf{m}, k_r)$$

である . 他の二項も同様 . これで主張が証明が出来た . □

この積を純代数的に考えるため , 次のような枠組みを用意する .  $\mathcal{R} := \bigoplus_{r \geq 0} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^r]$  をインデックス (自然数の組) の  $\mathbb{Q}$  係数形式和のなすベクトル空間とする . すなわちインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  ごとに記号  $[\mathbf{k}] = [k_1, \dots, k_r]$  を用意し , その有理数係数の有限和全体を考える .  $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^0] = \mathbb{Q}[\emptyset]$  とする . そして  $\mathcal{R}^0$  で収束インデックス (すなわち  $k_r \geq 2$  であるようなもの) が張る部分空間を表す .  $\emptyset$  も収束インデックスの仲間に入れる . この  $\mathcal{R}$  上に , 次の帰納的規則で積  $*$  を入れる (調和積 , stuffle product) .

- 積は  $\mathbb{Q}$  双線形 ,
- 任意の  $\mathbf{k}$  に対し  $[\emptyset] * [\mathbf{k}] = [\mathbf{k}] * [\emptyset] = [\mathbf{k}]$ ,
- $[\mathbf{k}] * [\mathbf{l}] = [[\mathbf{k}_-] * [\mathbf{l}], k_r] + [[\mathbf{k}] * [\mathbf{l}_-], l_s] + [[\mathbf{k}_-] * [\mathbf{l}_-], k_r + l_s]$  , ここに  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$  に対し  $\mathbf{k}_- = (k_1, \dots, k_{r-1})$  および  $\mathbf{l}_- = (l_1, \dots, l_{s-1})$ .

これは上の証明中の  $\zeta_N(\mathbf{k})$  の積の構造を公理化したもので , Hoffman [11] はこの積が結合的かつ可換 (可換性は自明) であることを証明した .  $\mathcal{R}$  を積  $*$  による  $\mathbb{Q}$  代数と見ていることを明示するときは  $\mathcal{R}_*$  と書く . このとき  $\mathcal{R}^0$  は部分  $\mathbb{Q}$  代数となり , それを  $\mathcal{R}_*^0$  と書く .

対応  $[k] \mapsto \zeta(k)$  を  $\mathbb{Q}$  線形に拡張することで,  $\mathbb{Q}$  線形写像  $\zeta: \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  が得られる (同じ文字  $\zeta$  を使う). 命題 2.4 で示したことは, これが  $\mathcal{R}_*^0$  から  $\mathbb{R}$  への準同型であること, つまり

$$\zeta([k] * [1]) = \zeta(k)\zeta(1) \quad (2.2)$$

が全ての収束インデックス  $k, 1$  について成り立つことに他ならない. 簡単のため右辺の  $\zeta([k] * [1])$  をしばしば  $\zeta(k * 1)$  と書く.

### 3 積分表示

まず  $\log$  のテイラー展開

$$-\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

から出発する. これは  $|x| < 1$  で収束しているが,  $x \rightarrow 1$  とすると発散する. 見かけは ' $\zeta(1)$ ' である. 左辺は

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

と書けることに注意しておく. これを  $x$  で割ってからもう一度 0 から  $x$  まで積分すると,

$$\int_0^x (-\log(1-t)) \frac{dt}{t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^2}$$

となり, 今度は  $x \rightarrow 1$  としても収束し,  $\zeta(2)$  を与える. 左辺の積分は

$$\int_0^x \left( \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} = \iint_{0 < t_1 < t_2 < x} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2}$$

と書ける. 同様のこと ('反復積分') を繰り返すと,

$$\int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < x} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_k}{t_k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^k}$$

となり,  $x \rightarrow 1$  として  $\zeta(k)$  が得られることは容易に理解できるであろう. ここで, これを  $1-x$  で割って積分してみる. まず  $|x| < 1$  の範囲で,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^k} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^k} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x^{m+n-1}}{m^k}.$$

最後  $n$  を  $n-1$  に変えた. これを 0 から  $x$  まで項別積分すると,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x^{m+n}}{m^k(m+n)} = \sum_{0 < m < n} \frac{x^n}{m^k n}$$

となる ( $m+n$  を  $n$  と置き直した.) これは  $x \rightarrow 1$  のとき収束しないが, これをまた一度  $x$  で割って積分した

$$\sum_{0 < m < n} \frac{x^n}{m^k n^2}$$

は収束し， $\zeta(k, 2)$  を与える．この先同様に  $x$  で割って積分， $x$  で割って積分，を繰り返すことにより  $n$  の冪が増えていき，結局次の積分表示に到達する．

$$\int_{0 < t_1 < \dots < t_{k_1+k_2} < x} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_k}{t_{k_1}} \cdot \frac{dt_{k_1+1}}{1-t_{k_1+1}} \frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}} \dots \frac{dt_{k_1+k_2}}{t_{k_1+k_2}} = \sum_{0 < m_1 < m_2} \frac{x^{m_2}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}}$$

そして， $k_2 > 1$  であれば (admissible)  $x = 1$  と出来て，

$$\zeta(k_1, k_2) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_{k_1+k_2} < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_k}{t_{k_1}} \cdot \frac{dt_{k_1+1}}{1-t_{k_1+1}} \frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}} \dots \frac{dt_{k_1+k_2}}{t_{k_1+k_2}}$$

という，二重ゼータ値の積分による表示が得られる．これで一般の場合もお分かりと思うが， $1-t$  で割ることにより深さが一つ増え，そのあとの  $dt/t$  の繰り返しが最後のインデックスを 1 ずつ増やしていく．一般の場合はさぼってここには書かないことにするが，川崎さんの稿で出て来る山本さんの積分は，この多重ゼータ値の積分表示を一般化し，かつ簡明な表記を与える．証明は原則，上でやったような，多重積分を順々に積分していく逐次積分である．

この積分表示が，多重ゼータ値の空間に新たな積構造を与える．これを一番簡単な例  $\zeta(2)^2$  で見よう． $\zeta(2)$  の積分表示は

$$\zeta(2) = \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2}$$

である．この二つの積は次のように計算される．

$$\begin{aligned} \zeta(2)^2 &= \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \int_{0 < s_1 < s_2 < 1} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} \\ &= \int_{\substack{0 < t_1 < t_2 < 1 \\ 0 < s_1 < s_2 < 1}} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} \\ &= \left( \int_{0 < t_1 < t_2 < s_1 < s_2 < 1} + \int_{0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < 1} + \int_{0 < t_1 < s_1 < s_2 < t_2 < 1} + \int_{0 < s_1 < t_1 < t_2 < s_2 < 1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < 1} + \int_{0 < s_1 < s_2 < t_1 < t_2 < 1} \right) \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} \\ &= \int_{0 < t_1 < t_2 < s_1 < s_2 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} + \int_{0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{ds_2}{s_2} \\ &\quad + \int_{0 < t_1 < s_1 < s_2 < t_2 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} \frac{dt_2}{t_2} + \int_{0 < s_1 < t_1 < t_2 < s_2 < 1} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{ds_2}{s_2} \\ &\quad + \int_{0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < 1} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{ds_2}{s_2} \frac{dt_2}{t_2} + \int_{0 < s_1 < s_2 < t_1 < t_2 < 1} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\ &= \zeta(2, 2) + \zeta(1, 3) + \zeta(1, 3) + \zeta(1, 3) + \zeta(1, 3) + \zeta(2, 2) \\ &= 2\zeta(2, 2) + 4\zeta(1, 3). \end{aligned}$$

これは，要領は級数の積のときと同じで，4次元空間の中の積分領域

$$\{(t_1, t_2, s_1, s_2) \in [0, 1]^4 \mid 0 < t_1 < t_2 < 1, 0 < s_1 < s_2 < 1\}$$

を， $t_i, s_j$  の大小関係に従って六つに分割するのである．そうするとそれぞれの積分が多重ゼータ値を与える． $t_1 = s_1$  のような場合は領域の次元が落ちて，測度が 0 となり積分値には寄与しな

いことに注意．この分割は結局，四つの微分形式  $\frac{dt_1}{1-t_1}, \frac{dt_2}{t_2}, \frac{ds_1}{1-s_1}, \frac{ds_2}{s_2}$  があるなかで， $\frac{dt_1}{1-t_1}, \frac{dt_2}{t_2}$  には  $\frac{dt_1}{1-t_1}$  が左で  $\frac{dt_2}{t_2}$  が右という順序があり， $\frac{ds_1}{1-s_1}, \frac{ds_2}{s_2}$  には  $\frac{ds_1}{1-s_1}$  が左で  $\frac{ds_2}{s_2}$  が右という順序があって，それぞれの順序は保ちつつ，四つを並べる方法，それはつまり  $\binom{4}{2} = 6$  通りあるが，それぞれごとの積分の和になると言っているのと同じである．この並べ方をトランプカードのシャッフルになぞらえて， $\frac{dt_1}{1-t_1}, \frac{dt_2}{t_2}$  と  $\frac{ds_1}{1-s_1}, \frac{ds_2}{s_2}$  のシャッフルといい（これもカタカナだけで訳語は聞かないですね，切り混ぜ？），こうして得られる多重ゼータ値の積をシャッフル積 (shuffle product) という（収束インデックスに対する）多重ゼータ値の積分表示に現れる微分形式は  $\frac{dt}{1-t}$  か  $\frac{dt}{t}$  のいずれかで，一番左は  $\frac{dt}{1-t}$ ，一番右は  $\frac{dt}{t}$  となっている．このことはシャッフルをしても変わらないので，各項が収束する多重ゼータ値になるのである．

このシャッフル積を代数的に記述するのに便利なのは，Hoffman 代数とも呼ばれる，非可換多項式環  $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  である． $e_0$  が  $\frac{dt}{t}$  に， $e_1$  が  $\frac{dt}{1-t}$  に対応していると思って， $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  の語 (word, 単項式) のうち  $e_1$  で始まり  $e_0$  で終わるものと多重ゼータ値を一対一に対応づける．例えば  $\zeta(2)$  に対応するのは  $e_1 e_0$  であり，これが先の積分表示を表していると思うのである． $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  のシャッフル積  $\mathfrak{H}$  は帰納的に

- 積は  $\mathbb{Q}$  双線形，
- $1 \mathfrak{H} w = w \mathfrak{H} 1 = w, \forall w : \text{word}$ ,
- $(uw) \mathfrak{H} (u'w') = u(w \mathfrak{H} u'w') + u'(uw \mathfrak{H} w'), \forall u, u' \in \{e_0, e_1\}, \forall w, w' : \text{words}$

で定義されて， $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  の部分空間  $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + e_1 \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle e_0$  が  $\mathfrak{H}$  で閉じた部分代数となる．このとき， $e_1 e_0^{k_1-1} \cdots e_1 e_0^{k_r-1}$  に  $\zeta(k_1, \dots, k_r)$  を対応させる写像を  $\mathbb{Q}$  線形に拡張したものを  $Z$  と書くことにすると，多重ゼータ値のシャッフル積は「 $Z$  が  $\mathfrak{H}^0$  から  $\mathbb{R}$  への準同型である」ということに他ならない．

積分表示を述べたついでに言うべきこととして双対性がある．これは，収束インデックスを

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1-1}, b_1 + 1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_h-1}, b_h + 1) \quad (a_i, b_i \geq 1)$$

という形に書いて（常にこのように一通りに書ける）， $\mathbf{k}$  の双対インデックス  $\mathbf{k}^\dagger$  を

$$\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1, \dots, 1}_{b_h-1}, a_h + 1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1-1}, a_1 + 1)$$

で定義するとき，等式

$$\zeta(\mathbf{k}^\dagger) = \zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つ，というものである．証明は積分表示において変数変換  $t_i \rightarrow 1 - s_{k+1-i}$  を行えば直ちに出来る．初めての方はまず一番簡単な例である  $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  について確かめてみられるとよい．この変数変換は  $\mathfrak{H}$  の言葉では， $e_0$  と  $e_1$  を入れ替えて逆順に並べる，という操作に対応する．

インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対し  $[\mathbf{k}] \in \mathcal{R}$  と  $e_1 e_0^{k_1-1} \cdots e_1 e_0^{k_r-1} \in \mathfrak{H}$  を同一視することで， $\mathfrak{H}$  のシャッフル積を  $\mathcal{R}$  に移行してきて， $\mathcal{R}$  にシャッフル積  $\mathfrak{H}$  を入れることが出来る．この積に関して  $\mathbb{Q}$  代数とみた  $\mathcal{R}$  を  $\mathcal{R}_{\mathfrak{H}}$  と書く． $\mathcal{R}^0$  は  $\mathfrak{H}$  に関する部分代数となり，これを  $\mathcal{R}_{\mathfrak{H}}^0$  と書く． $\zeta(2)^2$  の例で言うと  $[2] \mathfrak{H} [2] = 2[2, 2] + 4[1, 3]$  が対応する  $\mathcal{R}$  での積である． $\mathbb{Q}$  線形写像  $\zeta : \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\mathcal{R}_{\mathfrak{H}}^0$  から  $\mathbb{R}$  への準同型になっているわけである：

$$\zeta([\mathbf{k}] \mathfrak{H} [\mathbf{l}]) = \zeta(\mathbf{k}) \zeta(\mathbf{l}). \quad (3.1)$$

( \* のときと同様 , 左辺をしばしば  $\zeta(k \text{ m } l)$  と書く . )

二つの積 (2.2) および (3.1) を等号で結んで得られる線形関係式を (有限) 複シャッフル関係式と呼ぶ .

定理 3.1 (有限複シャッフル関係式). 任意の収束インデックス  $k$  および  $l$  に対し ,

$$\zeta(k * l) = \zeta(k \text{ m } l)$$

が成り立つ .

これは常に非自明な線形関係式を与える . というのも ,  $k \text{ m } l$  に現れるインデックスの深さは  $k$  の深さと  $l$  のその和であるのに対し ,  $k * l$  には必ず深さがそれよりも落ちた項が現れるからである . 例えば  $k = l = (2)$  と取ると ,  $\zeta([2] * [2]) = 2\zeta(2, 2) + \zeta(4)$  および  $\zeta([2] \text{ m } [2]) = 2\zeta(2, 2) + 4\zeta(1, 3)$  であり , これから

$$4\zeta(1, 3) = \zeta(4) \tag{3.2}$$

を得る . 二つの積から生じる関係式であるから , これが重さ最小で , 重さ 5 では  $\zeta(2)\zeta(3)$  と  $\zeta(2)\zeta(1, 2)$  から生じる二つの関係式が独立な線形関係式を与える .

重さ 3 の関係式  $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  はこのやり方では出てこない . しかし仮に  $\zeta(1)$  が収束していると思って , まず調和積を計算すると ,

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(1, 2) + \zeta(2, 1) + \zeta(3)$$

となる . 右辺の  $\zeta(2, 1)$  は発散している . 一方シャッフル積は ,  $\zeta(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t}$  と思って計算すると ,

$$\zeta(1)\zeta(2) = 2\zeta(1, 2) + \zeta(2, 1)$$

となる . この右辺同士が等しいと考えると , 発散項  $\zeta(2, 1)$  が丁度キャンセルして , 有限量の間の等式

$$\zeta(1, 2) + \zeta(3) = 2\zeta(1, 2),$$

すなわち Euler の  $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  が得られる . このように , 発散するものまで考慮に入れて , そこから有限の量を取り出す操作を正当化するのが正規化と呼ばれるプロセスである .

## 4 正規化

この節で正規化の考え方と , 基本的な定理を述べる . 重要な役割を果たすのが  $\zeta(1)$  であり , またガンマ関数である .

我々はインデックスの空間  $\mathcal{R}$  に , 多重ゼータ値の級数表示を用いた積構造 , 積分表示を用いた積構造の二通りの代数構造を入れ , それぞれの積構造を持った  $\mathbb{Q}$  代数を  $\mathcal{R}_*$  および  $\mathcal{R}_{\text{m}}$  と表した . 基本的な事実は , これらがともに , 収束インデックスの部分代数上 ,  $\zeta(1)$  , つまり  $[1]$  で生成される多項式代数となっているということである :

$$\mathcal{R}_* \simeq \mathcal{R}_*^0[[1]] \quad \text{および} \quad \mathcal{R}_{\text{m}} \simeq \mathcal{R}_{\text{m}}^0[[1]].$$

このことは  $\mathfrak{m}$  については ( $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  の言葉に翻訳すると) 古典的な事実で,  $*$  については Hoffman が証明した. ここでは証明は与えないで, 認めるとする (右端に並ぶ 1 の個数に関する帰納法で, 左程難なく証明出来る. [15], [11] 参照) 例としては

$$\begin{aligned} [3, 1] &= [3] * [1] - [1, 3] - [4] \\ &= [3]\mathfrak{m}[1] - 2[1, 3] - [2, 2], \\ [2, 1, 1] &= \frac{1}{2}[2] * [1]^{*2} - ([1, 2] + [3]) * [1] + [1, 1, 2] + [1, 3] + \frac{1}{2}[4] \\ &= \frac{1}{2}[2]\mathfrak{m}[1]^{\mathfrak{m}2} - 2[1, 2]\mathfrak{m}[1] + 3[1, 1, 2] \end{aligned}$$

など. ここで  $[1]^{*2} = [1] * [1]$ ,  $[1]^{\mathfrak{m}2} = [1]\mathfrak{m}[1]$  であり, 以後  $[1]^{\bullet n}$  ( $\bullet = * \text{ または } \mathfrak{m}$ ) は  $\underbrace{[1] \bullet \cdots \bullet [1]}_{n \text{ 個}}$  を表すものとする.

定義 4.1. 任意のインデックス  $\mathbf{k}$  を

$$[\mathbf{k}] = \sum_{i=0}^m a_i * [1]^{*i} \in \mathcal{R}_*^0[[1]] \quad (a_i \in \mathcal{R}^0)$$

および

$$[\mathbf{k}] = \sum_{j=0}^n b_j \mathfrak{m}[1]^{\mathfrak{m}j} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{m}}^0[[1]] \quad (b_j \in \mathcal{R}^0)$$

のように (それぞれ一意的に) 書く. このとき,  $*$ - および  $\mathfrak{m}$ -正規化多項式  $\zeta_*(\mathbf{k}; T)$  および  $\zeta_{\mathfrak{m}}(\mathbf{k}; T) \in \mathbb{R}[T]$  ( $T$  は不定元) をそれぞれ

$$\zeta_*(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m \zeta(a_i) T^i \quad \text{および} \quad \zeta_{\mathfrak{m}}(\mathbf{k}; T) = \sum_{j=0}^n \zeta(b_j) T^j$$

で定義する.

$\mathbf{k}$  が収束インデックスであれば,  $m = n = 0$ ,  $a_0 = b_0 = [\mathbf{k}]$  から  $\zeta_*(\mathbf{k}; T) = \zeta_{\mathfrak{m}}(\mathbf{k}; T) = \zeta(\mathbf{k})$  である. すなわち写像

$$\mathbf{k} \mapsto \zeta_*(\mathbf{k}; T) \quad (\text{resp. } \mathbf{k} \mapsto \zeta_{\mathfrak{m}}(\mathbf{k}; T))$$

は,  $\mathbb{Q}$  代数準同型

$$\zeta : \mathcal{R}_*^0 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \zeta : \mathcal{R}_{\mathfrak{m}}^0 \rightarrow \mathbb{R})$$

を,  $\zeta_*([1]; T) = T$  (resp.  $\zeta_{\mathfrak{m}}([1]; T) = T$ ) によって

$$\mathcal{R}_* \rightarrow \mathbb{R}[T] \quad (\text{resp. } \mathcal{R}_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathbb{R}[T])$$

にまで一意的に拡張したものである.

定義より, それぞれの多項式の係数は多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  係数一次結合で書けていて,  $\mathbf{k}$  の重さを  $k$  とすると,  $T^i$  の係数は重さ  $k - i$  の多重ゼータ値の一次結合である.

例 4.2. 上記の例より,

$$\zeta_*(3, 1; T) = \zeta(3)T - \zeta(1, 3) - \zeta(4), \quad \zeta_m(3, 1; T) = \zeta(3)T - 2\zeta(1, 3) - \zeta(2, 2),$$

そして

$$\begin{aligned} \zeta_*(2, 1, 1; T) &= \frac{1}{2}\zeta(2)T^2 - (\zeta(1, 2) + \zeta(3))T + \zeta(1, 1, 2) + \zeta(1, 3) + \frac{1}{2}\zeta(4), \\ \zeta_m(2, 1, 1; T) &= \frac{1}{2}\zeta(2)T^2 - 2\zeta(1, 2)T + 3\zeta(1, 1, 2) \end{aligned}$$

となっている.

ちなみにこれら正規化多項式の次数は,  $\zeta_*$ ,  $\zeta_m$  いずれも, インデックス  $\mathbf{k}$  を

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}', \underbrace{1, \dots, 1}_m), \quad \mathbf{k}' \text{ は収束インデックス } (\emptyset \text{ も含む}), \quad m \geq 0,$$

の形に書いたとき,  $m$  次となり, その最高次係数はともに  $\zeta(\mathbf{k}')/m!$  で与えられることが, 証明を追えば直ちに分かる.

この定義は完全に代数的であるが, それぞれの多項式には次のような解析的な意味がある. まず  $\zeta_*(\mathbf{k}; T)$  であるが, 命題 2.4 の証明で用いた有限和  $\zeta_N(k_1, \dots, k_r)$  は,  $k_r = 1$  ならば  $N \rightarrow \infty$  のとき発散する. その発散の度合いが,  $\zeta_N(1)$  つまり調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-1}$$

の多項式程度の発散で ( $\log N$  の多項式オーダーと言ってもよい), その多項式が  $\zeta_*(\mathbf{k}; \zeta_N(1))$  だということである. このことは,  $\zeta_N(k_1, \dots, k_r)$  が調和積を満たしたことを思い出ししてみれば納得できるであろう. つまり定義 4.1 にある多項式と全く同じ形で  $\zeta_N(k_1, \dots, k_r)$  を, 収束する  $\zeta_N(m)$  たちの和を係数とする  $\zeta_N(1)$  の多項式で書き表すことが出来ることから従うのである.

一方の  $\zeta_m(\mathbf{k}; T)$  は,  $k_r > 1$  のときの  $\zeta(\mathbf{k})$  の反復積分表示において積分の上端 (右端) を  $x$  ( $0 < x < 1$ ) で止めたものを考えると, これは  $k_r = 1$  ならば  $x \rightarrow 1$  のとき発散する. この発散の度合いが  $\int_0^x \frac{dt}{1-t}$  ( $\leftrightarrow \zeta(1)$ ) の多項式オーダーの発散で, その多項式が  $\zeta_m(\mathbf{k}; T)$  ( $T = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$ ) で与えられる. これも, 反復積分の上端を  $x$  にしたものが同じシャッフル積を満たすことから従う.

さてこの二つの「正規化多項式」 $\zeta_*(\mathbf{k}; T)$  と  $\zeta_m(\mathbf{k}; T)$  がガンマ関数のテイラー展開式を用いて見事に結びついている, というのが正規化の基本定理である. それを述べるために, 多項式環  $\mathbb{R}[T]$  からそれ自身への  $\mathbb{R}$  線形写像 (代数準同型ではない)  $\rho$  を, 形式的べき級数環  $\mathbb{R}[T][[u]]$  における母関数表記を用いて

$$\rho(e^{Tu}) = A(u)e^{Tu}$$

で定義する. ここに

$$A(u) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)u^n\right) = 1 + \zeta(2)\frac{u^2}{2} - 2\zeta(3)\frac{u^3}{3!} + (6\zeta(4) + 3\zeta(2)^2)\frac{u^4}{4!} + \dots \in \mathbb{R}[[u]]$$

であり, 左辺の  $\rho$  は各係数ごとに作用しているとする. つまり, 右辺が

$$1 + a_1(T)u + a_2(T)\frac{u^2}{2!} + a_3(T)\frac{u^3}{3!} + a_4(T)\frac{u^4}{4!} + \dots$$

であるとしたとき,  $\rho(T^n) = a_n(T)$  によって  $\mathbb{R}$  線形写像  $\rho$  を定める. べき級数  $A(u)$  の正体は, ガンマ関数の展開,  $A(u) = e^{\gamma u} \Gamma(1+u)$  ( $\gamma$  はオイラー定数) である.

例 4.3. 実際に積を展開してやると

$$\begin{aligned}\rho(1) &= 1, \\ \rho(T) &= T, \\ \rho(T^2) &= T^2 + \zeta(2), \\ \rho(T^3) &= T^3 + 3\zeta(2)T - 2\zeta(3), \\ \rho(T^4) &= T^4 + 6\zeta(2)T^2 - 8\zeta(3)T + 6\zeta(4) + 3\zeta(2)^2.\end{aligned}$$

必ず  $\rho(T^n) = T^n +$  低次の項 となって,  $\rho$  は可逆である.

さて, 二つの正規化多項式はこの  $\rho$  により移りあう. この定理—ここでは「正規化基本定理」と呼ぶことにする—は, 私の知る限り, Zagier, Butet de Monvel, Écale が独立に得た. Zagier さんは少なくとも 90 年代の初頭には知っていたようなことを言っておられた記憶があるが, 私が初めて聞いたのは 99 年の秋, 九大 (箱崎) で多重ゼータのミニ集会をした折であった. そのときに, 当時まだ一般の場合は予想だった「導分関係式」について話したところいたく興味を寄せられ, 一緒にやろうと言うことになり, 次の年の 2 月の終わりから 3 月にかけて私がドイツを訪問した前後の頃までに [13] の内容はおおかた出来てしまった (しかし例によって (?)) 論文は遅れて, [13] が出たのは 2006 年である.)

定理 4.4 ([5, 6], [8], [13, Theorem 1]). 任意のインデックス  $\mathbf{k}$  に対し

$$\zeta_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}; T) = \rho(\zeta_*(\mathbf{k}; T)) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

例えば, 先の例から,  $\rho(\zeta_*(2, 1, 1; T)) = \zeta_{\mathbf{m}}(2, 1, 1; T)$  より

$$\frac{1}{2}\zeta(2)(T^2 + \zeta(2)) - (\zeta(1, 2) + \zeta(3))T + \zeta(1, 1, 2) + \zeta(1, 3) + \frac{1}{2}\zeta(4) = \frac{1}{2}\zeta(2)T^2 - 2\zeta(1, 2)T + 3\zeta(1, 1, 2).$$

両辺の一次の係数を比べて  $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  が, 定数項を比べて

$$\frac{1}{2}\zeta(2)^2 + \zeta(1, 1, 2) + \zeta(1, 3) + \frac{1}{2}\zeta(4) = 3\zeta(1, 1, 2)$$

が得られる. この重さ 4 の関係式には  $\zeta(2)^2$  という項があるが, これを調和積で和に直すと

$$\zeta(2, 2) + \zeta(1, 3) + \zeta(4) = 2\zeta(1, 1, 2)$$

という線形関係式が, またシャッフル積で和に直すと

$$\zeta(2, 2) + 3\zeta(1, 3) + \frac{1}{2}\zeta(4) = 2\zeta(1, 1, 2)$$

という関係式が得られる.

定理の [5, 6] や [13] における証明は, 少し触れた正規化多項式の解析的意味をもとにして, 反復積分の上端が  $x$  のもの (「多重ポリログ」) のテイラー展開係数に有限打ち切りの  $\zeta_N(k_1, \dots, k_r)$  が現れていることから, 二つの発散を比べることで得るというものである. 次節で, 川崎さんの稿に出て来る, “integral-series identity” というものを使って証明する方法を紹介する. 実はこの “integral-series identity” はある意味で正規化基本定理と等価であって, その等式および等価性は「ほとんど」代数的に証明出来る.

## 5 正規化基本定理と “integral-series identity”

### 5.1 山本積分によるシャッフル正規化の計算法

シャッフル正規化多項式  $\zeta_m(\mathbf{k}; T)$  の一つの具体的な表示が [13, (5.2) 式および Cor. 5] で与えられている．それと同等の表示を，川崎さんの稿で紹介されている，山本修司氏が導入した積分（以下「山本積分」と呼ぶことにする）を使って与えてみよう．この考察が山本さんとの論文 [14] の出発点となった．

記号の詳しい説明は川崎さんの稿や山本さんの論文 [18] を見てもらうとして，ここではさらに，積分の上端が 1 ではなく， $0 < x < 1$  なる  $x$  であるものを導入し，それをたとえば  $I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \right)$  のように書く．ここで  $\bullet$  は  $\frac{dt}{1-t}$  に， $\circ$  は  $\frac{dt}{t}$  に対応しており，この場合は  $x \rightarrow 1$  のとき通常の上山積分  $I \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \right)$  すなわち  $\zeta(1, 2)$  に収束する．積分の下端は 0 なので， $I_x$  の中身に来るグラフの極小点は必ず  $\bullet$  でなければならないが，極大点が  $\circ$  である必要はない．極大点に  $\bullet$  が来ているようなグラフに対する  $I_x$  は  $x \rightarrow 1$  のとき発散する．この発散の様子を記述するのがシャッフル正規化である．山本積分がグラフの連結や切断，大小順序の変更などに関して満たす基本的な性質は  $I_x$  でも同じように成り立っていることに注意する．

さて，与えられたインデックス  $(k_1, \dots, k_r)$  を， $(k_1, \dots, k_r) = (\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m)$  と表す．ここで  $\mathbf{k} = (l_1, \dots, l_s)$  に対し  $\mathbf{k}_+ = (l_1, \dots, l_{s-1}, l_s + 1)$  とする．つまり，もとの  $(k_1, \dots, k_r)$  において，右から 1 が並ぶ個数を  $m \geq 0$  とし，残りの部分を  $\mathbf{k}_+$  とする． $\mathbf{k}_+$  は収束インデックスである． $\mathbf{k}_+$  に対応するグラフを  $\begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right)$  で表すことにする．これは， $\mathbf{k}_+$  が収束インデックスなので，極小点  $\bullet$  から極大点  $\circ$  に至る一直線のグラフである．すると， $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(x)$  の積分表示は，

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(x) = I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)$$

と書くことが出来る．これの  $x \rightarrow 1$  のときの発散挙動を  $\text{Li}_1(x) = I_x(\bullet)$  で計ったものがシャッフル正規化多項式  $\zeta_m(k_1, \dots, k_r; T)$  である．山本積分の性質を使って変形

$$\begin{aligned} I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) &= I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \right) I_x \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) - I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) \\ &= I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \right) I_x \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) - I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) I_x \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) + I_x \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \left( \mathbf{k}_+ \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$



## 5.2 正規化基本定理の導出

正規化基本定理と “integral-series identity” の等価性の基礎となるのが、 $\mathcal{R}_*$  における次の等式である。

定理 5.1. 任意のインデックス  $\mathbf{k}$ ，および  $m \geq 0$  に対し， $\mathcal{R}_*$  における等式

$$[\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m] = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} (\mathbf{k} \circledast \underbrace{[1, \dots, 1]^*}_{m+1-i}) * \underbrace{[1, \dots, 1]}_i \quad (5.4)$$

が成り立つ。

これは，調和積代数  $\mathcal{R}_*$  において任意の元を ( $\mathcal{R}_*$  上の) 基底として  $[1]^*{}^i$  ではなく  $\underbrace{[1, \dots, 1]}_i$  を取ったときの係数を具体的に与えるものである。その係数がシャッフル正規化 (5.2) を与える (5.3) の右辺 (に対応するインデックス) になっている点がポイントで，それによって次に述べるようにこの定理から正規化の基本定理が導かれる。この定理ははじめ帰納法を使って結構面倒な計算をしていたのであるが，山本さんにより [14, Lemma 5.2] ( $A_*$ ) の形に一般化され，簡明で見通しの良い証明が与えられた。私は  $(1, 1, \dots, 1)$  だけを考えていたので分からなかったが，(5.4) における 1 の並びは，一部は逆順にしたものと見るのが正しいのであった！(山本さんには何度も感心させられているがこれもその 1 つである。)

この等式を使って正規化基本定理を導こう。まず， $\mathcal{R}_*[[u]]$  の中で純代数的に得られる式

$$\exp_* \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [n] u^n \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[1, \dots, 1]}_n u^n \quad (5.5)$$

に注意する。これは [3, §1.5.2] で証明しているが，両辺の対数微分は調和積のほぼ自明な式になる。また，[11] に説明されているように，各種の対称式の間関係式と見なすことも出来る。いずれにせよ全く代数的な式であることを強調しておく。この式の両辺の係数に， $*$ -準同型である写像

$$\zeta_* : \mathcal{R}_* \ni \mathbf{k} \mapsto \zeta_*(\mathbf{k}; T) \in \mathbb{R}[T]$$

を施すことを考えると，定義から直ちに，

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_i; T) u^i = A(u)^{-1} e^{Tu} \quad (5.6)$$

( $A(u) = \Gamma(1+u)e^{\gamma u} = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) u^n\right)$  であった) が分かる。

さて，任意のインデックス  $(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m)$  を取ったときに  $\zeta_*(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T)$  は，(5.4) より，

$$\zeta_*(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \zeta(\mathbf{k} \circledast \underbrace{(1, \dots, 1)^*}_{m+1-i}) \zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_i; T) \quad (5.7)$$

で与えられる。式 (5.6) に基本定理の写像  $\rho$  を施すと，

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho(\zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_i; T)) u^i = A(u)^{-1} \rho(e^{Tu}) = A(u)^{-1} A(u) e^{Tu} = e^{Tu},$$

つまり  $\rho(\zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_i; T)) = T^i/i!$  である．従って (5.7) に  $\rho$  を施して，

$$\rho(\zeta_*(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T)) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \zeta(\mathbf{k} \circledast (\underbrace{1, \dots, 1}_{m+1-i})^*) \frac{T^i}{i!} \quad (5.8)$$

を得る．この式と，(5.2), (5.3) から，正規化の基本定理

$$\rho(\zeta_*(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T)) = \zeta_{\text{in}}(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T)$$

が導かれる．

また逆にこの基本定理を仮定すれば，(5.8) と (5.2) を比べることで (5.3) が得られることになる．(5.3) は “integral-series identity” の特別な場合であるが，一般の場合も同じようなからくりで出来て，さらには「スター版」の正規化の基本定理との等価性も証明できる．詳しくは [14] をご覧頂きたい．

この正規化の基本定理の証明方法は，ほぼ代数的であると言ってよく，なかなか興味深いものと思うのであるがいかがであろうか．

### 5.3 正規化複シャッフル関係式

関係式 (4.1) の係数を比べて得られる式と，二通りの積

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}) \quad (5.9)$$

を合わせれば，多重ゼータ値のすべての  $\mathbb{Q}$  上の関係式が得られるのではないかとされている．多重ゼータ値の積は (5.9) のいずれかにより和に書き換えられるので，すべての線形関係式が記述できればよいが，その候補の一つが，[13] にある

$$\zeta_*(\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}; 0) = 0 \quad (\forall \mathbf{k} \in \mathcal{R}^0 \text{ and } \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R})$$

または

$$\zeta_{\text{in}}(\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}; 0) = 0 \quad (\forall \mathbf{k} \in \mathcal{R}^0 \text{ and } \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R})$$

からすべての線形関係式が出るのではないかと，という予想で，これらの関係式を正規化複シャッフル関係式，または拡張複シャッフル関係式と呼んでいる．これらは (4.1) からほぼ直ちに出て来る．

例えば， $\mathbf{k} = (2)$ ， $\mathbf{l} = (1)$  と取ると，

$$\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l} = [3] - [1, 2]$$

であり，従って

$$\zeta_*(\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}; T) = \zeta_{\text{in}}(\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}; T) = \zeta(3) - \zeta(1, 2).$$

これはすなわち  $\zeta(3) = \zeta(1, 2)$  を与える．また  $\mathbf{k} = (3)$ ， $\mathbf{l} = (1)$  と取ると，

$$\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l} = [4] - [1, 3] - [2, 2]$$

であり,

$$\zeta_{\text{m}}(\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}; T) = \zeta(4) - \zeta(1, 3) - \zeta(2, 2)$$

となるから,

$$\zeta(4) = \zeta(1, 3) + \zeta(2, 2)$$

を得る. 次に  $\mathbf{k} = (2), \mathbf{l} = (1, 1)$  と取ると,

$$\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l} = [1, 3] + [3, 1] - 2[1, 1, 2] - [1, 2, 1].$$

少し計算すれば

$$\zeta_{\text{m}}(\mathbf{k} * \mathbf{l} - \mathbf{k} \text{ m } \mathbf{l}; T) = (\zeta(3) - \zeta(1, 2)) T - \zeta(1, 3) - \zeta(2, 2) + \zeta(1, 1, 2)$$

となり, 定数項から

$$\zeta(1, 3) + \zeta(2, 2) = \zeta(1, 1, 2)$$

を得る. これら二つの関係式と, すでに有限複シャッフル関係式として得ている (3.2) を合わせると重さ 4 の三つの独立な線形関係式が得られて,

$$\zeta(1, 3) = \frac{1}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2, 2) = \frac{3}{4}\zeta(4), \quad \zeta(1, 1, 2) = \zeta(4)$$

を得る. すなわち  $\mathcal{Z}_4 = \mathbb{Q} \cdot \zeta(4)$  (一次元) である.

また, [14] では, 上で述べた正規化基本定理との等価性に鑑みて, “integral-series identity” からも線形関係式がすべて従うのではないかと予想している. この “integral-series identity” の証明はただの逐次積分の計算で至って初等的であり, それが豊富な関係を生むというのは何とも愉快的な感じがして, 気に入っている.

## 6 別の正規化

荒川さんが考え始められた一変数関数 (ここでは最後のべきを  $k_r + s$  として変数を入れる)

$$\zeta(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + s) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_{r-1}^{k_{r-1}} m_r^{k_r + s}}$$

を用いても「正規化」が自然に考えられる. すなわち,  $\Re(s) > 0$  で絶対収束する右辺の級数 ( $k_i$  はすべて自然数) を [1] で行ったように全平面に有理型に解析接続したとき,  $k_r = 1$  であれば  $s = 0$  は極になるが, その極での主要部を見るのである. すると実はこの主要部が先に解説した正規化多項式  $\zeta_*(\mathbf{k}; T)$  を用いて記述される. これは [1] の最後で問題としたことで, [2, Th. 4.1] でより一般の (一変数) 多重  $L$  関数の場合に結果を与えた. 他の極での様子を調べることも問題としてあるが, 私はさぼってやっておらず, またすでに極の主要部まで調べられているのかどうか, 不勉強でよく知らない. また  $\Gamma(1 + s)$  を掛けてから極の様子を見ると, 正規化基本定理に対応して  $\zeta_{\text{m}}(\mathbf{k}; T)$  が現れる. これらを以下で解説する.

与えられたインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  が

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}', \underbrace{1, \dots, 1}_m), \quad \mathbf{k}' \text{ は収束インデックス } (\emptyset \text{ も含む}), \quad m \geq 0,$$

の形だとし,  $\mathbf{k}$  に対応する二つの正規化多項式を

$$\zeta_{\text{in}}(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m a_i(\mathbf{k}) \frac{T^i}{i!}, \quad \zeta_*(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m b_i(\mathbf{k}) \frac{(T - \gamma)^i}{i!}$$

とする. 調和積正規化多項式は  $T - \gamma$  ( $\gamma$  はオイラー定数) で展開していることに注意. このとき

**定理 6.1.** 関数  $\Gamma(s+1)\zeta(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + s)$  および  $\zeta(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + s)$  の  $s = 0$  での主要部は

$$\Gamma(s+1)\zeta(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + s) = \sum_{i=0}^m \frac{a_i(\mathbf{k})}{s^i} + O(s) \quad (s \rightarrow 0), \quad (6.1)$$

$$\zeta(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + s) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i(\mathbf{k})}{s^i} + O(s) \quad (s \rightarrow 0) \quad (6.2)$$

で与えられる.

*Proof.* 証明の鍵になるのは, (6.1) の特別な場合でもある, [1, Proposition 4 (ii)] の式

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \frac{1}{s^r} + O(s) \quad (s \rightarrow 0) \quad (6.3)$$

である.  $\zeta_{\text{in}}(\underbrace{1, \dots, 1}_r; T) = T^r/r!$  に注意. これが分かると, あとはシャッフル積と簡単な評価で

(6.1) が得られ, それと正規化の基本定理から (6.2) が従う仕組みである. 丁度  $\rho^{-1}$  が  $\Gamma(s+1)^{-1}$  を掛けることに対応していて, さもありなんという式である. ところで [2] やそれを引き写した [3] の証明にはミスがあり, 収束しない積分項が現れてしまっている. 以下に証明を書く (今度は大丈夫?).

(6.3) の [1] での証明はやや ad hoc な感じのものであるが, ここで別証明を与えてみよう. これは, 第一種スターリング数の漸近挙動から,  $\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s)$  の主要部を  $O(1)$  で決めて, そこから (6.3) が導かれる, というものである.

第一種スターリング数を  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right]$  と書く. いろいろな慣用があるが, 本 [4] の流儀 (というか Knuth の流儀) に従ったものとする.  $r > 1$  を固定したとき, 次の漸近挙動が知られている.

**定理 6.2** (Wilf [17]).  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\frac{1}{(n-1)!} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right] = \gamma_0 \frac{(\log n)^{r-1}}{(r-1)!} + \gamma_1 \frac{(\log n)^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + \gamma_{r-1} + O\left(\frac{(\log n)^{r-2}}{n}\right).$$

ここに,  $\gamma_i$  は  $\Gamma(s+1)^{-1}$  の  $s = 0$  でのテイラー展開係数:

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i s^i = 1 + \gamma s + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \zeta(2)) s^2 + \frac{1}{6}(\gamma^3 - 3\gamma\zeta(2) + 2\zeta(3)) s^3 + \dots$$

ちなみにこの  $\gamma_i$  は  $\zeta_*(1, \dots, 1; \gamma)$  に等しい。これは (5.6) で  $T = \gamma$  とすれば直ちに分かる。

実は私はこの Wilf の結果を 2015 年, サバティカルで IHES に滞在中に初めて知ったのだが, これが  $\zeta(1, \dots, 1)$  の調和積正規化そのものなのである。なぜなら, スターリング数の一つの定義でもある  $x(x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{r=0}^m \binom{n}{r} x^r$  からすぐ分かるように,

$$\frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{r} = \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} < n} \frac{1}{m_1 \cdots m_{r-1}}$$

であり (この式はまた, 荒川さんに宛てた 1995 年の手紙にある  $\zeta_n^{(k)} = \zeta(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1}, k+1)$  を導く基となる), (5.6) 式を

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_i; T) u^i = \Gamma(u+1)^{-1} e^{(T-\gamma)u} \quad (6.4)$$

と書いてみれば,

$$\zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}; T) = \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_{r-1-i} \frac{(T-\gamma)^i}{i!} \quad (6.5)$$

であることが分かるので, 結局 Wilf の定理は  $\frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{r}$  の漸近式が  $\zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}; \log n + \gamma)$  で与えられると言うに等しい (ビッグ O の中身もすぐ特定できる)。これは多項式  $\zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}; T)$  の特徴付けそのものである。

Wilf による定理の証明は,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{r} x^{r-1} &= \exp \log \left(1 + \frac{x}{1}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n-1}\right) \\ &= \exp \left( \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k j^k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left( (-1)^{k-1} \frac{\zeta_n(k)}{k} x^k \right), \quad \text{ただし } \zeta_n(k) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^k}, \end{aligned}$$

として,  $\zeta_n(k)$  のところに Euler-Maclaurin からくる漸近式を代入して計算するもの。我々のやり方では調和積の性質を使い, 帰納的に一般の多重ゼータ値の有限和の漸近式を証明するので, 証明方法も別であるが, 丁度 Hoffman, Zagier の最初の多重ゼータ値論文が出たのと同じ頃のこの Wilf の論文は歴史的にも興味深いと思う。この論文にはさらに漸近展開の高次の項を求める方法も書いてあり, それが (我々の言葉では) 正規化多項式  $\zeta_*(1, \dots, 1; T)$  を使ってなされているのも注目に値する。

さて, (6.3) の証明に戻る。この Wilf の漸近式 (あるいは同じことだが調和積正規化多項式  $\zeta_*(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}; T)$  の記述 (6.5)) を出発点にとると,  $r \geq 1$  として,  $\Re(s) > 0$  で

$$\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} < n} \frac{1}{m_1 \cdots m_{r-1} n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{r}}{n^{1+s}}$$

であるから,

$$\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_{r-1-i} \frac{1}{i!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^i}{n^{1+s}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+s}}.$$

ここに

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] - \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_{r-1-i} \frac{(\log n)^i}{i!}$$

で,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_n = O((\log n)^{r-2}/n)$ . よって Dirichlet 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^{1+s}$  は  $\Re(s) > -1$  で絶対収束し, 特に  $s = 0$  で正則. また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^i}{n^{1+s}} = (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial s^i} \zeta(s+1)$$

なので,  $s \rightarrow 0$  での様子は  $i!/s^{i+1} + O(1)$ . よって,  $s \rightarrow 0$  のとき,

$$\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\gamma_{r-1-i}}{s^{i+1}} + O(1) = \frac{1}{s^r} \Gamma(s+1)^{-1} + O(1).$$

これより

$$\Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \frac{1}{s^r} + O(1)$$

が分かるが, [1, p. 196] にあるように, これが言えると実は  $O(1)$  を  $O(s)$  に置き換えた

$$\Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \frac{1}{s^r} + O(s)$$

が言えるのである. それはどういう議論だったかということ, [1, Proposition 2 (i)] の式

$$\Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \int_0^{\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}}(e^{-t}) dt$$

において,  $1/(e^t - 1) = (1/(e^t - 1) - 1/t) + 1/t$  と書いて

$$\Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \int_0^{\infty} t^s \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}}(e^{-t}) dt + \int_0^{\infty} t^{s-1} \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}}(e^{-t}) dt$$

とすると, 第一の積分は  $s = 0$  で正則であり, 第二の積分は [1, Proposition 2 (ii)], または Li の級数表示を代入して項別積分すれば分かるように  $\Gamma(s) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-2}, 1+s)$  に等しいので,

$$\Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = (s=0 \text{ で正則な項}) + \Gamma(s) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-2}, 1+s)$$

を得る. そこで

$$\Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \frac{1}{s^r} + c_0^{(r)} + O(s)$$

とすると,

$$\Gamma(s)\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-2}, 1+s) = \frac{1}{s^r} + \frac{c_0^{(r-1)}}{s} + O(1)$$

で,

$$\frac{1}{s^r} + c_0^{(r)} + O(s) = O(1) + \frac{1}{s^r} + \frac{c_0^{(r-1)}}{s} + O(1)$$

より  $c_0^{(r-1)} = 0$  が出る.  $\forall r \geq 2$  に対してこれが言えるので, 主張

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \frac{1}{s^r} + O(s)$$

が言えた. そしてこれから,

$$\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, 1+s) = \sum_{i=0}^r \frac{\gamma_{r-i}}{s^i} + O(s)$$

が出る ( $\Gamma(s+1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i s^i$ ).

(6.3) を用いて (6.1) を証明する.  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(x)$  はシャッフル積に従っており,  $\mathbf{k}$  を前述のように  $(\mathbf{k}', \underbrace{1, \dots, 1}_m)$

とするとき,

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{i=0}^m g_i(x) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_i}(x)$$

と書ける. ここに  $g_i(x)$  は収束インデックス  $i$  についての  $\text{Li}_i(x)$  の  $\mathbb{Q}$  線形和である. そして, シャッフル正規化多項式  $\zeta_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}; T)$  は

$$\zeta_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m g_i(1) \frac{T^i}{i!}$$

で与えられる.  $g_i(x)$  と  $g_i(1)$  の差について,

$$|g_i(x) - g_i(1)| = O((1-x) \log^J(1-x)) \quad (x \rightarrow 1, \exists J > 0)$$

が成り立っている ([3, 命題 1.4.15]). そこで, [1, Proposition 2 (ii)] を使って

$$\begin{aligned} & \Gamma(s+1)\zeta(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + s) \\ &= s \int_0^{\infty} t^{s-1} \text{Li}_{\mathbf{k}}(e^{-t}) dt \\ &= s \int_0^{\infty} t^{s-1} \sum_{i=0}^m g_i(e^{-t}) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_i}(e^{-t}) dt \\ &= \sum_{i=0}^m s \int_0^{\infty} t^{s-1} g_i(e^{-t}) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_i}(e^{-t}) dt \\ &= s \int_0^{\infty} t^{s-1} g_0(e^{-t}) dt + \sum_{i=1}^m s \int_0^{\infty} t^{s-1} (g_i(e^{-t}) - g_i(1) + g_i(1)) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_i}(e^{-t}) dt \end{aligned}$$

とすると, (6.3) より

$$\sum_{i=1}^m s \int_0^{\infty} t^{s-1} g_i(1) \underbrace{\text{Li}_{1, \dots, 1}}_i(e^{-t}) dt = \sum_{i=1}^m g_i(1) \Gamma(s+1) \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, 1+s) = \sum_{i=1}^m \frac{g_i(1)}{s^i} + O(s)$$

であるので, 残りの

$$s \int_0^{\infty} t^{s-1} g_0(e^{-t}) dt + \sum_{i=1}^m s \int_0^{\infty} t^{s-1} (g_i(e^{-t}) - g_i(1)) \underbrace{\text{Li}_{1, \dots, 1}}_i(e^{-t}) dt$$

が  $s \rightarrow 0$  のとき  $g_0(1)$  に収束することを言えば主張は示される. 今

$$g_i(e^{-t}) - g_i(1) = O((1 - e^{-t}) \log^J(1 - e^{-t})) = O(t \log^J t) \quad (t \rightarrow 0)$$

なので, 和の中の積分の  $t \rightarrow 0$  での広義積分は  $s = 0$  でも収束している.  $t \rightarrow \infty$  では  $\underbrace{\text{Li}_{1, \dots, 1}}_i(e^{-t})$  が  $O((e^{-t})^i)$  なので,  $\forall s$  に対し収束. よってこの広義積分は  $s = 0$  の近傍で正則なので,  $s$  倍して  $s \rightarrow 0$  とすると 0 に収束する. また第一項を

$$s \int_0^{\infty} t^{s-1} g_0(e^{-t}) dt = s \int_0^1 t^{s-1} g_0(e^{-t}) dt + s \int_1^{\infty} t^{s-1} g_0(e^{-t}) dt$$

と書くと,  $\int_1^{\infty}$  は  $k$  の重さ (=  $g_0$  の重さ) が正である限り  $\forall s$  で収束, よって  $s$  倍して  $s \rightarrow 0$  とすると 0 に収束, また  $g_0(e^{-t}) = g_0(1) + O(t \log^J t)$  ( $t \rightarrow 0$ ) で,  $\int_0^1 t^{s-1} \cdot t \log^J t dt$  は  $s = 0$  でも収束して有限の値を与えるから, やはり  $s$  倍して  $s \rightarrow 0$  とすると 0 に収束する. 残るは

$$s \int_0^1 t^{s-1} g_0(1) dt = g_0(1).$$

これで (6.1) が証明された. (6.2) は (6.1) の両辺に  $\Gamma(s+1)^{-1}$  を掛けて得られるが, これが (6.2) の形になることが正規化基本定理 (4.1) から従う. もう少し説明すると, 収束インデックス  $k'$  を固定して,  $m \geq 0$  をすべて動かしたときの正規化多項式  $\zeta_{\bullet}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m; T)$  ( $\bullet = \text{III}$  または  $*$ ) の

母関数が

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{\bullet}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m; T) x^m = e^{Tx} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{\bullet}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m) x^m \quad (6.6)$$

で与えられる ( $\zeta_{\bullet}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m) := \zeta_{\bullet}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m; 0)$ ). これは, [13] の p. 323 の一番上の式 (Corollary 5) を母関数の形で書き直したものである (そこでの  $w_0$  が  $k'$  に対応している).  $\bullet = \text{III}$  の場合のこの式の両辺に  $\rho^{-1}$  を施すと,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{*}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m; T) x^m = \Gamma(x+1)^{-1} e^{(T-\gamma)x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{\text{III}}(k', \underbrace{1, \dots, 1}_m) x^m \quad (6.7)$$

を得る. 我々は

$$\zeta_{\text{III}}(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m a_i(\mathbf{k}) \frac{T^i}{i!}, \quad \zeta_{*}(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m b_i(\mathbf{k}) \frac{(T-\gamma)^i}{i!}$$

と書いたのが , (6.6) より

$$a_i(\mathbf{k}) = \zeta_{\text{III}}(\mathbf{k}', \underbrace{1, \dots, 1}_{m-i})$$

である . 従って ,  $\Gamma(x+1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i x^i$  とするとき , (6.7) より

$$\zeta_*(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} \gamma_j a_{m-i-j}(\mathbf{k}) \right) \frac{(T-\gamma)^i}{i!}$$

と計算される . この係数すなわち  $b_i(\mathbf{k})$  が , (6.1) の右辺に  $\Gamma(s+1)^{-1}$  を掛けたものの  $s=0$  での展開の  $1/s^i$  の係数に他ならない . これで (6.2) が証明された .  $\square$

最後になりましたが , サマースクールの世話人の皆さんや , サポートして下さったり盛り上げて下さったりした沢山の方々に , 心から御礼申し上げます .

## 参考文献

- [1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 967–991.
- [3] 荒川恒男, 金子昌信, *多重ゼータ値入門*, COE Lecture Note Vol. 23, Kyushu University, 2010 .
- [4] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, *ベルヌーイ数とゼータ関数*, 牧野書店, 2001.
- [5] L. Boutet de Monvel, *Remarques sur les séries logarithmiques divergentes*, lecture at the workshop “Polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara”, C.I.R.M. (Luminy), April 2000.
- [6] L. Boutet de Monvel, *Remark on divergent multizeta series*, in *Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis*, RIMS Kôkyûroku **1397** (2004), 1–9.
- [7] P. Deligne and A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) **38** (2005), 1–56.
- [8] J. Écalle, *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas: un premier bilan*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **5** (2003), 411–478.
- [9] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, preprint, (2002).
- [10] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.
- [11] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra, **194** (1997), 477–495.
- [12] M. Hoffman, *References on multiple zeta values and Euler sums* (web page), <https://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html>

- [13] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, *Compositio Math.*, **142** (2006), 307–338.
- [14] M. Kaneko and S. Yamamoto, *A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations*, *Selecta Mathematica*, **24** (2018), 2499–2521.
- [15] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.
- [16] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, *Invent. Math.*, **149** (2002), 339–369.
- [17] H. Wilf, *The asymptotic behavior of the Stirling numbers of the first kind*, *Jour. Comb. Th. Ser A* **64** (1993), 344–349.
- [18] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals*, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 3–14.
- [19] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497–512.

九州大学数理学研究院  
819-0395 福岡市西区元岡 744  
e-mail: mkaneko@math.kyushu-u.ac.jp

# Yamamoto 積分表示と積分級数等式

川崎菜穂 (Naho Kawasaki)  
東北大学大学院理学研究科

Yamamoto([11]) は, 2-labeled poset を用いて反復積分を定義し, 多重ゼータ (スター) 値を含む広範な対象の積分表示を与えている. 多重ゼータ値の類似物である, Arakawa-Kaneko ゼータ関数や Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数, 一部のルート系のゼータ関数それぞれの特値を表すことができ, 応用としてそれらの特値に対する関係式が再証明される. 本稿では, Yamamoto 積分表示を導入したのち, Kaneko-Yamamoto の積分級数等式と付随する予想を紹介する. また, Yamamoto 積分表示の Arakawa-Kaneko ゼータ関数への応用や関連する課題を述べる.

正の整数  $k_1, \dots, k_r$  に対して, index  $\mathbf{k}$  を  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  で定義する.  $k_r > 1$  のとき, index  $\mathbf{k}$  を admissible (以下, adm.) と呼ぶ. 多重ゼータ値  $\zeta(k_1, \dots, k_r)$  および多重ゼータスター値  $\zeta^*(k_1, \dots, k_r)$  は, 任意の adm. index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

および

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 \leq \dots \leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

でそれぞれ定義されるものである.

## 1 Yamamoto 積分表示

Yamamoto 積分表示 ([11]) について述べる.

**定義 1.1** ([11, Definition 2.1]). (1)  $X = ((X, \preceq), \delta_X)$  を有限半順序集合 (finite partially ordered set)  $(X, \preceq)$  と labeling map  $\delta_X : X \rightarrow \{0, 1\}$  の組とし, 2-poset と呼ぶ.

(2) 2-poset  $X$  が admissible (以下, adm.) であるとは,  $X$  のすべての極大元  $x$  に対して  $\delta_X(x) = 0$  かつ,  $X$  のすべての極小元  $x$  に対して  $\delta_X(x) = 1$  となることとする.

(3) adm. 2-poset  $X$  に付随する積分を

$$I(X) = \int_{\Delta(X)} \prod_{x \in X} \omega_{\delta_X(x)}(t_x)$$

で定義する. ただし,

$$\Delta(X) = \{(t_x)_x \in (0, 1)^X \mid t_x < t_y \text{ if } x \prec y\}$$

かつ,

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

とする.

2-poset  $X$  が adm. であることと,  $I(X)$  が収束することは同値である. empty 2-poset を  $\emptyset$  で表し,  $I(\emptyset) = 1$  とおく. これは empty index  $\emptyset$  (記号流用) に対する定義  $\zeta(\emptyset) = \zeta^*(\emptyset) = 1$  に対応している.

2-poset を表すために, 頂点  $\circ, \bullet$  がそれぞれ  $\delta_X(x) = 0, 1$  に対応している Hasse 図を用いる. このとき, 辺で結ばれた頂点の上下関係で半順序関係を表す. 一般に, 2-poset に対応する Hasse 図は唯一通りではない. adm. 2-poset  $X$  が全順序のとき,  $I(X)$  は多重ゼータ値の反復積分表示に一致する. 実際,

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r) = I \left( \begin{array}{c} \text{Diagram with vertices } \circ, \bullet \text{ and arcs labeled } k_1, k_2, \dots, k_r \end{array} \right)$$

となる. また, 多重ゼータスター値  $\zeta^*(l_1, \dots, l_{s-1}, l_s)$  の Yamamoto 積分表示は,

$$\zeta^*(l_1, \dots, l_{s-1}, l_s) = I \left( \begin{array}{c} \text{Diagram with vertices } \circ, \bullet \text{ and arcs labeled } l_1, \dots, l_s \end{array} \right)$$

となる. これは, [11, Corollary 1.3] で与えられた多重ゼータスター値の積分表示である.

**例 1.2** (多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の例). 2-poset  $X$  を

$$X = \begin{cases} \{1 \prec 2 \succ 3 \succ 4 \prec 5 \prec 6\} \\ (\delta_X(1), \dots, \delta_X(6)) = (1, 0, 1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

とおく. このとき,  $X$  は adm. である. Hasse 図を用いると,

$$I(X) = I \left( \begin{array}{c} \text{Diagram with vertices } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right)$$

と表される. これは多重ゼータスター値  $\zeta^*(3, 1, 2)$  の Yamamoto 積分表示である. 実際,

$$I \left( \begin{array}{c} \text{Diagram with vertices } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right) = \int_0^1 \frac{dt_6}{t_6} \int_0^{t_6} \frac{dt_5}{t_5} \int_0^{t_5} \frac{dt_4}{1-t_4} \int_{t_4}^1 \frac{dt_3}{1-t_3} \int_{t_3}^1 \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$$

を計算すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} &= \sum_{0 < n} \frac{t_2^n}{n}, \\
\sum_{0 < n} \frac{1}{n} \int_{t_3}^1 t_2^{n-1} dt_2 &= \sum_{0 < n} \frac{1-t_3^n}{n^2}, \\
\sum_{0 < n} \frac{1}{n^2} \int_{t_4}^1 \frac{1-t_3^n}{1-t_3} dt_3 &= \sum_{0 < m \leq n} \frac{1-t_4^m}{mn^2}, \\
\sum_{0 < m \leq n} \frac{1}{mn^2} \int_0^{t_5} \frac{1-t_4^m}{1-t_4} dt_4 &= \sum_{0 < l \leq m \leq n} \frac{t_5^l}{lmn^2}, \\
\sum_{0 < l \leq m \leq n} \frac{1}{lmn^2} \int_0^{t_6} t_5^{l-1} dt_5 &= \sum_{0 < l \leq m \leq n} \frac{t_6^l}{l^2 mn^2}, \\
\sum_{0 < l \leq m \leq n} \frac{1}{l^2 mn^2} \int_0^1 t_6^{l-1} dt_6 &= \sum_{0 < l \leq m \leq n} \frac{1}{l^3 mn^2} = \zeta^*(3, 1, 2)
\end{aligned}$$

を得る.

多重ゼータ値や多重ゼータスター値の他に, Mordell-Tornheim 型ゼータ関数の特殊値 ([11]), Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値 ([5, 7, 11]) や Kaneko-Tsumura ゼータ関数の特殊値 ([5]) なども Yamamoto 積分表示をもつ. 以下, ゼータ関数の特殊値をゼータ値と呼ぶ.

## 2 積分級数等式

まず, 2-poset の基本的な構造と Yamamoto 積分表示の間に成り立つ関係式について紹介する.

**命題 2.1** ([11, Definition 2.2, Proposition 2.3]). (1) 2-poset  $X$  の比較不可能な元  $a, b$  に対して,  $X$  に関係  $a \prec b$  を追加した 2-poset を  $X_a^b$  と書く. このとき, 2-poset  $X$  が adm. ならば  $X_a^b, X_b^a$  は adm. であり,

$$I(X) = I(X_a^b) + I(X_b^a)$$

が成り立つ.

(2) 2-poset  $X = ((X, \preceq), \delta_X)$  に対して, 2-poset  $X^\dagger = ((X, \preceq^\dagger), \delta_{X^\dagger})$  を次のように定義する.  $X$  の元  $x, y$  に対して,  $x \preceq y$  ならば  $y \preceq^\dagger x$  とする. そして,  $\delta_{X^\dagger} = 1 - \delta_X$  とおく. このとき, 2-poset  $X$  が adm. ならば  $X^\dagger$  は adm. であり,

$$I(X) = I(X^\dagger)$$

が成り立つ.

(3) 2-poset  $X, Y$  に対して, 2-poset  $X \amalg Y = ((X \amalg Y, \preceq'), \delta_{X \amalg Y})$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
x \preceq' y &\iff x, y \in X \text{ and } x \preceq y \text{ in } X \text{ または} \\
&\quad x, y \in Y \text{ and } x \preceq y \text{ in } Y
\end{aligned}$$

とし,  $\delta_{X \amalg Y} : X \amalg Y \rightarrow \{0, 1\}$  を  $\delta_X : X \rightarrow \{0, 1\}$  と  $\delta_Y : Y \rightarrow \{0, 1\}$  の直和とする. このとき, 2-poset  $X, Y$  が adm. ならば  $X \amalg Y$  は adm. であり,

$$I(X)I(Y) = I(X \amalg Y)$$

が成り立つ.

命題 2.1 (1) により, 2-poset  $X$  が adm. ならば  $I(X)$  は多重ゼータ値の和で書き表せる.

命題 2.1 (1), (3) から, adm. 2-poset  $X, Y$  が特に全順序の場合, 次のように多重ゼータ値の shuffle 関係式が得られる. 多重ゼータ値の shuffle 関係式とは, 多重ゼータ値の反復積分表示に由来する積を用いて得られる関係式である.

例 2.2. Riemann ゼータ値の積  $\zeta(2)\zeta(2)$  を Yamamoto 積分表示を用いて計算する. これは命題 2.1 (3) より,

$$\zeta(2)\zeta(2) = I\left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ \bullet \end{array}\right) I\left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ \bullet \end{array}\right) = I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right)$$

となる. そして命題 2.1 (1) より,

$$I\left(\begin{array}{c} a \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = I\left(\begin{array}{c} a \quad b \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) + I\left(\begin{array}{c} a \quad \circ \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right)$$

となる. 同様に, 右辺の第二項に命題 2.1 (1) を繰り返し用いることにより,

$$\begin{aligned} I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ a' \quad b' \end{array}\right) &= I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ b' \quad a' \end{array}\right) + I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ a' \quad b' \end{array}\right) \\ &= 2I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) + I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) \\ &= 4I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) + I\left(\begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \\ \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) \end{aligned}$$

を得る. したがって, shuffle 関係式

$$\zeta(2)\zeta(2) = 4\zeta(1, 3) + 2\zeta(2, 2)$$

が得られる.

命題 2.1 (2) は, 次の多重ゼータ値の双対公式の自然な一般化となっている. adm. index  $\mathbf{k}$  を, 2 以上の成分と 1 とにわけて,  $\mathbf{k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_s-1}, b_s+1)$  ( $a_1, b_1, \dots, a_s, b_s \geq 1$ )

と表す. このとき,  $\mathbf{k}$  の dual index  $\mathbf{k}^\dagger$  を  $\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1, \dots, 1}_{b_s-1}, a_s+1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1-1}, a_1+1)$  で定義

する. adm. index  $\mathbf{k}$  とその dual index  $\mathbf{k}^\dagger$  に対して, 双対公式  $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^\dagger)$  が成り立つ. この事実は, Yamamoto 積分表示を用いると次のように解釈できる.



である.  $t_1$  から順に積分を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} &= \sum_{0 < m_1} \frac{t_2^{m_1}}{m_1}, \\ \sum_{0 < m_1} \frac{1}{m_1} \int_0^{t_3} \frac{t_2^{m_1}}{1-t_2} dt_2 &= \sum_{0 < m_1 < m_2} \frac{t_3^{m_2}}{m_1 m_2}, \\ \sum_{0 < m_1 < m_2} \frac{1}{m_1 m_2} \int_{t_4}^1 t_3^{m_2-1} dt_3 &= \sum_{\substack{0 < m_1 < m_2 \\ \parallel \\ n_2}} \frac{1-t_4^{n_2}}{m_1 m_2 n_2}, \\ \sum_{\substack{0 < m_1 < m_2 \\ \parallel \\ n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_2} \int_0^1 \frac{1-t_4^{n_2}}{1-t_4} dt_4 &= \sum_{\substack{0 < m_1 < m_2 \\ \parallel \\ 0 < n_1 \leq n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_1 n_2} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

を得る.

積分級数等式の両辺を, 次の例のようにそれぞれ展開することによって, 多重ゼータ値の関係式が得られる.

**例 2.5.**  $\mathbf{k} = \mathbf{1} = (1, 1)$  の場合を計算する. 左辺は命題 2.1 (1) より,

$$I \left( \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) = 3I \left( \begin{array}{c} \circ \\ / \quad / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) = 3\zeta(1, 1, 2)$$

となる. 一方, 右辺は,

$$\sum_{\substack{0 < m_1 < m_2 \\ \parallel \\ 0 < n_1 \leq n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_1 n_2} = 2\zeta(1, 1, 2) + \zeta(2, 2) + \zeta(1, 3)$$

となる. したがって,

$$\zeta(1, 1, 2) = \zeta(2, 2) + \zeta(1, 3)$$

を得る.

積分級数等式は簡明な式であるが, そこから得られる多重ゼータ値の関係式族は大きなクラスになり, 次のような予想が知られている.

**予想 2.6** ([4, Conjecture 4.3]). 積分級数等式から得られる関係式族によって, 多重ゼータ値の全ての線形関係式が導出されるであろう.

このことに関連して, 次のような事実が知られている.

**定理 2.7** ([4, Theorem 4.6, Theorem 4.8, Theorem 6.7]). (1) 有限複シャッフル関係式のもとで, 積分級数等式と正規化基本定理 ([2, Theorem 1]) は同値である.

(2) 積分級数等式のもとで, harmonic 関係式と shuffle 関係式は同値である.

(3) 積分級数等式, 有限複シャッフル関係式および双対公式により, 川島関係式 ([6, Corollary 5.4]) が導出される.

### 3 Arakawa-Kaneko ゼータ関数への応用

Kaneko と Tsumura はゼータ関数

$$\eta(\mathbf{k}; s) = \eta(k_1, \dots, k_r; s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 1 - r)$$

を定義した ([3]). これは, Arakawa-Kaneko ゼータ関数

$$\xi(\mathbf{k}; s) = \xi(k_1, \dots, k_r; s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(1 - e^{-t})}{e^t - 1} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

([1]) の ‘双子の兄弟’ と呼ばれている. ただし,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  を index,  $s$  を複素変数とする. そして,  $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z)$  を multiple polylogarithm

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \quad (|z| < 1)$$

とする. Kaneko-Tsumura ゼータ関数  $\eta(\mathbf{k}; s)$  および Arakawa-Kaneko ゼータ関数  $\xi(\mathbf{k}; s)$  は, 複素全平面に整関数として解析接続される.

Kaneko と Tsumura は, これらのゼータ関数の特殊値を多重ゼータ値または多重ゼータスター値の明示的な線形和で表した. この定理を紹介するために記号を定めておく. 任意の非負整数列  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_r)$  ( $j_1, \dots, j_r \geq 0$ ) に対して,  $\mathbf{j}$  の weight および depth をそれぞれ,  $\text{wt}(\mathbf{j}) = j_1 + \dots + j_r$ ,  $\text{dep}(\mathbf{j}) = r$  で定義する. 任意の index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して,  $\mathbf{k}_+ := (k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1)$  とおく. depth が等しい  $\mathbf{k}, \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_r)$  に対して,  $\mathbf{k} + \mathbf{j}$  を index

$$\mathbf{k} + \mathbf{j} := (k_1 + j_1, \dots, k_r + j_r),$$

そして,  $b(\mathbf{k}; \mathbf{j})$  を

$$b(\mathbf{k}; \mathbf{j}) := \prod_{i=1}^r \binom{k_i + j_i - 1}{j_i}.$$

とおく.

Kaneko と Tsumura は [3] の中で, 次の定理を示した.

**定理 3.1** ([3, Theorem 2.5]). 任意の non-empty index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と任意の正の整数  $m$  に対して,

$$\eta(\mathbf{k}; m) = (-1)^{r-1} \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{j})=m-1 \\ \text{dep}(\mathbf{j})=n}} b\left(\mathbf{k}_+^\dagger; \mathbf{j}\right) \zeta^*\left(\mathbf{k}_+^\dagger + \mathbf{j}\right)$$

および

$$\xi(\mathbf{k}; m) = \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{j})=m-1 \\ \text{dep}(\mathbf{j})=n}} b\left(\mathbf{k}_+^\dagger; \mathbf{j}\right) \zeta\left(\mathbf{k}_+^\dagger + \mathbf{j}\right)$$

が成り立つ. ただし, 和は weight が  $m - 1$  であり, depth が  $n = \text{dep}(\mathbf{k}_+^\dagger)$  である非負整数列  $\mathbf{j}$  すべてをわたる.

この定理は Yamamoto 積分表示を用いると, 次のように再証明できる ([5]).



となる. 極小元とその次の黒丸の間にある  $k'_1 + j_1 - 1$  個 ( $1 \leq j_1 \leq m - 1$ ) の白丸を全順序化する方法は  $\binom{k'_1 + j_1 - 1}{j_1}$  通りであることから,

$$\xi(\mathbf{k}; m) = \sum_{j_1=0}^{m-1} \binom{k'_1 + j_1 - 1}{j_1} I \left( \begin{array}{c} \text{Diagram with } k'_n-1 \text{ white nodes and } 1 \text{ black node} \\ \vdots \\ \text{Diagram with } k'_2-1 \text{ white nodes and } 1 \text{ black node} \\ \vdots \\ \text{Diagram with } k'_1 + j_1 - 1 \text{ white nodes and } 1 \text{ black node} \end{array} \right)$$

となる. 同様の操作を  $n - 1$  回繰り返すことによって, 示したい式が得られる.  $\eta(\mathbf{k}; m)$  についても同様に示すことができる.  $\square$

また, 次の定理は [3, (3.11)] で予想され, [10, Corollary 2.5] には一般化された公式として証明が記載されている.

**定理 3.2** ([10, Corollary 2.5]). 任意の正の整数  $k, m$  に対して,

$$\eta(k; m) = \eta(m; k)$$

が成り立つ.

この定理も Yamamoto 積分表示を用いて, 次のように再証明できる ([5]).

*Combinatorial proof.* 左辺を計算すると,

$$\eta(k; m) = I \left( \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ white nodes and } 1 \text{ black node} \\ \vdots \\ \text{Diagram with } m-1 \text{ white nodes and } 1 \text{ black node} \end{array} \right) = \sum_{\substack{0 < u_1 \leq \dots \leq u_k \\ 0 < v_1 \leq \dots \leq v_m}} \frac{1}{u_1 \cdots u_k v_1 \cdots v_m}$$

となる. 右辺の級数の対称性より明らか.  $\square$

**注意 3.3.** [3] と [10] では,  $\eta(\mathbf{k}; m)$  および  $\xi(\mathbf{k}; m)$  の定義式から, 解析的あるいは母関数の計算によって定理 3.1, 定理 3.2 を導いている.

## 4 その他の研究とこれからの課題

Yamamoto 積分表示が用いられているその他の研究について, 三つ紹介する:

- Kaneko-Yamamoto([4]) は, 積分級数等式を用いて制限付き和公式を証明した ([4, Proposition 7.1]). この制限付き和公式により, 和公式と Hoffman 関係式が導出されることも示している ([4, Corollary 7.2, Remark 7.3]).

- Shingu([7]) は, depth が 1 の index  $\mathbf{k} = (k)$  に対する Kaneko-Tsumura ゼータ値  $\eta(k; m)$  を多重ゼータ値の和で表せることを, Yamamoto 積分表示を用いて証明した ([7, 定理 6.1]). この結果を特殊化することにより, Kaneko-Tsumura による予想式 ([3, p.39]) が成り立つことも示した ([7, 系 6.2]). また, 定理 3.2 を大野関係式から再証明している ([7, 定理 7.1]).
- Umezawa([8]) は, ‘Mordell-Tornheim 型の Arakawa-Kaneko ゼータ値’が‘一般 Mordell-Tornheim 型のゼータ値’の和で書き表せることを示した ([8, Theorem 5]). この証明は二通りあり, そのうちの一つでそれぞれのゼータ値に対する Yamamoto 積分表示が用いられている ([8, Remark 5]). また, 一般 Mordell-Tornheim 型のゼータ値を多重化し, これが Yamamoto 積分表示をもつことにも言及している ([8, Remark 10]).

最後に, Yamamoto 積分表示に関連する今後の課題をいくつか挙げておく:

- 2 つの多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の積が多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の和でうまく表せるか.
- 積分級数等式から有限複シャッフル関係式が導出できるか. この問題は定理 2.7 (1), (2) より, 積分級数等式から正規化複シャッフル関係式が導出できるかという問題と同値である.
- 積分級数等式から双対公式が導出できるか.
- ‘多変数版の Kaneko-Tsumura ゼータ値’([3, Definition 5.6]) を Yamamoto 積分表示で表せるか. そして, 定理 3.2 の多変数版である [10, Corollary 2.5] の再証明ができるか.
- Yamamoto 積分表示を用いて, 多重ゼータスター値と  $t$ -多重ゼータ値の間に成り立つ 2-1 公式を再解釈できるか.  $t$ -多重ゼータ値とは, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間したものである. Yamamoto([9]) は Yamamoto 積分表示を用いて, 2-1 公式の両辺の値に対する結果と疑問について述べている. その疑問を解決することで, 2-1 公式が成り立つ背景をより深く理解できるか.

## 参考文献

- [1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189-209.
- [2] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.*, **142** (2006), 307-338.
- [3] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **232** (2018), 19-54, arXiv:1503.02156.
- [4] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Mathematica*, **24** (2018), 2499-2521, arXiv:1605.03117.
- [5] N. Kawasaki and Y. Ohno, Combinatorial proofs of identities for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions, *Kyushu J. Math.*, **72** (2018), 215-222.

- [6] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory*, **129** (2009), 755-788.
- [7] 神宮啓佑, Kaneko-Tsumura ゼータ関数とその周辺, 修士論文, 名古屋大学 (2018).
- [8] R. Umezawa, On an analog of the Arakawa-Kaneko zeta function and relations of some multiple zeta values, preprint, 2018, arXiv:1803.11441.
- [9] 山本修司, 等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式, 第 59 回代数学シンポジウム 報告集 (2014), 128-135.
- [10] S. Yamamoto, Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers, preprint, 2016, arXiv:1607.01978.
- [11] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 3-14, arXiv:1405.6499.

# KZ 方程式と KZ 結合子

原田 遼太郎 (名古屋大学 多元数理科学研究科)

## 1 概要

本稿では Drinfeld によって導入された KZ 結合子と多重ゼータ値の関係について扱う. §2 においてはいくつかの記号と Proposition を紹介する. §3 にて形式的 KZ 方程式を紹介し, その基本解の比により KZ 結合子を定義する. この KZ 結合子が実は多重ゼータ値の母関数であるという先行結果も述べる. §4 では結合子が満たす一連の関係式たちを紹介し, 5-サイクル関係式以外のその証明を与える. また, 結合子関係式から導かれる多重ゼータ値の関係式も述べる. 最後の §5 では補足として KZ 結合子が多重ゼータ値の母関数であることの証明について, その概略を与える.

## 2 準備

### 2.1 記号

$R$  を単位元を持つ可換環,  $e_0, e_1$  を変数として, 以下の記号をおく.

$R\langle e_0, e_1 \rangle$ :  $R$  を係数にもつ二変数非可換多項式環

$R\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ :  $R$  を係数にもつ二変数非可換形式的べき級数環

$\{e_0, e_1\}^\times$ :  $e_0, e_1$  がなす語 ( $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  におけるモニック単項式) の集合であり, 空語を 1 と定義する.

$\mathbb{C}'$ :  $\mathbb{C}$  から二つの実半直線  $(-\infty, 0]$  と  $[1, +\infty)$  を引いた領域

$\mathbb{H}$ :  $\mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle$  におけるシャッフル積

**Proposition 2.1.** 任意の  $w \in \{e_0, e_1\}^\times$  に対し, 次を満たす  $w_{ij} \in \mathbb{Q} + e_1\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle e_0$  ( $0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s$ ) たちが一意に存在する.

$$w = w_{00} + e_0 \sqcup w_{10} + w_{01} \sqcup e_1 + e_0 \sqcup w_{11} \sqcup e_1 + \cdots + e_0^r \sqcup w_{rs} \sqcup e_1^s$$

ここでは  $r = \deg_{e_0} w, s = \deg_{e_1} w$  としている.

**Example 2.2.**  $w = e_1 e_0 e_0 e_1$  は次のように表せる.

$$e_1 e_0 e_0 e_1 = -2e_1^2 e_0^2 - e_1 e_0 e_1 e_0 + e_1 e_0^2 \sqcup e_1$$

## 2.2 多重ゼータ値

初めに定義した語の中でも,  $e_1$  から始まり  $e_0$  で終わるような語についてはその指数と多重ゼータ値の指数の対応が考えられる. すなわち,  $w \in e_1 \cdot \{e_0, e_1\}^\times \cdot e_0 := \{e_1 w e_0 \mid w \in \{e_0, e_1\}^\times\}$  が

$$w = e_1 e_0^{k_1-1} e_1 e_0^{k_2-1} \cdots e_1 e_0^{k_r-1} \quad (k_i \in \mathbb{N}, k_r \geq 2)$$

と表せ, このとき  $\zeta(w) := \zeta(k_1, k_2, \dots, k_r)$  と定める.

**Proposition 2.3.** 次の  $\mathbb{Q}$ -線形写像はシャッフル積に関して準同型である.

$$\begin{aligned} \zeta^\sqcup : \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \zeta(w_{00}) \end{aligned}$$

即ち,  $\zeta^\sqcup(w \sqcup w') = \zeta^\sqcup(w)\zeta^\sqcup(w')$  (記号は Proposition 2.1 と同じものを用いている).

## 3 KZ 方程式と KZ 結合子

### 3.1 KZ 方程式

まず, KZ 結合子の定義のための準備として KZ 方程式の定義を紹介する.

**Definition 3.1.**  $\mathbb{C}'$  の開集合  $U$  に対して,  $R_U$  を  $U$  上正則な関数のなす環とする.  $R_U\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  を,  $R_U$  を係数環にもつ変数  $e_0, e_1$  の非可換形式的べき級数環と定義する.  $R_U\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元  $G(e_0, e_1)(z)$  を次のように表す.

$$G(e_0, e_1)(z) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} G_w(z) w \in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

以降,  $e_0, e_1$  の並びを変えない限り  $G(e_0, e_1)(z) = G(z)$  と略記する.

**Definition 3.2.** 次の微分方程式によって,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  上の形式的 KZ 方程式 (Knizhnik-Zamolodchikov equation) が定義される.

$$\frac{d}{dz}G(z) = \left( \frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) G(z).$$

ここで,  $G(z) \in R_{\mathbb{C}} \langle \langle e_0, e_1 \rangle \rangle$  である.

以降, 便宜上, KZ 方程式の解の集合を  $\text{SolKZ}$  とおく.

**Lemma 3.3** ([3]).  $G_0(z) \approx z^{e_0} := \sum_{n \geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n$  ( $z \rightarrow 0$ ) を満たすような  $G_0(z) = G_0(e_0, e_1)(z) \in \text{SolKZ}$  が一意に存在する. ここで,  $G(z) \approx z^{e_0}$  ( $z \rightarrow 0$ ) とは, ある  $P_0(z) \in R_{\mathbb{C} \cap D_\epsilon} \langle \langle e_0, e_1 \rangle \rangle$  ( $D_\epsilon$  は  $z = 0$  の  $\epsilon$  近傍) が存在して  $G(z)z^{-e_0} = 1 + zP_0(z)$  を満たすことと定義する. この  $G_0(z)$  を  $z = 0$  における KZ 方程式の基本解とよぶ.

*Proof.* 存在性については Theorem 5.4 の明示公式をもって証明とする. ここでは一意性についてのみ証明する. 今  $H(z), G_0(z) \in \text{SolKZ}$  を KZ 方程式の基本解とすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( G_0(z)^{-1} H(z) \right) &= -G_0(z)^{-1} \left\{ \frac{d}{dz} G_0(z) \right\} G_0(z)^{-1} H(z) + G_0(z)^{-1} \frac{d}{dz} H(z) \\ &= -G_0(z)^{-1} \left\{ \frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right\} H(z) + G_0(z)^{-1} \left\{ \frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right\} H(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって,  $G_0(z)^{-1} H(z) \in \mathbb{C} \langle \langle e_0, e_1 \rangle \rangle$  となることが分かる. ここで仮定より, ある  $P_0(z), P_H(z) \in R_{\mathbb{C} \cap D_\epsilon} \langle \langle e_0, e_1 \rangle \rangle$  が存在して, 次の等式を満たす.

$$G_0(z) = z^{e_0} + zP_0(z)z^{e_0}, \quad H(z) = z^{e_0} + zP_H(z)z^{e_0}.$$

したがって,

$$G_0(z)^{-1} H(z) = \left( z^{e_0} + zP_0(z)z^{e_0} \right)^{-1} \left( z^{e_0} + zP_H(z)z^{e_0} \right) \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow 0)$$

が成り立つ.  $G_0(z)^{-1} H(z)$  は  $z$  に非依存なので結局  $G_0(z)^{-1} H(z) = 1$ .  $\square$

**Lemma 3.4** ([3]).  $G_1(z) \approx (1-z)^{e_1}$  ( $z \rightarrow 1$ ) を満たすような  $G_1(z) = G_1(e_0, e_1)(z) \in \text{SolKZ}$  が一意に存在する. ここで,  $G(z) \approx (1-z)^{e_1}$  ( $z \rightarrow 1$ ) とは, ある  $P_1(z) \in R_{\mathbb{C} \cap D_\epsilon} \langle \langle e_0, e_1 \rangle \rangle$  ( $D_\epsilon$  は  $z = 0$  の  $\epsilon$  近傍) が存在して  $G(z)(1-z)^{-e_1} = 1 + (1-z)P_1(1-z)$  を満たすことと定義する. この  $G_1(z)$  を  $z = 1$  における KZ 方程式の基本解とよぶ.

*Proof.* 存在性は Proposition 3.5 と明示公式によって証明とする. 一意性については  $G_0(z)$  と同様にして証明される.  $\square$

**Proposition 3.5.** 二つの基本解の間に次の等式が成り立つ:

$$G_1(e_0, e_1)(z) = G_0(e_1, e_0)(1 - z).$$

*Proof.* 基本解の一意性から, 次の二つが成り立つことを確かめれば十分である.

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \approx (1 - z)^{e_1} \quad (z \rightarrow 1), \quad (3.1)$$

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \in \text{SolKZ}. \quad (3.2)$$

(3.1) から示す.  $G_0(z) \approx z^{e_0}$  ( $z \rightarrow 0$ ) により, 次が得られる.

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \approx (1 - z)^{e_1} \quad (z \rightarrow 1).$$

(3.2) については, まず KZ 方程式を  $z \rightarrow 1 - z$  と変数変換すると,

$$\frac{d}{dz}G(1 - z) = \left( \frac{e_1}{z} + \frac{e_0}{z - 1} \right) G(1 - z).$$

元の KZ 方程式と比較して右辺の  $e_0, e_1$  の順番が入れ替わっていることと,  $G_0(e_0, e_1)(z)$  は元の KZ 方程式の解であることから,

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \in \text{SolKZ}.$$

したがって題意が示された.  $\square$

## 3.2 KZ 結合子

Theorem 5.4 により  $G_0(z), G_1(z)$  は定数項 1 をもつべき級数なので逆元を持つ. このことから, KZ 結合子 (Drinfeld 結合子とも呼ばれる)  $\Phi_{KZ}$  は次のように定義される.

**Definition 3.6** ([4]). **KZ 結合子 (KZ associator)**  $\Phi_{KZ}(e_0, e_1)$  は次の式で定義される.

$$\Phi_{KZ}(e_0, e_1) := G_1(e_0, e_1)(z)^{-1}G_0(e_0, e_1)(z) \in R_{\mathbb{C}}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

以降,  $e_0, e_1$  の並びが問題にならない限り,  $\Phi_{KZ}(e_0, e_1)$  を  $\Phi_{KZ}$  と略す.

**Lemma 3.7.**  $\Phi_{KZ}$  は  $z$  に依らない. 即ち,

$$\Phi_{KZ} \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

*Proof.* 次の計算より示される.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Phi_{KZ} &= -G_1(z)^{-1}\left(\frac{d}{dz}G_1(z)\right)G_1(z)^{-1}G_0(z) + G_1(z)^{-1}\frac{d}{dz}G_0(z) \\ &= -G_1(z)^{-1}\left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)G_1(z)G_1(z)^{-1}G_0(z) \\ &\quad + G_1(z)^{-1}\left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)G_0(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

*Remark 3.8.* Proposition 2.3 を用いることにより, [6] と [15] に表れる明示公式を次のようにも書ける.

$$\Phi_{KZ} = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w} \zeta^{\cup}(w) w$$

但し,  $\zeta^{\cup}(w)$  は語  $w$  に表れる  $e_0, e_1$  達の並びを右から左に並べ替えた語としている.

## 4 結合子関係式

最後に KZ 結合子が満たす関係式について紹介する. この章ではまず初めに Definition 4.1 で結合子  $(\mu, \phi) \in K^\times \times K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  を定義し, その中で結合子関係式を述べる. そして次に, Definition 3.6 では  $\Phi_{KZ}$  を基本解の比として定義し KZ 結合子 (Drinfeld 結合子) と呼んでいたがこの章ではより厳密に Definition 4.1 に照らし合わせ, 実は組  $(2\pi i, \Phi_{KZ})$  が結合子の例であることを示す. 但し, 証明は 3-サイクル関係式まで行う. また, 多重ゼータ値の関係式, Euler の公式との関係も紹介する.

下の Definition 4.1 中の  $\widehat{U\mathfrak{P}_5}$  は,  $\mathfrak{P}_5$  の普遍包絡環を次数について完備化したものとしている.  $\mathfrak{P}_5$  とは 5 本糸純球面組紐 Lie 代数とよばれる, 次の関係式を満たすような元  $X_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 5$ ) で生成される体  $K$  上の次数

付き Lie 代数である. 次数は  $\deg(X_{ij}) = 1$  として定めている.

$$\begin{aligned} & \cdot X_{ii} = 0, \quad \cdot X_{ij} = X_{ji} \ (i \neq j), \quad \cdot \sum_{j=1}^5 X_{ij} = 0 \ (1 \leq i \leq 5), \\ & \cdot [X_{ij}, X_{kl}] = 0 \ (i, j, k, l \text{ は相異なる}). \end{aligned}$$

**Definition 4.1.**  $K$  を標数 0 の体とする.  $(\mu, \phi) \in K^\times \times K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  は次の条件を満たすとき結合子をなすという<sup>1</sup>.

$$\cdot \phi(e_0, 0) = \phi(0, e_1) = 1. \quad (4.1)$$

$$\cdot \Delta(\phi) = \phi \otimes \phi. \quad (4.2)$$

・(2-サイクル関係式):  $K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  において,

$$\phi(e_0, e_1)\phi(e_1, e_0) = 1. \quad (4.3)$$

・(3-サイクル関係式):  $e_\infty = -e_0 - e_1$  とおくと,  $K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  において

$$\exp\left(\frac{\mu}{2}e_0\right)\phi(e_\infty, e_0) \exp\left(\frac{\mu}{2}e_\infty\right)\phi(e_1, e_\infty) \exp\left(\frac{\mu}{2}e_1\right)\phi(e_0, e_1) = 1. \quad (4.4)$$

・(5-サイクル関係式):  $\widehat{U\mathfrak{P}}_5$  において,

$$\phi(X_{12}, X_{23})\phi(X_{34}, X_{45})\phi(X_{51}, X_{12})\phi(X_{23}, X_{34})\phi(X_{45}, X_{51}) = 1. \quad (4.5)$$

ここで,  $\Delta$  とは  $\Delta(e_0) = e_0 \otimes 1 + 1 \otimes e_0$ ,  $\Delta(e_1) = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1$  で定まる, 通常の積についての  $K$ -代数準同型  $\Delta: K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \rightarrow K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes} K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  としている.  $\hat{\otimes}$  は完備テンソル積を意味する. また (4.1) から (4.5) までの五つの関係式を合わせて結合子関係式とよぶ.

**Theorem 4.2** ([4]).  $(2\pi i, \Phi_{KZ})$  は結合子である.

*Proof.*  $2\pi i \in \mathbb{C}^\times$  は明らか. また Theorem 5.10 により  $\Phi_{KZ}$  が (4.1) を満たすことがわかる.

関係式 (4.2) について証明する.  $w \in \{e_0, e_1\}^\times$  に対し,

$$\Delta(w) = \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} \delta_{w_1 \sqcup w_2, w} w_1 \otimes w_2$$

が成り立つ. ここで,  $\delta_{w_1 \sqcup w_2, w}$  は通常の Kronecker のデルタを  $\mathbb{Q}$ -線形に拡張したものとしている. 即ち,  $w_1 \sqcup w_2$  中における  $w$  の係数である. 上式

<sup>1</sup> $\mu$  は  $K$  の可逆元全体の集合  $K^\times$  の元としていることに注意.

より,

$$\begin{aligned}
\Delta(\Phi_{KZ}) &= \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w} \zeta^\sqcup(\overleftarrow{w}) \Delta(w) \\
&= \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w} \zeta^\sqcup(\overleftarrow{w}) \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} \delta_{w_1 \sqcup w_2, w} w_1 \otimes w_2 \\
&= \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w} \delta_{w_1 \sqcup w_2, w} \zeta^\sqcup(\overleftarrow{w}) w_1 \otimes w_2.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$w_1 \sqcup w_2$  の各項において,  $e_1$  の次数は  $\deg_{e_1} w_1 + \deg_{e_1} w_2$  に等しいので,

$$(4.6) \text{ の最右辺} = \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w_1 + \deg_{e_1} w_2} \zeta^\sqcup(\overleftarrow{w_1 \sqcup w_2}) w_1 \otimes w_2.$$

Proposition 2.3 により,

$$\begin{aligned}
(4.6) \text{ の最右辺} &= \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w_1 + \deg_{e_1} w_2} \zeta^\sqcup(\overleftarrow{w_1}) \zeta^\sqcup(\overleftarrow{w_2}) w_1 \otimes w_2 \\
&= \Phi_{KZ} \otimes \Phi_{KZ}.
\end{aligned}$$

よって (4.2) が示された.

次に関係式 (4.3) を証明する. Definition 3.6 と Proposition 3.5 から,

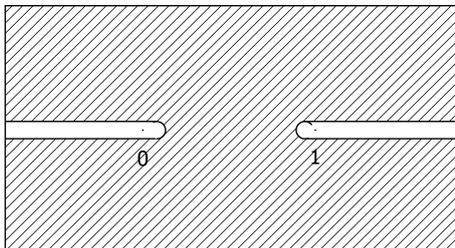
$$\begin{aligned}
\Phi_{KZ}(e_1, e_0) &= G_1(e_1, e_0)(z)^{-1} G_0(e_1, e_0)(z) \\
&= G_0(e_0, e_1)(1-z)^{-1} G_1(e_0, e_1)(1-z) \\
&= \Phi_{KZ}(e_0, e_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

よって

$$\Phi_{KZ}(e_0, e_1) \Phi_{KZ}(e_1, e_0) = 1.$$

上式より (4.3) が示された.

次に関係式 (4.4) を示す. 三点  $\{0, 1, \infty\}$  の各入れ替えに対して射影変換が一意に定まる. それらがなす自己同型群  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  により, 領域  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  と形式的 KZ 方程式が移り変わる. まず,  $\{0, 1, \infty\}$  を入れ替えない自明な射影変換  $\text{id} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  に対しては領域は  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  のまま, 形式的 KZ 方程式も Definition 3.2 と同様であるから, その基本解は  $G_0(e_0, e_1)(z)$  である. その他の射影変換については次ページで見るように図の領域とその領域上の形式的 KZ 方程式の解が得られる.



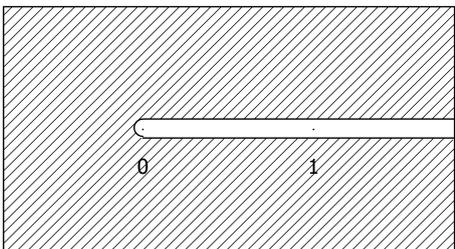
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \mapsto 1 - z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$0 \mapsto 1$$

$$1 \mapsto 0$$

$$\infty \mapsto \infty$$

$$\text{解 } G_0(e_1, e_0)(1 - z)$$



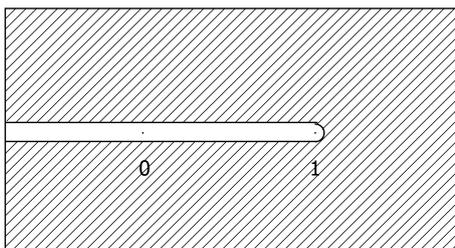
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \mapsto z/(z - 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$0 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto \infty$$

$$\infty \mapsto 1$$

$$\text{解 } G_0(e_0, e_\infty)(z/(z - 1))$$



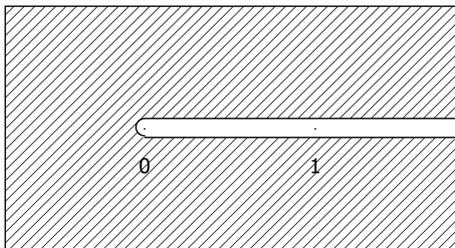
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \mapsto 1/z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$0 \mapsto \infty$$

$$1 \mapsto 1$$

$$\infty \mapsto 0$$

$$\text{解 } G_0(e_\infty, e_1)(1/z)$$



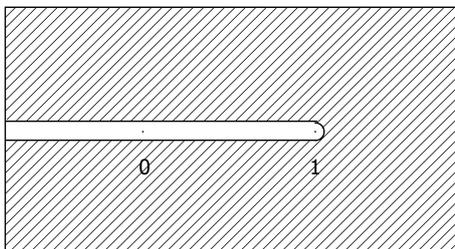
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \mapsto 1/(1 - z) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$0 \mapsto 1$$

$$1 \mapsto \infty$$

$$\infty \mapsto 0$$

$$\text{解 } G_0(e_\infty, e_0)(1/(1 - z))$$



$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \mapsto (z - 1)/z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$0 \mapsto \infty$$

$$1 \mapsto 0$$

$$\infty \mapsto 1$$

$$\text{解 } G_0(e_1, e_\infty)((z - 1)/z)$$

また、次の六つの漸近挙動が成り立つ。

$$\begin{aligned}
G_0(e_0, e_1)(z) &\approx z^{e_0} \quad (z \rightarrow 0), \\
G_0(e_1, e_0)(1-z) &\approx (1-z)^{e_1} \quad (z \rightarrow 1), \\
G_0(e_1, e_\infty)\left(1-\frac{1}{z}\right) &\approx \left(1-\frac{1}{z}\right)^{e_1} \quad (z \rightarrow 1), \\
G_0(e_\infty, e_1)\left(\frac{1}{z}\right) &\approx \left(\frac{1}{z}\right)^{e_\infty} \quad (z \rightarrow \infty), \\
G_0(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right) &\approx \left(\frac{1}{1-z}\right)^{e_\infty} \quad (z \rightarrow \infty), \\
G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right) &\approx \left(\frac{z}{z-1}\right)^{e_0} \quad (z \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

これら解の間に以下の五つの関係式が成り立つ。

$$G_0(e_0, e_1)(z) \exp(\pi i e_0) = G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right), \quad (4.7)$$

$$G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right) \Phi_{KZ}(e_\infty, e_0) = G_0(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad (4.8)$$

$$G_0(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right) \exp(\pi i e_\infty) = G_0(e_\infty, e_1)\left(\frac{1}{z}\right), \quad (4.9)$$

$$G_0(e_\infty, e_1)\left(\frac{1}{z}\right) \Phi_{KZ}(e_1, e_\infty) = G_0(e_1, e_\infty)\left(1-\frac{1}{z}\right), \quad (4.10)$$

$$G_0(e_1, e_\infty)\left(1-\frac{1}{z}\right) \exp(\pi i e_1) = G_0(e_1, e_0)(1-z). \quad (4.11)$$

これらの式から

$$\begin{aligned}
&G_0(e_0, e_1)(z) \exp(\pi i e_0) \Phi_{KZ}(e_\infty, e_0) \exp(\pi i e_\infty) \Phi(e_1, e_\infty) \exp(\pi i e_1) \\
&= G_0(e_1, e_0)(1-z).
\end{aligned}$$

よって、Proposition 3.5 を用いることにより次の式が得られる。

$$\exp(\pi i e_0) \Phi_{KZ}(e_\infty, e_0) \exp(\pi i e_\infty) \Phi_{KZ}(e_1, e_\infty) \exp(\pi i e_1) \Phi_{KZ}(e_0, e_1) = 1.$$

したがって、関係式 (4.7), ..., (4.11) を導けばよい。まず (4.9) を証明する。漸近挙動により以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
G_0(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right) \exp(\pi i e_\infty) &\approx \left(\frac{1}{1-z}\right)^{e_\infty} \exp(\pi i e_\infty) \quad (z \rightarrow \infty) \\
&= \exp\left(e_\infty \left(\log \frac{1}{1-z} + \pi i\right)\right) \\
&= \exp\left(e_\infty \log \frac{1}{z-1}\right) \\
&\approx \exp\left(e_\infty \log \frac{1}{z}\right) \quad (z \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

ゆえに, 基本解の一意性から (4.9) が得られ, (4.7), (4.11) も同様に示される. 次に (4.8) の証明に移る.  $G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right)$  に対して Proposition 3.5 を用いることで次の式を得る.

$$G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0) = G_1(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)$$

よって, 右辺において  $\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)$  の定義を用いることで (4.8) が示される. (4.10) も同様に示されるため, 以上より (4.7), ..., (4.11) が成り立つので, (4.4) が示された.

5-サイクル関係式 (4.5) についての証明は省略する. 興味のある人は [4] のほか [1], [5], [13] などの文献も参照されたい.  $\square$

*Remark 4.3.* KZ 結合子における結合子関係式から以下の多重ゼータ値の関係式が従う. 上から二番目の関係については証明が気になる人は [10] の Lemma 2.2. を参照されたい.

(4.2) と  $\Phi_{KZ}(0, 0) = 1 \iff$  シャッフフル関係式

(4.2) と (4.3)  $\implies$  双対関係式

(4.2) と (4.5)  $\implies$  (4.3) と (4.4)  
[8]

結合子関係式  $\implies$  一般複シャッフフル関係式  
[9]

一方で, Euler の公式が従うことも知られている.

**Proposition 4.4** ([2]). KZ 結合子における (4.2), (4.3), (4.4) から

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^{2n}}{2n!} B_{2n}$$

が導かれる. (但し,  $B_{2n}$  は Bernoulli 数,  $n \geq 1$  とする.)

## 5 補足資料

この章では, 基本解  $G_0(z)$  及び  $\Phi_{KZ}$  の明示公式について大まかな証明を述べる. 注意すべきこととして, [7, 11] を参考としているため多重ゼータ値と語の指数対応が §2.2 と逆になっているが, §2.2 の対応についても同様の手法により証明される.

## 5.1 基本解の明示公式

$G_0(z)$  の明示公式を紹介するために, 新しい記号と言葉を定義する.

**Notation 5.1.**  $w \in \{e_0, e_1\}^\times \cdot e_1$  を  $p_i \geq 0, q_i \geq 1$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) に対し

$$w = e_0^{p_0} e_1^{q_0} e_0^{p_1} e_1^{q_1} \cdots e_0^{p_n} e_1^{q_n}$$

と表したとき,  $w$  の重さ (weight) を

$$\text{wt}(w) := p_0 + q_0 + \cdots + p_n + q_n,$$

$w$  の深さ (depth) を

$$\text{dep}(w) := q_0 + q_1 + \cdots + q_n$$

と定義する.

**Notation 5.2.**

$$M' := \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \cdot e_1$$

とおいたときに次の自然な射影を  $f'$  とする.

$$f' : \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle / \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \cdot e_0 \simeq \mathbb{C} \cdot 1 + M'$$

また,  $z \in \mathbb{C}'$  とし,

$$\begin{aligned} M' \ni w &= e_0^{k_m-1} e_1 e_0^{k_m-1-1} e_1 \cdots e_0^{k_1-1} e_1 \\ &(m \geq 1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_m \geq 1) \end{aligned}$$

及び空語 1 に対して, 次の  $\mathbb{C}$ -線形写像を定義する.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} Li(z) : M' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto Li_w(z) := Li_{(k_1, k_2, \dots, k_m)}(z) \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>多重ポリログ  $Li_{(k_1, \dots, k_m)}(z)$  は  $|z| < 1$  で絶対収束する級数で定義され,  $\mathbb{C}'$  に解析接続される. また,  $k_m \geq 2$  ならば  $z \rightarrow 1$  で  $\zeta(k_1, \dots, k_m)$  に収束する. [12, §1.1], [14, §3] を参照.

**Notation 5.3.**  $\alpha$  を新たな変数とおき,  $g'_1$  を次の  $\mathbb{C}$ -代数準同型とする.

$$\begin{aligned} g'_1 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes} \mathbb{C}[\alpha] \\ e_0 &\longmapsto e_0 - \alpha \\ e_1 &\longmapsto e_1 \end{aligned}$$

さらに  $w \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  を語としたとき,  $g'_2$  を次の  $\mathbb{C}$ -線形写像とする.

$$\begin{aligned} g'_2 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes} \mathbb{C}[\alpha] &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \\ w \otimes \alpha^p &\longmapsto we_0^p \end{aligned}$$

これらを用いて, 明示公式の定理が記される.

**Theorem 5.4** ( $G_0(z)$  の明示公式 [7]).  $G_0(z) = G_0(e_0, e_1)(z)$  を KZ 方程式の基本解とすると, 次のように表される.

$$G_0(e_0, e_1)(z) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J(w)(z)w \quad (5.1)$$

但し,  $J(w)(z)$  は以下の場合分けに応じて表される.

(1)  $w \in M'$  のとき,

$$J(w)(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z).$$

(2)  $w = ve_0^r$  ( $r \geq 1, v \in M'$ ) のとき,

$$J(w)(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq s, t \\ s+t=r}} (-1)^s Li_{f'(v \sqcup e_0^s)}(z) \frac{\{\log(z)\}^t}{t!}.$$

(3)  $w = e_0^r$  ( $r \geq 0$ ) のとき,

$$J(w)(z) = \frac{\{\log(z)\}^r}{r!}.$$

*Proof.* まず (1) を示す. KZ 方程式より,

$$\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \left( \frac{d}{dz} J(w)(z) \right) w = \left( \frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) \left( \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J(w)(z)w \right)$$

となる.  $w = e_0 w'$  ( $w \in M'$ ) とする. 上式において

$$\frac{d}{dz} J(e_0 w')(z) e_0 w' \quad \text{と} \quad \frac{e_0}{z} J(w')(z) w'$$

の係数を比較することで,

$$\frac{d}{dz} J(e_0 w')(z) = \frac{1}{z} J(w')(z) \quad (5.2)$$

を得る.  $w = e_1 w'$  のときも同様に,

$$\frac{d}{dz} J(e_1 w')(z) = \frac{1}{z-1} J(w')(z) \quad (5.3)$$

を得る.  $(-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z)$  ( $w \in M'$ ) らは多重ポリログの微分関係式より, 微分方程式 (5.2), (5.3) を満たす. よって  $w \in M'$  に対して

$$(-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z) = J(w)(z).$$

(2), (3) の証明に移る. 次の  $\mathbb{Q}$  双線形写像を定める.

$$\langle \rangle: \mathbb{Q} \langle e_0, e_1 \rangle \times \mathbb{Q} \langle e_0, e_1 \rangle \longrightarrow \mathbb{Q} \langle e_0, e_1 \rangle$$

但し, 各語  $w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times$  に対し,

$$\langle w_1, w_2 \rangle := \begin{cases} 1 & \text{if } w_1 = w_2, \\ 0 & \text{if } w_1 \neq w_2. \end{cases}$$

ここで,

$$\langle g'_2 \circ g'_1(w_1), w_2 e_0^r \rangle = \langle w_1, (-1)^r f'(w_2 \sqcup e_0^r) \rangle \quad (5.4)$$

が成り立つ. 実際,  $w_1 \notin M'$  の場合は明らかである.  $w_1 \in M'$  の場合も,  $\langle w_1, (-1)^r f'(w_2 \sqcup e_0^r) \rangle = (-1)^r n$  であったとすると  $w_2 \sqcup e_0^r$  は項として  $nw_1$  をもつ. 則ち,  $w_1$  から  $e_0$  を  $r$  個除いて  $w_2$  を得る方法は  $n$  通りある. 一方で,  $w_1 = e_0^{s_1} e_1 \cdots e_0^{s_m} e_1$  と表せたとして

$$g'_1(w_1) = (e_0 - \alpha)^{s_1} e_1 \cdots (e_0 - \alpha)^{s_m} e_1$$

となり,  $g'_1(w_1)$  において  $(-1)^r w_2 \otimes \alpha^r$  が  $n$  個含まれる. 則ち  $g'_2 \circ g'_1(w_1)$  は  $(-1)^r w_2 e_0^r$  を  $n$  個含む. よって,

$$\langle g'_2 \circ g'_1(w_1), w_2 e_0^r \rangle = (-1)^r n = \langle w_1, (-1)^r f'(w_2 \sqcup e_0^r) \rangle$$

を得る. 次に  $g'_2 \circ g'_1(f'(G_0(z)))$  を,

$$g'_2 \circ g'_1(f'(G_0(z))) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J'(w)(z)w \quad (5.5)$$

と展開し, 上式において  $J'(w)(z)$  は以下で表されることを示す.

$$J'(w)(z) = \begin{cases} (-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z) & \text{if } w \in M', \\ (-1)^{\text{dep}(w)+r} Li_{f'(w' \sqcup e_0^r)}(z) & \text{if } w = w'e_0^r \ (w' \in M'), \\ 0 & \text{if } w = e_0^r \ (r \geq 1). \end{cases} \quad (5.6)$$

(1) より,  $w \in M'$  に対して  $J(w)(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z)$ . よって,  $f'(G_0(z)) = \sum_{w \in M'} (-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z)w$  なので,

$$g'_2 \circ g'_1(f'(G_0(z))) = \sum_{w \in M', \text{ 語}} (-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z) + \sum_{w \notin M', \text{ 語}} (\text{other terms}).$$

ゆえに,  $w \in M'$  に対して

$$J'(w)(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} Li_w(z).$$

よって (5.6) が示された. 一方で,  $f'(G_0(z))$  の各項は  $M'$  に属しているので,  $g'_2 \circ g'_1(f'(G_0(z)))$  は  $\mathbb{C} \cdot e_0^r$  に属する項をもたない. したがって  $w = e_0^r \ (r \geq 1)$  に対し,

$$J'(w)(z) = 0.$$

よって (5.8) が示された. 次に (5.7) を示す. まず [7, Lemma 3.20] より

$$G_0(z) = \left( \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J'(w)(z)w \right) \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n \right) \quad (5.9)$$

が得られる. (5.1) と (5.5) により

$$J'(w'e_0^r)(z) = \sum_{w_i \in M', \text{ 語}} \langle g'_2 \circ g'_1(f'(w_i)), w'e_0^r \rangle J(w_i)(z)$$

を得る. よって, (5.4) および Thm 5.4 (1) より,

$$\begin{aligned} J'(w'e_0^r)(z) &= \sum_{w_i \in M', \text{ 語}} \langle g'_2 \circ g'_1(f'(w_i)), w'e_0^r \rangle J(w_i)(z) \\ &= (-1)^r \sum_{w_i \in M', \text{ 語}} \langle w_i, f'(w' \sqcup e_0^r) \rangle (-1)^{\text{dep}(w_i)} Li_{w_i}(z) \\ &= (-1)^{\text{dep}(w')+r} Li_{f'(w' \sqcup e_0^r)}(z). \end{aligned}$$

したがって (5.7) が成り立つ. 以上より, (5.5) が示された. よって  $w = w'e_0^r$  ( $r \geq 1, w' \in M'$ ) に対して (5.1) と (5.9) で係数比較を行うと次を得る.

$$J(w)(z) = J(w'e_0^r)(z) = \sum_{\substack{s+t=r \\ s,t \geq 0}} J'(w'e_0^s)(z) \frac{(\log z)^t}{t!}.$$

あとは (5.7) を用いることで明示公式の (2) が示される. さらに,  $w = e_0^r$  ( $r \geq 1$ ) に対して (5.1) と (5.9) で係数比較を行うと

$$J(e_0^r)(z) = \sum_{\substack{s+t=r \\ s,t \geq 0}} J'(e_0^s)(z) \frac{(\log z)^t}{t!}$$

を得る. あとは (5.8) により明示公式の (3) が示される.  $\square$

**Example 5.5.**  $G_0(z)$  の低次の項は次のように表される.

$$\begin{aligned} G_0(e_0, e_1)(z) = & 1 + Li_1(z)e_0 + Li_1(1-z)e_1 + \frac{\{Li_1(z)\}^2}{2}e_0^2 - Li_2(z)e_0e_1 + \\ & + \{Li_2(z) + (\log z) \log(1-z)\}e_1e_0 + \frac{\{\log(1-z)\}^2}{2}e_1^2 + \frac{(\log z)^3}{6}e_0^3 \\ & - Li_3(z)e_0^2e_1 + \{2Li_3(z) + (\log z)Li_2(z)\}e_0e_1e_0 + Li_{1,2}(z)e_0e_1^2 \\ & - \left[ Li_3(z) - (\log z)Li_2(z) - \frac{(\log z)^2 \log(1-z)}{2} \right] e_1e_0^2 + \cdots \end{aligned}$$

Theorem 5.4 を用いて  $G_0(z), G_1(z)$  を実際に構成できることから,  $G_0(z), G_1(z)$  の存在性が示される.

## 5.2 KZ 結合子の明示公式

$\Phi_{KZ}$  に対しても明示公式が存在することがわかっている. 記述するために, いくつかの準備を行う.

**Notation 5.6.**

$$M := e_0 \cdot \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \cdot e_1$$

$M$  に対して次の自然な射影を  $f$  とおく.

$$f : \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle / (e_1 \cdot \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle + \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \cdot e_0) \simeq \mathbb{C} \cdot 1 + M.$$

$$M \ni w = e_0^{k_m-1} e_1 e_0^{k_{m-1}-1} e_1 \cdots e_0^{k_1-1} e_1$$

$$(m \geq 1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_{m-1} \geq 1, k_m \geq 2).$$

及び空語 1 に対して, 次の  $\mathbb{C}$  線形写像を定義する.

$$Z : M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto \zeta(k_1, k_2, \dots, k_m)$$

$$1 \longmapsto 1$$

**Notation 5.7.**  $\alpha, \beta$  を新たな変数とおき, 以下の二つの写像を定義する.

$$g_1 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \widehat{\otimes} \mathbb{C}[[\alpha, \beta]]$$

$$e_0 \longmapsto e_0 - \alpha$$

$$e_1 \longmapsto e_1 - \beta$$

$$g_2 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \widehat{\otimes} \mathbb{C}[[\alpha, \beta]] \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

$$w \otimes \alpha^p \beta^q \longmapsto e_1^q w e_0^p \quad (p, q \geq 0)$$

但し,  $g_1$  は代数射,  $g_2$  は  $\mathbb{C}$  線形写像として定義する.

これらの記号を用いて以下の補題が成り立つ.

**Lemma 5.8.**

$$g_2 \circ g_1 \circ f(\Phi_{KZ}(e_0, e_1)) = \Phi_{KZ}(e_0, e_1)$$

*Proof.* [11] の補題 A.22 をみよ. □

**Lemma 5.9.**

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-B} G_0(e_0, e_1)(1 - \epsilon) = \Phi_{KZ}(e_0, e_1).$$

*Proof.* [11] の補題 A.20 をみよ. □

**Theorem 5.10** ( $\Phi_{KZ}$  の明示公式 [6, 15]).

$$\Phi_{KZ}(e_0, e_1) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} I(w)w$$

但し,  $I(w)$  は次のような場合分けに応じて表される.

- (1)  $w \in M$  のとき,  $I(w) = (-1)^{\text{dep}(w)} Z(w)$ .
- (2)  $w = e_1^r v e_0^s$  ( $r, s \geq 0, v \in M$ ) のとき,  

$$I(w) = (-1)^{\text{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq a \leq r \\ 0 \leq b \leq s}} (-1)^{a+b} Z(f(e_1^a \sqcup e_1^{r-a} v e_0^{s-b} \sqcup e_0^b)).$$
- (3)  $w = e_1^r e_0^s$  ( $r, s \geq 0$ ) のとき,  

$$I(w) = (-1)^{\text{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq a \leq r \\ 0 \leq b \leq s}} (-1)^{a+b} Z(f(e_1^a \sqcup e_1^{r-a} e_0^{s-b} \sqcup e_0^b)).$$

*Proof.* まず (1) の証明を行う. Theorem 5.4 の主張 (1) と Lemma 5.9 を組み合わせることで,  $I(w) = (-1)^{\text{dep}(w)} \zeta(w)$  が示される. (2) および (3) の証明については, Lemma 5.8 を用いることで, Theorem 5.4 の証明と同様にして示される.  $\square$

**Example 5.11.** 上の定理により,  $\Phi_{KZ}$  の低次の項は次のように表せる.

$$\begin{aligned} \Phi_{KZ} = & 1 - \zeta(2)e_0e_1 + \zeta(2)e_1e_0 - \zeta(3)e_0^2e_1 + 2\zeta(3)e_0e_1e_0 + \zeta(1,2)e_0e_1^2 \\ & - \zeta(3)e_1e_0^2 - 2\zeta(1,2)e_1e_0e_1 + \zeta(1,2)e_1^2e_0 - \zeta(4)e_0^3e_1 + \cdots \end{aligned}$$

*Remark 5.12.* これまで,  $G_0(z)$  の明示公式と  $\Phi_{KZ}$  の明示公式を紹介した. これらの公式と, Proposition 3.5 から得られる式  $G_0(e_1, e_0)(1-z)\Phi_{KZ}(z) = G_0(e_0, e_1)(z)$  により多重ポリログの関数等式が得られる. 例えば次が成り立つ.

$$\begin{aligned} Li_2(1-z) &= Li_2(z) - \log(z) \log(1-z) + \zeta(2), \\ Li_3(1-z) &= -Li_{1,2}(z) + \log(1-z) Li_2(1-z) \\ &\quad + \frac{\{\log(1-z)\}^2 \log(z)}{2} + \zeta(1,2). \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [2] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois groups over  $\mathbb{Q}$  : proceedings of a workshop held March 23-27, 1987, editor Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre. Springer-Verlag, New York, 1989 79–297.

- [3] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analiz, **1** (1989) 114–148. English translation: Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457.
- [4] V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. **2** (1991) 829–860.
- [5] P. Etingof, O. Schiffmann, *Lectures on Quantum Groups*, International Press of Boston, 1998.
- [6] H. Furusho, *The Multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. vol **39**. no 4. (2003). 695–720.
- [7] H. Furusho,  *$p$ -adic multiple zeta values I.  $p$ -adic multiple polylogarithms and the  $p$ -adic KZ equation*, Invent. math. **155**, (2004) 253–286.
- [8] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Mathematics, Vol. 171 (2010), No. 1, 545–556.
- [9] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Annals of Mathematics, Vol. 174 (2011), No. 1, 341–360.
- [10] H. Furusho, *On relations among multiple zeta values obtained in knot theory*, preprint, arXiv:1501.06638, to appear in “Teichmüller theory and its impact”.
- [11] 古庄英和, 結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 MI lecture note series Vol **68** (2016).
- [12] 原隆, 「実/複素ゼータの世界」から「 $p$ 進多重ゼータの世界」へ, 本報告集 (2018).
- [13] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, 1995.
- [14] 川崎菜穂, Yamamoto 積分表示と積分級数等式, 本報告集 (2018).
- [15] T. T. Q. Le, J. Murakami, *Kontsevich’s integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996) 39–65.

# 「実 / 複素ゼータの世界」から「 $p$ 進ゼータの世界」へ\*

東京電機大学未来科学部<sup>†</sup> 原 隆<sup>‡</sup>

## 概要

多重ゼータ値および [多重] ゼータ関数の  $p$  進理論について概説する. 前半部では古庄英和によって導入された KZ 型  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の構成を概観し, その性質や  $p$  進 KZ 方程式との関係について論ずる. また,  $p$  進ドリinfeld 結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p$  とドリinfeld 結合子  $\Phi_{\text{De}}^p$  との関係, および (KZ 型)  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  とドリinfeld の  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  との関係について考察する. 後半では, 古典的な久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  のコブリッツ  $p$  進測度を用いた構成および,  $L_p(s, \omega^a)$  の正の整数点での特殊値と (KZ 型の)  $p$  進ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(k)$  との関係を記述するコールマンの公式の証明を概観した上で, それらの多重化に関する古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文による最近の共同研究の成果と今後の課題を展望する.

本稿は, 第 26 回整数論サマースクール『多重ゼータ値』に於ける著者の同名講演の報告書であり, 多重ゼータ値および [多重] ゼータ関数の  $p$  進理論  $p$ -adic theory の概要をまとめる目的で執筆されたものです. レオンハルト・オイラー Leonhard EULER によって最初に考察された“奇妙な”多重級数 (今日の多重ゼータ値 multiple zeta values) が, 後年になって豊かな構造を持つ非常に興味深い研究対象であると再発見され, 現在も (山本積分などの) 新たな発見とともに実に多様な進化を遂げ続けていることは, 既に本報告集の金子昌信<sup>すで</sup>先生<sup>かねこ まさのぶ</sup>の記事 [金子 SS18] や川崎菜穂<sup>かわさき なほ</sup>さんの記事 [川崎 SS18] で詳しく解説されていることでしょう. そ

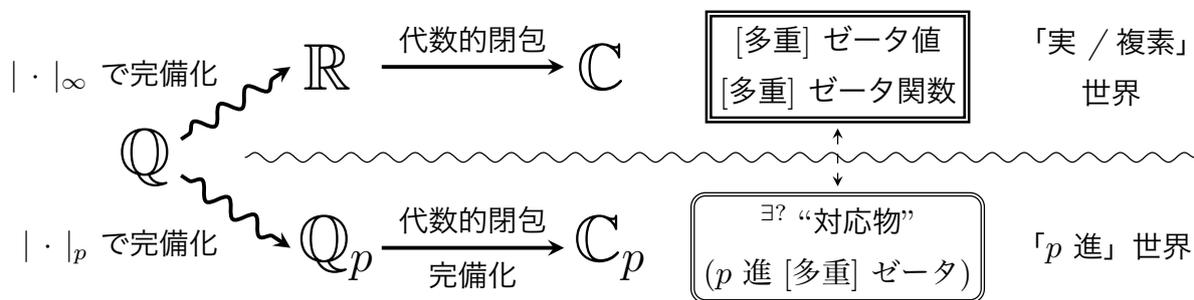


図1 「実 / 複素」の世界と「 $p$  進」世界

\* 第 26 回整数論サマースクール『多重ゼータ値』報告集原稿

<sup>†</sup> 〒120-8551 東京都足立区千住旭街 5 番

<sup>‡</sup> E メールアドレス: t-hara@mail.dendai.ac.jp

んな魅力的な多重ゼータ値の理論 (およびその土台を形成する級数の理論 / 反復積分の理論) は、有理数体  $\mathbb{Q}$  の (ユークリッド距離  $|\cdot|_\infty$  による) 完備化である 実数体  $\mathbb{R}$  や、その代数的閉包である 複素数体  $\mathbb{C}$  を舞台として展開されてきました。一方で、クルト・ヘンゼル Kurt HENSEL によって発見された  $p$  進数体  $\mathbb{Q}_p$  (およびその代数的閉包の完備化  $\mathbb{C}_p$ ) は、有理数体  $\mathbb{Q}$  を  $p$  進距離  $|\cdot|_p$  と呼ばれる  $|\cdot|_\infty$  とは異なる距離関数で完備化したものであり、その意味では実数体  $\mathbb{R}$  の“双子の兄弟”のような存在であると言えます (図 1 を参照)。  $p$  進数体の発見がその後の整数論の発展に与えた多大なる影響を考えると、「実 / 複素」世界  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  で展開されてきた多重ゼータ値の理論を、その“兄弟”たる「 $p$  進」世界  $\mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p$  で構築することは、誰がどう考えたってとても面白くて魅力的な課題に違いありません。しかし、少し考察を重ねると「 $p$  進」世界で“ゼータ”を考えることが見かけ以上に難しいことに直ぐに気付かされるでしょう; 「実 / 複素」世界では“ゼータ”の「定義」に他ならなかった [多重] ディリクレ級数 [multiple] DIRICHLET series が、「 $p$  進」世界ではまったく収束してくれないのですから (命題 1.1 を参照)。したがって、「 $p$  進」世界で [多重] ゼータ値 / 関数の理論を展開するためには 発想を抜本的に転換し、抑々のスタート地点であったディリクレ級数表示を一旦捨て去る 必要に迫られるのです。本稿では、最初に「 $p$  進」世界で“ゼータ”を考えるのが何故難しいのか という根本的な問題の背景を確認した上で、「 $p$  進」世界ならではの様々な困難を乗り越えるための画期的なアイデアに焦点を当てながら「 $p$  進ゼータの世界」を概観していきます。近年 [Zha16] や [GF] など、多重ゼータ値の理論の包括的な解説書が幾つも執筆されており、多重ゼータ値の注目度の高さが窺い知れますが、これらの解説書でも  $p$  進多重ゼータ値は扱われておりません。総説的な文献があまり多くないことや「実 / 複素」世界での多重ゼータ値の理論と様相が大分異なることも手伝って、残念ながら現在でも  $p$  進多重ゼータ値 / 関数は「敷居が高い」と感じられる方が少なくないようです。本稿を通じて「 $p$  進ゼータの世界」への心理的障壁を取り除き、その魅力溢れる世界を気軽に探索するためのお手伝いが出来れば何よりです。

本稿は以下のように構成されています。第 1 節では、ふるしようひでかず 古庄 英和さんによる  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の“定義”について、その画期的なアイデアにスポットを当てて紹介します。「 $p$  進」世界では [多重] ディリクレ級数が“全然収束してくれない”ことを第 1.0 節で観察した後、第 1.1 節で多重ゼータ値の古典理論 (「実 / 複素」世界での理論) を多重ポリログ関数 *multiple polylogarithm* の観点から復習し、それと対比させる形で第 1.2 節で KZ 型  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  を“定義”ただします。但し、この段階では「この“定義”がちゃんと機能しているのか?」「 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  は“多重ゼータ値”と呼ぶふさわに相応しい性質を備えているのか?」と言った、当然湧き上がる疑問に完全には答えることは出来ません。そこで第 2 節では、先ず第 2.1 節で「実 / 複素」の世界でも重要な役割を演じた KZ 方程式 KZ equation および ドリinfeld 結合子 DRINFELD associator の「 $p$  進版」 $\Phi_{\text{KZ}}^p$  を導入し、(背景にあるコールマン積分論の詳細には

目を瞑ることにすれば)「実 / 複素」の世界での理論と完全に並行した形式的な議論によって  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の様々な性質が導き出されることを概観します。その後続く第 2.2 節では、ドリーニュにより導入されたドリーニュ結合子 DELIGNE associator  $\Phi_{\text{De}}^p$  およびドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  を、 $\Phi_{\text{KZ}}^p$  を用いてやや“天下り”的な方法で導入します。本稿の説明では  $\Phi_{\text{De}}^p$  や  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  のような対象を考察する動機が全く分からないと思いますし、本稿ではこの節以降でドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値を本格的に扱う機会はないのですが、本稿に続く安田正太さんの記事 [安田 SS18b] や関真一郎さんの記事 [関 SS18] を読めば、実際に  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  が八面六臂の大活躍を演じる場面に遭遇出来るかと思えます。第 2.3 節では、 $p$  進多重ゼータ値に関して知られている結果や予想などをまとめました。取り急ぎ  $p$  進多重ゼータ値の理論の概要と現状を把握したいという目的で本稿を読まれるのであれば、第 2 節まで目を通していただくことで或る程度目的は達せられるかと思えます。

第 3 節では、サマースクールの講演でまったく紹介する時間がなかった  $p$  進 [多重]  $L$  関数  $p$ -adic [multiple]  $L$ -function について論じています。 $p$  進 [多重] ゼータ関数の世界も、 $p$  進 [多重] ゼータ値の世界に負けず劣らず非常に魅力的な世界で、第 1 節や第 2 節で紹介されたものとはまた異なる手法やアイデアに基づいて構築されています。第 3.0 節では「 $p$  進」世界で「 $p$  進 [多重] ゼータ 関数」をどう“定義”するか (或いは特徴付けるか) について簡単に論じ、第 3.1 節で  $p$  進測度論の基礎的な内容を駆け足で振り返った後、第 3.2 節では論文 [FKMT17b] の原型と言うべき 1 変数の  $p$  進  $L$  関数に纏わる理論 (コブリッツの  $p$  進測度とコールマンの公式) を若干詳しく解説します。第 3.3 節では論文 [FKMT17b] の主要な結果を簡単に紹介します。多重化された理論であるため [FKMT17b] の主結果はどれも非常に複雑な形をしていますが、その殆どが第 3.2 節の内容を直接“多変数化”したものとなっているので、第 3.3 節では「どのような計算をすれば良いか」を解説するに留め、[FKMT17b] で展開される激しい計算の詳細には踏み込まないことにしました。ちなみに、多重ゼータ値のサマースクールであるにも拘らず、本稿 (および講演) のタイトルには「多重ゼータ 値」ではなく「ゼータの世界」という漠然とした表現が用いられていますが、そこには実は「 $p$  進多重ゼータ 値」の話だけではなく、どうしても  $p$  進 [多重] ゼータ 関数の話にも触れたい!! という著者の強い意向が反映されています。それどころか、著者にとっては第 3 節の内容こそが“メイン・ディッシュ”であり、前半 (第 1,2 節) で展開された  $p$  進 [多重] ゼータ値の理論と後半 (第 3 節) で展開される  $p$  進 [多重]  $L$  関数の理論が結びつく コールマンの公式 (定理 3.24, 定理 3.41) を紹介することこそが、著者の“秘められた最終到達目標”であると言っても過言ではなかったのですが、時間の関係で講演では (後ろ髪を引かれつつも) 第 3 節の内容ごと削除せざるを得ませんでした。抑々講演の際に一切話さなかった内容を報告集に書くのは如何なものか、とは著者自身も思いますが、著者の主たる研究分野である 岩澤理論 IWASAWA theory の観点からすると、多重ゼータ関数の“負の整数点”での値を補間する“ $p$  進関数”が (まだ改良の余地は

あるものの) 構成されたということは極めて革新的な出来事であり、まだその実像が全く明らかになっていない“多重ゼータの岩澤理論的研究”へ向けた非常に大きな一歩であると思われるため、敢えて紙面を割いて紹介させていただこうと決意した次第です\*1。末尾の付録 A では  $p$  進解析のごく基礎的な事項について、特に本稿を読む際に慣れておいた方が良いでしょうと思われることを中心に簡単に纏めました。図 1 から見ても取れるように、「 $p$  進」世界 (“ $\mathbb{Q}_p$  や  $\mathbb{C}_p$  の世界”) は「実 / 複素」世界 (“ $\mathbb{R}$  や  $\mathbb{C}$  の世界”) と瓜二つな経緯で構成される世界ですから、其処では勿論「実 / 複素」世界と似た現象も多数観察されますが (特に 複素関数論 との類似性)、我々が「実 / 複素」世界で培ってきた直観を 大きく裏切る現象 も負けず劣らず大量に発生します (勿論 位相の違い に起因するものです)。特に「 $p$  進」世界にあまり馴染みのない方は、本稿を読み進めていく中で斯様な“直観を裏切る現象”に戸惑いや苦手意識を感じられてしまうかもしれませんので、必要に応じて適宜参照していただければ幸いです。

執筆当初の目論見としては、上記の項目に加えて

- ★ コールマン積分論についての概説
- ★ [ $p$  進] 多重ゼータ値の理論の“淡中解釈”についての概説
- ★ 久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の原論文 [KL64] での構成法についての概説

も付録として加筆する計画だったのですが、本論の分量が予想外に膨大になってしまったこと、原稿の締切との折合いがつかなかったことなどの諸事情が重なったため、これらについては断腸の思いで割愛せざるをえませんでした (偏に著者の計画性のなさが原因です)。特にコールマン積分論については、原論文 [Col82] が (誤植が大量にあることも含めて) 非常に読みにくく、それでいて原論文の構成に沿った解説記事もあまり見当たらないという現状を鑑みて、この絶好の機会に是非“気軽に読める”概説記事を書きたいと意気込んでいたのですが、実現することが出来ず大変遺憾です。これらの項目について、また別の機会に他の場所で書かせていただくか、このまま書き進めて“増補版”をウェブページなどで公開する形にするかはまだ決め兼ねておりますが、近いうちに形に出来たら、と考えております。

本稿は報告集の解説記事と言うことで、伝統的な「定義」「命題」「証明」の様式に則って執筆していますが、この様式ではどうしても分量が多くなってしまいうため、何処に何が書かれているか分かりにくくなってしまいうという欠点があります。一方で、サマースクールでの講演のレジュメでは、参加者が講演を聴きながら参照されることを見越して、理論の流れや要点が分かり易いようレイアウト等を工夫しました。完全に手前味噌ではございますが、かなり簡潔かつ見易いものに仕上がったと思いますので、理論の全体像を俯瞰されたい方は、例えば「最

---

\*1 サマースクールの講演で話さなかった内容を報告集に執筆することを快く許可して下さったのみならず、記事のページ数に制限を設けることなく自由に執筆させて下さったオーガナイザーの皆様に御礼申し上げます (それにしても書き過ぎて、編集作業に支障をきたしてしまったことをこの場を借りてお詫び申し上げます)。

初にレジюмеを眺めてみた上で、必要に応じて本稿で細部を確認する」などと言った、各々におのおの合った形で本報告書とレジюмеを巧く活用していただければと存じます\*2。また、技術的な点へのコメントや補足事項を「注意」として、本論からは外れるものの興味深い関連事項を「雑談」としてまとめました(但し、両者の境界はあまり厳密ではありません)。予想外に「注意」「雑談」の数が増えてしまったため、最初に目を通される際には「注意」「雑談」は一旦保留として読み進めた方が良くもありません。或いは逆に「注意」「雑談」を拾い読みしていくのも、本論とはまたひと味違った数学の世界をお楽しみいただける“通の読み方”としてお勧めです。

■ 全体的な記号の約束 本稿では  $\mathbb{N}$  は 1 以上の整数 (自然数) 全体の集合を表すものとし、0 以上の整数 全体の集合を表す際は記号  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  を用いることとします。また、 $\mathbb{C}_p$  の  $p$  進付値は  $|p|_p = \frac{1}{p}$  と正規化されたものを考えています。多重ゼータ値の理論で標準的に用いられる以下の記号や用語は本稿でも断り無く用います;

★ 指数 *index*  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$

およびその重さ *weight*  $\text{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ , 深さ *depth*  $\text{dep}(\mathbf{k}) = r$

★ 指数  $\mathbf{k}$  が許容的 *admissible*  $\Leftrightarrow k_r > 1$

また、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  や  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$  の部分集合として

★ 中心  $a$ , 半径  $r$  の“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r) := \{z \mid |z - a|_* < r\}$

★ 中心  $a$ , 半径  $r$  の“閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r) := \{z \mid |z - a|_* \leq r\}$

の記号も特に断りなく用います (\* は  $\infty$  か  $p$  を表すものとしします)。

■ 謝辞 多重ゼータ値に関しては門外漢であるにも拘らず、斯様な大舞台で講演する機会をいただき誠に光栄です。世話人の田坂浩二さん、佐久川憲児さん、三柴善範さんに篤く御礼申し上げます。また、サマースクールの世話人・講演者の皆様と名古屋大学の古庄英和さん、東京電機大学(当時)の並川健一さんには、私の拙い講演練習にお付き合いただき、講演内容の向上に向けた数々の有益な指摘をしていただきました。特に佐久川憲児さん、関真一朗さん、安田正大さん、山本修司さんからは、技術的な点や最新の研究成果について鋭い質問・コメントを数多戴き、著者自身大変勉強になりました。その多くが講演、レジюме並びに本稿に反映されていると思います。報告集の記事の執筆の際には、三柴善範さん(第1, 2節)、佐久川憲児さん(第3節)、小野雅隆さん(全体)に原稿をチェックしていただいた上で、数学的な瑕疵からタイプミス等の誤植に至るまで様々なコメントをいただきました。お陰で本稿が読むに耐えない初稿の段階からかなり読み易いものに改善されたことに疑いの余地はありません。最後に、非常に盛況で素晴らしい集会となった本年度のサマースクールに、講演者の1人として参加することが出来て最高に幸せでした。本当にありがとうございました。

\*2 レジюмеは [http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/ss2018/Hara\\_resume.pdf](http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/ss2018/Hara_resume.pdf) より入手出来ます。

但し、若干誤植や数学的不備が残っているため、正確な内容は本稿を参照していただけると幸いです。

## 目次

<b>§1</b>	<b><math>p</math> 進多重ポリログ関数から <math>p</math> 進多重ゼータ値へ</b>	<b>6</b>
§1.0	序奏: 「 $p$ 進」世界の“ゼータ”は何故“難しくて分かりづらい”の?? . . . . .	7
§1.1	「実 / 複素」世界での理論を振り返って . . . . .	9
§1.2	「 $p$ 進」世界での理論 — 古庄英和の $p$ 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ . . . . .	15
<b>§2</b>	<b><math>p</math> 進結合子と知られている結果・予想など</b>	<b>33</b>
§2.1	$p$ 進 KZ 方程式と $p$ 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ . . . . .	33
§2.2	ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ とドリinfeld の $p$ 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ . . . . .	42
§2.3	知られている結果と予想 . . . . .	45
<b>§3</b>	<b><math>p</math> 進 [多重] <math>L</math> 関数とコールマン型の公式</b>	<b>53</b>
§3.0	「 $p$ 進」世界で“ゼータ関数”をどう“定義”するか? . . . . .	53
§3.1	記号等の準備: $p$ 進測度論速習コース . . . . .	58
§3.2	1 変数の場合 — 久保田-レオポルトの $p$ 進 $L$ 関数とコールマンの公式 . . . . .	60
§3.3	多変数の場合 — 古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文の理論 . . . . .	79
<b>付録 A</b>	<b><math>p</math> 進解析に関する補遺</b>	<b>88</b>
§A.1	超距離空間の位相的特徴 . . . . .	88
§A.2	$X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の関数について . . . . .	91

### §1 $p$ 進多重ポリログ関数から $p$ 進多重ゼータ値へ

本節では, 「 $p$  進」世界で“ゼータ”を考えることが何故“難しい”のかを第 1.0 節で確認した後, 古庄英和さんによる (KZ 型の)  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の巧みな定義を紹介します (第 1.2 節). 古庄さんの構成のアイデアは, 「実 / 複素」の世界でも有用な「多重ゼータ値を多重ポリログ関数の特殊値として捉え直す」という観点に基づくものですが, サマースクールのこれまでの講演 (および報告集の記事) では, 多重ゼータ値と多重ポリログ関数の関係についてあまりクローズアップされてこなかったように思われますので, 「実 / 複素」の世界での多重ポリログ関数の理論も第 1.1 節に簡単にまとめました.

なお「 $p$  進」世界 ( $\mathbb{Q}_p$  や  $\mathbb{C}_p$  の世界) にまったく馴染みがないと言う方は, 予め [加藤中井 16] などの文献で「 $p$  進」世界に慣れてきてから本稿に挑まれることをお薦めします. [加藤中井 16] は, ペレリマン数に纏わる「数遊び」に興じているうちに自然と  $p$  進数について学習出来てしまうという大変な秀作で, いちおしの一冊です. また, サマースクールの講演の際にも紹介し

てしまいましたので、著者が雑誌『数学セミナー』2018年10月号に寄稿した一般向けの解説記事 [原 18] も参考文献として挙げておきます。

### §1.0 序奏: 「 $p$ 進」世界の“ゼータ”は何故“難しくて分かりづらい”の??

サマースクールの序盤の講演 (および報告集の記事 [金子 SS18] など) でも紹介されてきたように、「実 / 複素」の世界では指数  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$  に対する 多重ゼータ値 *multiple zeta values*  $\zeta(\mathbf{k})$  は “多重ディリクレ級数” (またはオイラー–ザギエ型多重ゼータ関数)

$$\zeta_{EZ}(s_1, s_2, \dots, s_r) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \quad \dots (EZ)$$

の  $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (k_1, k_2, \dots, k_r)$  での特殊値として定義されます。この特殊値は  $\mathbf{k}$  が許容的 *admissible* であるとき (即ち  $k_r > 1$  であるとき) には収束して、或る実数を定めるのでした (例えば [荒川金子 10, 補題 1.1.2] を参照)。それならば、“ $p$  進多重ゼータ値”  $\zeta_p(\mathbf{k})$  は同様に、「 $p$  進」世界で “多重ディリクレ級数” (EZ) を考えて、その  $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (k_1, k_2, \dots, k_r)$  での “特殊値” として定めてしまえば良さそうな気がします。しかし、このような安直な “定義” には致命的な問題点があります; 「 $p$  進」世界では、どんな指数  $\mathbf{k}$  に対しても級数 (EZ) は決して収束しないのです (!!)

**命題 1.1.** 任意の  $(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  に対して、無限級数  $\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$  は  $\mathbb{C}_p$  では発散する。

**【証明】** 最初に  $a_N^{(r)} := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$  とおくと、考えている無限級数を  $\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} = \sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(r)}$  と表せることに注意しましょう\*3。以下、命題の主張を

指数  $\mathbf{k}$  の深さ  $r = \text{dep}(\mathbf{k})$  に関する帰納法により証明します。先ず  $r = 1$  のときは、任意の自然数  $N$  に対して  $|a_N^{(1)}| = |N^{k_1}|_p^{-1} \geq 1$  となるので、 $\{a_N^{(1)}\}_{N=1}^{\infty}$  は ( $p$  進位相に関して) 0 に収束しません。無限級数  $\sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(1)} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{k_1}}$  が収束するならば  $a_N^{(1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  となるはずですが、以上の議論により  $\sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(1)} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{k_1}}$  が発散することが分かります。続いて  $r > 1$  の

ときは、簡単な計算から  $|a_N^{(r)}|_p = |N^{k_r}|_p^{-1} \cdot \left| \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{(r-1)} \right|_p \geq \left| \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{(r-1)} \right|_p \dots (*)$  となりま

\*3 総和記号の条件を満たす  $(n_1, n_2, \dots, n_{r-1})$  が存在しない場合は  $a_N^{(r)} = 0$  と定義することにします。

すが、帰納仮定より  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(r-1)}$  は収束しません。したがって不等式 (\*) により  $\{a_N^{(r)}\}_{N=1}^{\infty}$  も ( $p$  進位相に関して) 0 に収束しないことが分かるので\*4, 先程と同様の議論により  $\sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(r)}$  が発散することが示されました。□

**注意 1.2.** 命題 1.1 の証明で用いた『無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束するならば数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は 0 に収束する』という性質は、「実 / 複素」の世界でも「 $p$  進」世界でも同様に成り立ちます\*5. 一方で逆の主張『数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が 0 に収束するならば無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束する』が「実 / 複素」の世界でまったく成り立たないことは良く知られていますし、直観的にも明らかでしょう。ところが「 $p$  進」世界ではこの逆の主張も成り立ってしまう\*6ののですから、「 $p$  進」世界に慣れていない人なら驚かれるのも無理はありません。このように「 $p$  進」世界では「実 / 複素」の世界での直観を裏切る現象が<sup>しばしば</sup>屡々起こりますが、その原因を探つてゆくと大抵の場合は  $p$  進付値  $|\cdot|_p$  の極めて特徴的な性質である 強三角不等式 *strong triangle inequality*  $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$  に辿り着くのです (第 A.1 節も参照).

命題 1.1 は「多重ディリクレ級数」(EZ) の特殊値として多重ゼータ値を定義する」という観点に捉われていては「 $p$  進」世界では多重ゼータ値を定義することすら出来ないことを示唆しているのですから、「多重ゼータ値は多重ディリクレ級数の特殊値である」という観点を一旦捨て去るより他にありません。この困難な状況を乗り越えて「 $p$  進」世界で多重ゼータ値を定義するための鍵となるのが、「実 / 複素」の世界でも活躍した 多重ポリログ関数 *multiple polylogarithm* の理論です。次の小節 (第 1.1 節) で「実 / 複素」の世界での多重ポリログ関数の理論について振り返った後、第 1.2 節で  $p$  進多重ポリログ関数を用いた  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{KZ}(\mathbf{k})$  の定義 (古庄英和さんによる) を紹介することにしましょう。

**雑談 1.3.**  $p$  進  $L$  関数の理論に少しでも触れられたことがある方ならば「 $p$  での因子を取り除いていないのが問題なのではないか?」と考えられるかもしれません。確かに  $n_i$  が  $p$  で割り切れる項は  $p$  進付値が非常に大きくなってしまうため、 $p$  進  $L$  関数を考える際には“ $p$  での (オイラー) 因子を取り除く”ことが<sup>しばしば</sup>屡々なされます。しかしながら (EZ) を

$\sum_{\substack{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r \\ p \nmid n_1, \dots, p \nmid n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$  という級数に取り替えたところで<sup>やは</sup>矢張りまったく収束しな

\*4  $\varepsilon$ - $\delta$  論法により簡単に正当化出来ますので、気になった人は確認してみましょう。

\*5 仮定から  $a_N = \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n$  の右辺の各総和が  $N \rightarrow \infty$  で同じ値に収束する、というだけのことです。

\*6 実際  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ならば、強三角不等式を用いて部分和の数列  $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}_{N=1}^{\infty}$  がコーシー列となることが簡単に確認出来ます。強三角不等式の簡単な練習問題ですので、各自確認してみてください。

いことは、命題 1.1 と同様にして確認出来ます。この観察からも、「ディリクレ級数が収束するように少し細工を施す<sup>ほどこ</sup>」という戦略は現実的ではなく、本質的に別の角度からのアプローチが必要であることが窺い知れるのではないのでしょうか。

**雑談 1.4.** 命題 1.1 の証明を眺めていると、 $p$  進付値の定義  $|n|_p = p^{-\text{ord}_p(n)}$  のせいで  $n^{-k_i}$  の付値が大きくなってしまふことが、(EZ) の  $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (k_1, k_2, \dots, k_r)$  での収束を妨げている最大の要因のように感じられます。それならば、逆に (EZ) の負の整数点での値、即ち (EZ) の  $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (-k_1, -k_2, \dots, -k_r)$  での特殊値<sup>ひね</sup>を考えた方が“収束しやすい”のではないのでしょうか——？ 実際に深さが 1 の場合は、「 $\chi$  で捻った冪和の平均」の（「 $p$  進」世界での）極限を考えると一般化関-ベルヌーイ数（つまり“ディリクレ  $L$  関数の負の整数点での特殊値”）に収束することが知られており（ヴィットの極限公式 WITT's limit formula の一般化、[森田 81] の 4 ページも参照してください）、久保田富雄とハインリッヒ-ヴォルフガング・レオポルトはその事実に基づいて今日 久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数 と呼ばれる関数  $L_p(s, \chi)$  を構成したのでした [KL64]。「 $p$  進  $L$  関数」と聞くとどうしても“難しそうな対象”という印象を持たれてしまうようですが、最初はこのような極めて“素朴な”着想から作られていたんですね。

## § 1.1 「実 / 複素」世界での理論を振り返って

それでは「 $p$  進」世界で [多重] ゼータ値を考察するための準備段階として、まずは「実 / 複素」世界での理論の概要を、特に 多重ポリログ関数 に焦点を当てつつ概観してゆきましょう。

### § 1.1.1 多重ポリログ関数と多重ゼータ値

早速ですが 多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  にご登壇<sup>とうだん</sup>いただくことにしましょう；

**定義 1.5** (多重ポリログ関数).  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  及び  $z \in \mathbb{C}$  に対して、冪級数

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \quad \dots (\text{Li})_{\text{Ser}}$$

(の絶対収束域) で定義される複素関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z)$  を (1 変数) 多重ポリログ関数 (one-variable) *multiple polylogarithm* と呼ぶ。

**雑談 1.6.** 深さ  $r$  が 1 のとき (つまり  $\mathbf{k} = (k)$  のとき) に冪級数  $\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$  で定

義される関数が、今日 <sup>こんにち</sup>ポリログ関数 *polylogarithm* と呼ばれている関数です。ポリログ関

数を指して「多重対数関数」と称する文献も存在しますが\*7, “multiple” の訳語も「多重」であることから “multiple polylogarithm” が「多重多重対数関数 (?!)」となってしまうため、仕方なく (かどうかは分かりませんが) “polylog” の方をそのまま片仮名で「ポリログ」と書いてしまうことが多いようです。尚、ポリログ関数はエルンスト・ジャン・フィリップ・フォーク・ド・ジョンキエール Ernest Jean Philippe Fauque DE JONQUIÈRE によって精力的に研究されたことから ド・ジョンキエール関数 DE JONQUIÈRE function と称する文献も見られます。

**雑談 1.7.** 「何故  $z$  の指数として  $n_r$  だけを考えるのか？」と不思議に思われる方もいらっしゃるかもしれません。実際、より一般に

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z_1, z_2, \dots, z_r) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$$

という形の多変数多重ポリログ関数も自然に考えることが出来て、趙 健強 でき ジャオジャンキアン などにより精力的に調べられています (例えば [Zha16, Section 2] を参照)。上記の 1 変数多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  は  $z_1 = z_2 = \dots = z_{r-1} = 1$  で特殊化して得られるもので、多重ゼータ値との関係性を調べる上では (最終的に  $z_r = 1$  に特殊化してしまうので) 1 変数の多重ポリログ関数を考えれば十分なのです。

対数関数のマクローリン展開の公式から  $\text{Li}_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$  となることは容

易に分かります。分母の  $n$  を冪乗  $n^k$  にしたり個数を増やしたりしているので“多重”“ポリ”ログ関数と呼ぶわけですね。その名が示す通り、多重ポリログ関数は対数関数と似た性質を色々と持っていますが、ここでは収束半径に関する次の命題を紹介しましょう。

**命題 1.8.** 多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の収束半径は 1 である。

この命題は 指数  $\mathbf{k}$  が許容的でなくても成り立つ ことに注意して下さい。つまり、 $\mathbf{k}$  が許容的でなくても  $|z|_{\infty} < 1$  ならば  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  は収束します。非常に基本的な命題であるにも拘らず、意外なことに証明について言及している (或いは適切な文献を引用している) 文献があまり見当たりません。とは言え微分積分学の演習問題程度の内容かな、と思って証明は割愛しようと思ったのですが、著者が試してみたところ多重版の証明は案外細かな評価を必要とするため、証明を掲載しておくことにしました (もっとエレガントに証明出来る気もしますが……)。

**【証明】** 先ずは冪級数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の  $z^N$  の係数を  $a_N^{(r)} = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$  と

\*7 例えば WIKIPEDIA のページ <https://ja.wikipedia.org/wiki/多重対数関数> など。

おきましょう\*8. また, 計算の便宜上  $s_N^{(r)} := \sum_{k=1}^N a_k^{(r)}$  と定めます. このとき, 簡単な考察か

ら  $a_N^{(r)} = \frac{s_{N-1}^{(r-1)}}{N^{k_r}}$  となることが分かります. 以下  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}^{(r)}}{a_N^{(r)}} = 1$  が成り立つことを指数

$\mathbf{k}$  の深さ  $r$  に関する帰納法 いわれる によって示しましょう (このとき, 所謂 ダランベールの判定法 D'ALEMBERT criterion べき によって 冪級数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の収束半径が 1 となることが従います). 先  
ず  $r = 1$  のときは  $\frac{a_{N+1}^{(1)}}{a_N^{(1)}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k_1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$  が直接確認出来ます. 次に  $r > 1$  のとき  
は, 先程の注意から

$$\frac{a_{N+1}^{(r)}}{a_N^{(r)}} = \frac{(N+1)^{-k_r} s_N^{(r-1)}}{N^{-k_r} s_{N-1}^{(r-1)}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k_r} \frac{s_{N-1}^{(r-1)} + a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k_r} \left(1 + \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}}\right)$$

が成り立つので,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}^{(r)}}{a_N^{(r)}} = 1$  が成り立つことは  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} = 0$  が成り立つことと同

値であることが分かります. 此処で帰納仮定  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N-1}^{(r-1)}}{a_N^{(r-1)}} = 1$  を具体的に書き下しますと

(計算の都合上分母と分子を入れ替えた形にしています), 十分に小さい 任意の 正の実数  $\varepsilon$  に  
対して自然数  $N_0$  が存在し,  $N > N_0$  なるすべての自然数に対して  $\left| \frac{a_{N-1}^{(r-1)}}{a_N^{(r-1)}} - 1 \right| < \varepsilon$  が成り

立つことになりますので, 式変形をして  $a_{N-1}^{(r-1)} > (1 - \varepsilon)a_N^{(r-1)}$  という不等式を得ます. こ

の不等式を用いて  $\frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}}$  を

$$\begin{aligned} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} &= \frac{a_N^{(r-1)}}{a_1^{(r-1)} + \dots + a_{N_0-1}^{(r-1)} + a_{N_0}^{(r-1)} + \dots + a_{N-2}^{(r-1)} + a_{N-1}^{(r-1)}} \\ &< \frac{a_N^{(r-1)}}{a_1^{(r-1)} + \dots + a_{N_0-1}^{(r-1)} + (1 - \varepsilon)^{N-N_0-1} a_{N-1}^{(r-1)} + \dots + (1 - \varepsilon) a_{N-1}^{(r-1)} + a_{N-1}^{(r-1)}} \\ &= \frac{a_N^{(r-1)}}{\underbrace{a_1^{(r-1)} + \dots + a_{N_0-1}^{(r-1)}}_{N \text{ に依らない正の定数として評価}} + \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{N-N_0}}{1 - (1 - \varepsilon)} a_{N-1}^{(r-1)}} < \frac{a_N^{(r-1)}}{\frac{1 - (1 - \varepsilon)^{N-N_0}}{\varepsilon} a_{N-1}^{(r-1)}} \\ &= \frac{\varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon)^{N-N_0}} \cdot \frac{a_N^{(r-1)}}{a_{N-1}^{(r-1)}} \end{aligned}$$

\*8 総和記号の条件を満たす  $(n_1, n_2, \dots, n_{r-1})$  が存在しない場合は  $a_N^{(r)} = 0$  と定義することにします.

と評価出来るため、 $N \rightarrow \infty$  として再び帰納仮定から不等式  $0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} \leq \varepsilon$  が導かれます。正の数  $\varepsilon$  は 任意に 選んでいたもので、目標としていた極限式  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} = 0$  を得ました。□

次の命題は、多重ポリログ関数と多重ゼータ値の関係を記述する非常に重要なものですが、多重ポリログ関数の定義から直観的には“ほぼ明らか”でしょう。

**命題 1.9** (多重ポリログ関数と多重ゼータ値の関係).  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$  が許容的指数 (つまり  $k_r > 1$ ) であるとき  $\lim_{\substack{|z|_\infty < 1 \\ z \rightarrow 1}} \text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \zeta(\mathbf{k})$  が成り立つ。

**注意 1.10.** 「 $z = 1$  を代入すれば良いだけじゃん!!」という話ではありますが、 $z = 1$  は収束円盤の境界上 であるため、「極限值として正しく多重ゼータ値に収束するか」は一応チェックする必要があります。また 多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の  $z = 1$  での特殊値が多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  である という観点は、言われてみれば“当たり前”ですが、その舞台裏では革新的な「視点の転換」がなされています。この「視点の転換」を通じて、第 1.2 節では「 $p$  進」世界での多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  を“ $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  の  $z = 1$  での特殊値”として定義することになるのであります。最後の注意として、極限を取る際に付された「 $|z|_\infty < 1$ 」という条件は、次の小節で  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  を解析接続した後に見返すと「多重ポリログ関数を 主分枝に制限して 極限をとる」ことを意味していることが分かります。このような極限の扱いも「 $p$  進」世界での理論 (特に定義 1.20) と比較してみると面白いでしょう。

**【証明】** 指数  $\mathbf{k}$  が許容的ならば多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  は収束する (例えば [荒川金子 10, 補題 1.1.2] などを参照) ので、 $|z|_\infty \leq 1$  のとき

$$\left| \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \right|_\infty \leq \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{|z|_\infty^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \leq \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} = \zeta(\mathbf{k}) < \infty$$

より、優級数定理から  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  は収束します。したがって  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の収束半径が 1 よりも真に大きくなる (つまり “ $|z|_\infty = 1$  まで解析接続出来る”) ので、特に題意が従います\*9。□

\*9 (マニアックな注) 定理の主張を見ると、如何にも <sup>いか</sup> <sup>べき</sup> 冪級数に対する <sup>ただ</sup> アーベルの連続性定理 から直ちに従いそうな気がしますが、複素版 のアーベルの定理には <sup>いわゆる</sup> 所謂 ストルツ角の条件 *STOLZ angle condition* が課されてしまうため、今回の設定で適用しようとする <sup>かえ</sup> 却って面倒な条件が付いてきます ([Ahl78, Chapter 2, Theorem 3] 参照).

### § 1.1.2 多重ポリログ関数の反復積分表示と解析接続

べき  
冪級数の収束半径内では、項別微分だろうと項別積分だろうと遣りたい放題ですので、多重  
ポリログ関数の定義式  $(\text{Li})_{\text{Ser}}$  を項別微分することで、次の微分方程式を得ます。

**命題 1.11.**  $|z|_\infty < 1$  のとき、多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  は次の微分方程式を満たす;

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}(z) & (k_r \geq 2 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{1-z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}(z) & (k_r = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_1(z) = \frac{1}{1-z}.$$

さすが  
流石に高校生レベルの微分の計算ですので、証明は割愛します。ヒントとして  $k_r = 1$  の  
きに現れる  $\frac{1}{1-z}$  という項が幾何級数の公式  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$  に由来している、とい  
うことだけをお伝えして、先に進みましょう。さて、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(0) = 0$  であることは定義式  $(\text{Li})_{\text{Ser}}$   
から直ちに従いますから、(今のところ  $|z|_\infty < 1$  の条件下では) 命題 1.11 の微分方程式を繰  
り返し用いて  $\text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z)$  を 1 次微分形式  $\omega_0 = \frac{dt}{t}$  と  $-\omega_1 = \frac{dt}{1-t}$  の反復積分 *iterated*  
*integral* として表すことが出来ます。例えば次の計算のように、実際に具体的な指数  $\mathbf{k}$  に対  
して  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  を手計算で反復積分に書き直してみると、直ぐに納得出来るはずで  
す。

$$\begin{aligned} \text{Li}_{2,1}(z) &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \frac{1}{1-t_3} \text{Li}_2(t_3) dt_3 = \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \frac{1}{t_2} \text{Li}_1(t_2) dt_2 \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left( \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3}. \end{aligned}$$

反復積分の記号を用いて、此処迄の話をまとめておきましょう。

#### 反復積分の記号についての規約

$X(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  上の区分的に滑らかな (整った) 道  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X(\mathbb{C})$   
と、 $X(\mathbb{C})$  上の微分 1 形式  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$  に対して

$$\int_{\gamma} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r \quad \left( \text{または } \int_{\gamma} \omega_1 \circ \omega_2 \circ \dots \circ \omega_r \right) \\ := \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1} \underbrace{\gamma^* \omega_1(t_1) \wedge \gamma^* \omega_2(t_2) \wedge \dots \wedge \gamma^* \omega_r(t_r)}_{\text{ここ}}$$

と定めます。この記法は“前の微分形式から順に積分する”という順序で書かれて  
いますが、文献によっては“後ろの微分形式から順に積分する”流儀を採用している  
場合も少なくない\*10)ので 良く注意してください!! なお、積分値が道の始点  $\alpha$  と終

点  $\beta$  にしか依らない場合には、単に  $\int_{\alpha}^{\beta} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r$  と書くこととします。また、道の始点や終点には 0 や 1 での接基点 *tangential base point* も含めることとします (接基点や尖点的な道, 整った道などの用語については, 山本修司さんの解説記事 [山本 SS18, 1.2 節] を参照してください; 山本さんの記事の記号を用いるならば  $\gamma$  は“接基点付き空間  $\tilde{X}(\mathbb{C})$  の道”と書かれるべきものですが, 普遍被覆空間と大変紛らわしいのでこの記号は用いないことにしました).

**命題 1.12** (多重ポリログ関数の反復積分表示).  $X(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  上の有理微分形式  $\omega_0, \omega_1$  をそれぞれ  $\omega_0 = \frac{dt}{t}, \omega_1 = \frac{dt}{t-1}$  と定めると\*11, 多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  は次のような反復積分表示を持つ;

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \int_{\gamma_z} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \dots (\text{Li})_{\text{Int}}$$

ただし  $\gamma_z: [0, 1] \rightarrow X(\mathbb{C})$  は 0 (正確には接基点  $0\vec{1} = 1_0 = \mathbf{0}$ ) と  $z$  を結ぶ整った道とする。

表示  $(\text{Li})_{\text{Int}}$  に於いて  $\gamma_z$  を“まっすぐな道” dch (定義は山本修司さんの記事 [山本 SS18, 例 3.3] を参照) としたものが多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  の反復積分表示 [荒川金子 10, 定理 1.2.1] に他なりません (川崎菜穂さんの記事の山本積分表示 [川崎 SS18, 例 1.2 の直前] も参照).

命題 1.12 の主張では「 $|z|_{\infty} < 1$ 」という条件を外してしまいました。何故ならば  $\omega_0, \omega_1$  という微分形式は非常にシンプルなものなので、最早開円盤  $\mathbb{D}_0^-(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|_{\infty} < 1\}$  内に留まらず  $X(\mathbb{C})$  内の 0 を始点とする道に対して線積分することが可能であるからです。つまり反復積分表示  $(\text{Li})_{\text{Int}}$  は、多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の普遍被覆空間  $\widetilde{X(\mathbb{C})}$  上の関数としての (或いは  $X(\mathbb{C})$  上の多価関数としての) 解析接続 *analytic continuation* を与えていることとなります。解析接続された関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の多価性は、良く知られているように  $\gamma$  が終点  $z$  に着くまでに  $\omega_0, \omega_1$  の極 0, 1 を“何回回ったか”に応じて積分値が変わる (つまりモノドロミー *monodromy* が生じる) ことに由来しています。詳細は (深さ 1 の場合しか扱われていませんが) 河野俊丈さんの著書 [河野 09, 1.4 章] に詳しいので参照して下さい。

何にせよ、我々は「実 / 複素」世界での多重ポリログ関数が反復積分表示を介して解析接続されることを概観してきました。此处での経験を踏まえて、次の小節では愈々「 $p$  進」世界の理論へと足を踏み出してゆきましょう。

\*10 例えば [GF, Section 3.1.3] など。陳國才 チェンクオツァイ Kuo-Tsai CHEN の原論文 [Che77] では本稿と同じ順番で反復積分を定義しています。

\*11 此处での文脈では“ $\omega_1 = \frac{dt}{1-t}$ ”と定めた方が自然なように思えますが (実際にそう定義してある文献も少なくありません), 後続の山本修司さん, 佐久川憲児さん, 萩原啓さんの記事に合わせた定義を採用しました。

## § 1.2 「 $p$ 進」世界での理論 — 古庄英和の $p$ 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$

さあ、<sup>ところ</sup> 処 変わって「 $p$  進」世界の舞台  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  にやって参りました。「実 / 複素」の世界で培った経験<sup>つちか</sup>を踏まえると、最初に“ $p$  進多重ポリログ関数”を定義し、解析接続した上で“ $z = 1$  での特殊値”として  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  を定義する というシナリオが容易に思い付くでしょう。目論見<sup>もくろみ</sup>通りにすんなりと  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が構成出来れば良いのですが、はてさてそう巧く<sup>うま</sup>いくことやら……。

### § 1.2.1 $p$ 進多重ポリログ関数 — 「 $p$ 進」世界の<sup>べき</sup>冪級数として

本小節の主演である  $p$  進多重ポリログ関数 も、<sup>ま</sup> 先ずは安直に<sup>べき</sup> 冪級数 で定義しましょう；

**定義 1.13** ( $p$  進多重ポリログ関数).  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  に対し、冪級数

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^p(z) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \cdots (\text{Li})_{\text{Ser}}^p$$

(の絶対収束域) で定義される  $p$  進解析的関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^p(z)$  を (1 変数)  $p$  進多重ポリログ関数 (one-variable)  $p$ -adic multiple polylogarithm と呼ぶこととします。

大学で学習する<sup>べき</sup> 冪級数の理論は、良く見返してみるとユークリッド距離  $|\cdot|_{\infty}$  の距離関数としての性質と  $\mathbb{R}$  や  $\mathbb{C}$  の完備性位しか用いられていません。したがって、ユークリッド距離  $|\cdot|_{\infty}$  を  $p$  進付値  $|\cdot|_p$  に取り替えることで、<sup>べき</sup> 冪級数の理論の主要な定理の大半が  $p$  進数係数の<sup>べき</sup> 冪級数についても (証明を何ら変えることなく) 成り立つことが簡単に確認出来ます。この事実を用いて、早速  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  の収束半径を求めてみましょう。

**命題 1.14.**  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  の収束半径は 1 である。

通常の多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  の場合とまったく同じ結果ですが、証明手法はかなり異なっています (用いる距離関数が異なるので当然ではあります)。[Fur04, Lemma 2.7] では“Easy.”として証明が割愛されていますが、「 $p$  進」世界での解析に慣れていない方にとっては何をすれば良いのか分かりづらいためと思われしますので、簡単に証明を紹介しておきましょう。実際、 $p$  進付値特有の強三角不等式 *strong triangle inequality* のお陰で、収束半径の計算は「 $p$  進」世界の場合の方が寧ろ<sup>むし</sup>簡単になっています\*12。

**【証明】** <sup>べき</sup> 冪級数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  の  $z^N$  の係数  $a_N = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$  の和に現れ

\*12 不等式評価が“簡単になる”ことは、 $\mathbb{C}_p$  の様な「 $p$  進」世界での解析 ( $p$  進解析) では度々観察される現象です。

る各項  $\frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$  の  $p$  冪<sup>べき</sup>の指数の最小値は、下から  $-\text{wt}(\mathbf{k}) \left\lfloor \frac{\log N}{\log p} \right\rfloor$  で抑えられます (実数  $x$  に対して  $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  を超えない最大の整数を表す床関数 *floor function* です). 実際、1 から  $N$  までの自然数は  $p$  で高々  $e_N = \left\lfloor \frac{\log N}{\log p} \right\rfloor$  回割り切れるため<sup>\*13</sup>,  $n_1, \dots, n_{r-1}, N$  がすべて  $p$  で  $e_N$  回割り切れる状況が起こり得るならば、そのときに  $p$  冪の指数が最小となります. 此処<sup>こ</sup>で強三角不等式と  $p$  進付値の定義  $|p|_p = p^{-1}$  を用いると

$$|a_N|_p \leq \max_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \left| \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}} \right|_p \leq p^{\text{wt}(\mathbf{k})e_N} \leq p^{\frac{\log N}{\log p} \text{wt}(\mathbf{k})} = N^{\text{wt}(\mathbf{k})}$$

と評価出来ますので、任意の (正の) 実数  $\alpha$  と  $a < 1$  に対して (「実 / 複素」の世界で)  $a^N N^\alpha \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  となることから  $|z|_p < 1$  のとき

$$|a_N z^N|_p \leq N^{\text{wt}(\mathbf{k})} |z|_p^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (|z|_p < 1 \text{ より})$$

が成り立ちます. したがって注意 1.2 で紹介した「逆の主張」から、冪級数<sup>べき</sup>  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \sum_{N=1}^{\infty} a_N z^N$  は  $|z|_p < 1$  で収束します. 最後に、 $\mathbb{D}_0^-(1)$  の境界上の点  $z = 1$  では  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  が実際に発散するので (命題 1.1 を参照してください), 収束半径がちょうど 1 であることも分かります.  $\square$

### § 1.2.2 $p$ 進多重ポリログ関数の反復積分表示と解析接続 — コールマン積分を用いて

続いて  $p$  進多重ポリログ関数が満たすべき微分方程式を考察しましょう. 「 $p$  進」の世界での微分方程式と聞くと、何やら非常に難しそうなものを感じられますが、 $p$  進多重ポリログ関数は所詮は“開円板”  $\mathbb{D}_0^-(1) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$  の上で収束する冪級数<sup>べき</sup>なので、実質的に微分/積分する必要のある関数は冪乗関数<sup>べき</sup>  $z^n$  のみです. ス様な関数については、微分という操作は「実 / 複素」の世界でも  $z^n \mapsto n z^{n-1}$  という代数的な操作 だと思えることが出来ましたから、「 $p$  進」の世界では  $\frac{d}{dz}; z^n \mapsto n z^{n-1}$  という操作を「微分」と“定義”することにしましょう<sup>\*14</sup>. すると、「実 / 複素」の世界と全く同様に、項別微分よって  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  の満たす微分方程式が得られます (命題 1.11 と比較してください);

<sup>\*13</sup>  $p$  を底とする対数 “ $\log_p N$ ” を計算すれば「 $N$  が高々何回  $p$  で割り切れるか」が分かるという、高校で対数関数が導入される際に必ず学ぶ事実を用いているだけです. ただ “ $\log_p N$ ” と書いてしまうと、後で登場する  $p$  進対数関数 と非常に紛らわしいので、敢えて自然対数に (底の変換公式を用いて) 書き直しているのです.

<sup>\*14</sup> ( $\mathbb{C}_p$  線型な) 代数的 導分 *derivation* の定義に含まれている ライプニッツ則 *LEIBNITZ rule* を用いると、任意の導分  $D$  に対して  $D(z^n) = n z^{n-1} D(z)$  が成り立つことが帰納的に証明出来ます. 此処で “定義” した  $\frac{d}{dz}$  は、本当は  $\frac{d}{dz}(z) = 1$  と正規化された導分として定義されるべきものです.

**命題 1.15.**  $|z|_p < 1$  のとき,  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  は次の微分方程式を満たす;

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^p(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^p(z) & (k_r \geq 2 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{1-z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^p(z) & (k_r = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_1^p(z) = \frac{1}{1-z}.$$

さらに“開円板”  $\mathbb{D}_0^-(1)$  上では“微分 1 形式”  $\omega_f = f(z) dz = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,n} z^n \right) dz$  の原始関数 primitive function  $F_f(z)$  (つまり  $dF_f(z) = \omega_f$  を満たす  $\mathbb{D}_0^-(1)$  上の収束<sup>べき</sup>冪級数  $F_f(z)$ ) が

$$F_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,n} \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{(積分定数)}$$

として簡単に定義出来てしまいますので\*15, 高校の教

科書での“定義”のように  $\omega_f = f(z) dz$  の“定積分”を  $\int_{\alpha}^{\beta} \omega_f \stackrel{\text{定義}}{:=} [F_f(z)]_{\alpha}^{\beta} := F_f(\beta) - F_f(\alpha)$  で定めることが出来ます (引き算によって積分定数が打ち消し合っていることに注目しましょう). これを用いて  $\mathbb{D}_0^-(1)$  上での  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  に対しても, 「実 / 複素」の場合とまったく同じ形の“反復積分表示”が得られます (命題 1.12 と比較してみてください).

**命題 1.16** ( $p$  進多重ポリログ関数の“反復積分表示”).  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  上の有理微分形式  $\omega_0, \omega_1$  を其々  $\omega_0 = \frac{dt}{t}, \omega_1 = \frac{dt}{t-1}$  と定めると,  $|z|_p < 1$  に於いて  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  は次のような“反復積分表示”を持つ;

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \int_0^z (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \dots (\text{Li})_{\text{Int}}^p.$$

此処で“反復積分”とは, 単に“前の微分形式から順に 積分を計算してゆく”ことを指すものとします. 例えば  $\int_0^z (-\omega_1) \omega_0 (-\omega_1)$  は

$$\begin{aligned} \int_0^z (-\omega_1) \omega_0 (-\omega_1) &:= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left( \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} (-\omega_1(t_1)) \right) \omega_0(t_2) \right\} (-\omega_1(t_3)) \\ &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left( \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left( \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} t_1^{m-1} \right] dt_1 \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \end{aligned}$$

\*15 <sup>べき</sup>冪級数  $F_f(z)$  が収束することは確認する必要があります (“開円盤”上の“ポアンカレの補題”; 注意 3.28 も参照してください).

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_3=0}^{t_3=t_2} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_2^m}{m} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} = \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_2^{m-1}}{m} \right) dt_2 \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \\
&= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_3^m}{m^2} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} t_3^{n-1} \right) dt_3 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{z^{m+n}}{m^2(m+n)} = \sum_{0 < n_1 < n_2} \frac{z^{n_2}}{n_1^2 n_2} = \text{Li}_{2,1}^p(z)
\end{aligned}$$

のように形式的には「実 / 複素」の場合とまったく同じ計算によって  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{2,1}^p(z)$  となることが分かります。ただ、この計算は収束円盤  $\mathbb{D}_0^-(1)$  では“項別微分”や“項別積分”が自由に出来るという事実に依拠していることには注意が必要です（したがって  $|z|_p < 1$  のときにしか正当化されません）。

注意 1.10 で述べた戦略に沿うのであれば、次に我々がすべきことは「命題 1.16 の“反復積分表示”を“線積分”を用いて  $\mathbb{D}_0^-(1)$  の外の点  $z$  へと拡張する」ということとなりますが、<sup>ここ</sup>此処で「 $p$  進」世界での“線積分”って何? という疑問に突き当たります。閉区間  $[0, 1]$  は「実 / 複素」世界の対象ですから、素朴な意味で“道”  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X(\mathbb{C}_p)$  を考えるのはどう考えても無謀です。実際、「 $p$  進」世界  $X(\mathbb{C}_p)$  では素朴な意味での“線積分”は定義出来ません（次の小節 1.2.3 でもこの辺りの事情に触れます）。そこで「 $p$  進」世界では“線積分”に代わるものとしてコールマン積分 COLEMAN integral  $\left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \omega \right]_{\alpha}^{\beta}$  と呼ばれる「 $p$  進」世界の積分を用います。コールマン積分がどのようなものかについては、小節 1.2.3 で（非常に大雑把に）解説することにしますが、一旦コールマン積分の存在を認めてしまえば、<sup>いったん</sup>第 1.1.2 節とまったく同様の手順で“コールマン反復積分”を用いて  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  を“解析接続”することが出来ます；

**命題-定義 1.17** ( $p$  進多重ポリログ関数の“解析接続”, [Fur04, Definition 2.9]). 任意の  $a \in \mathbb{C}_p$  に対し、分枝  $a$  の“反復コールマン積分”

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) := \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \underbrace{(-\omega_1) \omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \underbrace{(-\omega_1) \omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots \underbrace{(-\omega_1) \omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z \cdots (\text{Li})_{\text{Int}}^{p,(a)}$$

によって定まる  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  上の分枝  $a$  のコールマン関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  を分枝  $a$  の  $p$  進多重ポリログ関数  $p$ -adic multiple polylogarithm of branch  $a$  と呼ぶ。分枝  $a$  を選ぶ毎に、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  は  $\mathbb{D}_0^-(1)$  上で  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$  と一致する唯一つの分枝  $a$  のコールマン関数として特徴付けられる。

<sup>ここ</sup>此処で“反復コールマン積分”は、<sup>やは</sup>矢張り単純に“前の微分形式から順に コールマン積分を

計算してゆく”ことを指すものとします; 例えば

$$\left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} (-\omega_1) \omega_0(-\omega_1) \right]_0^z := \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} (-\omega_1(t_1)) \right]_{t_1=0}^{t_1=t_2} \omega_0(t_2) \right]_{t_2=0}^{t_2=t_3} (-\omega_1(t_3)) \right]_{t_3=0}^{t_3=z}$$

といった塩梅です. 命題-定義 1.17 の主張の未定義語については, この後の第 1.2.3 節で簡単に解説します. この時点で注目しておきたいのは 定義された “解析接続”  $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  に  $a \in \mathbb{C}_p$  というパラメータが付いているということです. つまり,  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_k^p(z)$  の解析接続は パラメータ  $a$  の数だけ (非加算無限個!!) 存在することになるのです\*16.

### § 1.2.3 コールマン積分とは? — 「 $p$ 進」世界での積分論の困難を乗り越えて

第 1.1 節でも度々登場したように, 「実 / 複素」の世界では<sup>しばしば</sup> “道に沿った解析接続” が行われますが, それは大雑把に言えば

- Step 1. 道の始点  $x_0$  での  $f(z)$  のローラン展開を求める
- Step 2.  $f(z)$  の  $x_0$  でのローラン展開の収束域  $D_0$  内にある道上の点  $x_1$  でローラン展開し直す
- Step 3.  $f(z)$  の  $x_1$  でのローラン展開の収束域を  $D_1$  とするとき,  $D_1 \setminus D_0$  内にある道上の点  $x_2$  でローラン展開し直す
- Step 4.  $f(z)$  の  $x_2$  でのローラン展開の収束域を  $D_2$  とするとき,  $D_2 \setminus (D_0 \cup D_1)$  内にある道上の点  $x_3$  でローラン展開し直す

.....

という操作を道の終点まで繰り返すことでなされるのでした. 実際, 各  $D_{j-1} \cap D_j$  を “糊代”<sup>のりしろ</sup> として各点でのローラン展開が貼り合っ<sup>べき</sup>てゆき (一致の定理),  $f(z)$  が “道の終点” まで接続されるわけです (図 2 の左側を参照). 「 $p$  進」世界でも<sup>べき</sup> 冪級数やローラン級数は意味を持ちますから, 非常に楽観的に考えれば上記の手順を繰り返すことで関数の “道に沿った解析接続” が出来そうな気がしてきます. しかし, そんな期待とは裏腹に, 「 $p$  進」世界では<sup>うらはら</sup> 幾つもの深刻な事情が重なってそう簡単に “解析接続” が出来ないことが結論付けられてしまいます; 第一に, 既に説明したように「 $p$  進」世界では<sup>そもそも</sup> 抑々素朴な意味での “道” は意味を為しません. また, 仮に<sup>すで</sup> 何らかの方法で “道” の概念が定義出来たとしても, 素朴な意味で “道に沿った解析接続” が機能することはまったく期待出来ないのです. と言うのも, 「 $p$  進」世界では 2 つの円盤が交わるならば, 必ず一方が他方に含まれる という「実 / 複素」世界では考えられない事態が生じてしまうからです (図 2 の右側を参照; 強三角不等式 を用いて簡単に確認出来ますので, 気になる人は証明してみてください). 特に図 2 の左側の図のような状況は 「 $p$  進」世界では起

\*16 慣習として “分枝  $a$ ” という用語を用いていますが, 通常<sup>な</sup>の複素関数論 (「複素」の世界) で多価関数に対して用いられる “分枝” という用語とはニュアンスが微妙に異なっているので注意しましょう.

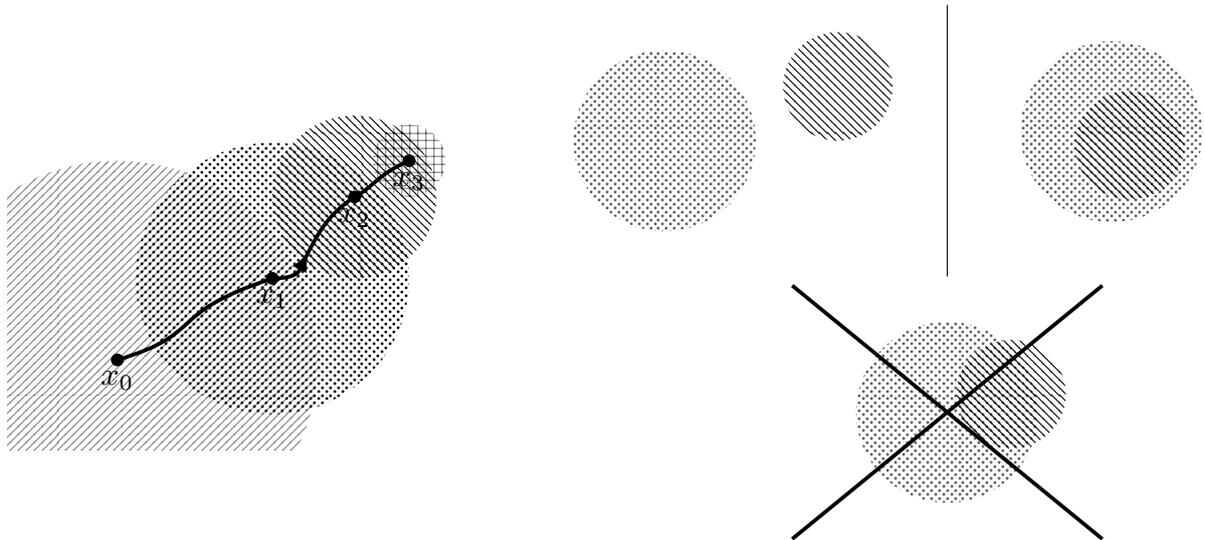


図2 (左) 「実 / 複素」の世界での“道に沿った解析接続”のイメージ  
 (右) 「 $p$  進」世界での2つの円盤 (“交わる円盤”は必ず一方が他方に含まれる)

こり得ないため、“開円盤”の共通部分を“糊代”<sup>のりしろ</sup>として関数を接続していく、という発想自体がナンセンスなものになってしまうのです。

この問題を解消する方法の一つが、ジョン・テイトにより導入されたリジッド解析幾何学 *rigid analytic geometry* です。リジッド解析幾何学は、完全不連結になってしまうほど“細かい”「 $p$  進」世界の位相を“制限”し、貼り合わせに用いる開集合や開被覆を「少なくする」ことで“関数の貼り合わせ”が巧く機能するようにしてしまおう、という画期的なアイデアに基づいて構築された幾何学で、現在では「 $p$  進」世界の幾何学を考える際に欠かすことのできない非常に強力なツールとなっています。リジッド幾何学については、近年加藤文元さん<sup>かとう ふみはる</sup>による待望の日本語の解説書 [加藤 13] が出版されました。特に [加藤 13, 第 0 節] の導入部では、リジッド幾何学の考え方について非常に分かり易く纏め<sup>まと</sup>られていますので、リジッド幾何学がどんなものかを知りたい方はまずは [加藤 13] を手に取ってみましょう。また、[BGR84] はリジッド幾何学の基本文献として未だに定評のある教科書で、大抵のことはこの本に載っているといっても過言ではありません。

と言うわけで、目下の目標である  $p$  進多重ポリログ関数の“解析接続”に於いても当然リジッド幾何学の助けを借りる必要がありますが、実はこの問題にはリジッド幾何学だけでは乗り超えられない困難が残されています——それが 積分定数の不定性 の問題です。「実 / 複素」の世界では、多重ポリログ関数は微分形式の反復積分表示を持ち、その表示を用いて解析接続されたのでした。「 $p$  進」世界では (上記のような事情も鑑みると) “道に沿った積分”は巧く機能しなさそうなので、取り敢えずは素朴に“ローラン展開の項別積分”によって積分を考えるより仕方がありません。しかし、(高校でも学んだように) 関数を積分をした際には 積分定数の不定性 が必ず現れます。そして「 $p$  進」世界は 完全不連結 であるため (命

題 A.6 を参照), 個々の “開円盤” 上でローラン展開を積分した際の積分定数がそのままではまったく貼り合わないのです。つまり, 「 $p$  進」世界では各点で素朴に項別積分して得られる関数が 局所定数関数 の不定性を持つことになってしまい, そのままではまったく使いものになりません。この困難を回避する方法のヒントは  $p$  進解析の祖とも言うべき ベルナルド・モリス・ドヴォルク Bernard Morris DWORK によって既に与えられていました。ドヴォルクは「 $p$  進」世界に特有の フロベニウス構造 FROBENIUS structure に着目し, フロベニウス作用の “固有ベクトル” となっているような局所定数関数は 大域的な定数関数 となる ことを発見しました (ドヴォルクの原理; [Col82, Lemma 3.1] を参照)。コールマンはドヴォルクのこの発見に触発されて, 積分とフロベニウス作用が 可換となるように “原始関数” を巧く取る というアイデアに基づいて, 積分の際に生じる不定性が 大域的な定数 となるような積分理論の構築に成功したのです。  $p$  進積分や  $p$  進微分方程式を “フロベニウス構造” 付きで考える という思想は, 現在の  $p$  進微分方程式や  $p$  進コホモロジーの最新理論でも非常に重要かつ基本的な考え方として根付いています ( $F$  クリスタル,  $F$  アイソクリスタルの概念など)。コールマンは論文 [Col82] の Chapter III の冒頭で,  $p$  進解析に於ける “フロベニウス構造” の重要性を以下のような印象的な文章で表現しています;

Rigid analysis was created to provide some coherence in an otherwise totally disconnected  $p$ -adic realm. Still, it is often left to Frobenius to quell the rebellious outer provinces.

リジッド解析は, さもなければ完全不連結な  $p$  進の “領土” に或る種の秩序を与えるために産み出された。それでもなお, 反抗的な “外領” を制圧する役目は しばしば フロベニウスに委ねられているのである。

最後に, 今回考察すべき空間  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  が “穴開き” の空間であることから生じる若干技術的な問題について触れておきましょう。例えば, 除外されている点  $0$  で極を持つ微分形式  $\frac{dz}{z}$  の “原始関数” は, 「実 / 複素」の場合と同様に 対数関数  $\text{Log}_p z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$  となるはずですが, 右辺の べき 冪級数の収束半径は  $1$  であり (命題 1.8 を参照), したがって  $\text{Log}_p z$  はそのままでは収束円盤  $\mathbb{D}_1^-(1) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-1|_p < 1\}$  でしか定義されていないため, “ $0$  のまわりの関数” と捉えるためには  $\mathbb{C}_p^\times$  上の関数に拡張する必要があります。ところが  $\text{Log}_p z$  の  $\mathbb{D}_1^-(1)$  から  $\mathbb{C}_p^\times$  への拡張の方法がまったく一意的ではないのです。実際,  $\mathbb{C}_p^\times$  は構造定理により  $p^{\mathbb{Q}} \times$  (位数が  $p$  と素な  $1$  の べき 冪根)  $\times \mathbb{D}_1^-(1)$  の形の直積分解を持ちます ([Ko77, p. 72] を参照)。“開円盤”  $\mathbb{D}_1^-(1)$  上では  $\text{Log}_p z$  は定義されているため, あとは  $p^{\mathbb{Q}}$  と  $1$  の冪根に対して  $\text{Log}_p z$  の値を定義すれば十分ですが, 対数関数が満たすべき 加法性  $\text{additivity } \text{Log}_p zw = \text{Log}_p z + \text{Log}_p w$  を保ったまま拡張するのであれば,  $1$  の

冪根  $\zeta$  での値は 0 となる必要があります. ところが  $p^{\mathbb{Q}}$  への拡張に対しては 何の制約もないため, 例えば生成元  $p$  での値を “ $\text{Log}_p^{(a)} p = a \in \mathbb{C}_p$ ” と定めるごとに異なる (それも非可算無限個の!) 拡張  $\text{Log}_p^{(a)} z$  が生じてしまうのです. コールマンはこの問題に対しては 予め “対数関数の分枝  $\text{Log}_p^{(a)} z$ ” を固定し, 分枝毎に積分理論を構築する という態度を取っています.

以上を踏まえた上で, 本稿で必要とされるコールマン積分論の主結果を紹介します. 此处で紹介する定式化は基本的に [Bes00, Section 2] に則っています.  $X(\mathbb{C}_p)$  上の過収束なりジッド解析的関数の集合および過収束なりジッド解析的微分 1 形式の集合をそれぞれ  $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ ,  $\Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  で表し, 点  $0, 1, \infty$  で (分枝  $a$  の) “対数的極を持つ局所解析的な関数” および “対数的極を持つ局所解析的な微分 1 形式” の集合をそれぞれ  $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ ,  $\Omega_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  で表します (各関数環の正確な定義は第 A.2.3 節および [Bes00, p. 341] を参照してください).

**定理 1.18** (コールマン積分論の主定理, [Col82, CdS88]). 各  $a \in \mathbb{C}_p$  に対し, 分枝  $a$  の コールマン関数 COLEMAN function と呼ばれる局所解析的関数の集合  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  ( $\subset \mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ ) で  $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  を含むものと  $\mathbb{C}_p$  線型写像  $\int_{\text{Col}}^{(a)} : \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))/\mathbb{C}_p \cdot 1$  が存在して以下の性質で特徴付けられる (但し  $\Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) := \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))} \Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  とする);

(1) 外微分作用素  $d: \mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \Omega_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  に対して  $d \circ \int_{\text{Col}}^{(a)} = \text{id}_{\Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))}$  が成り立つ;

(2) フロベニウス射 (の任意の持ち上げ)  $\phi$  に対して  $\int_{\text{Col}}^{(a)} \phi^* \omega = \phi^* \left( \int_{\text{Col}}^{(a)} \omega \right)$  が成り立つ;

(3)  $f \in \mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  に対して  $\int_{\text{Col}}^{(a)} df = f \pmod{\mathbb{C}_p \cdot 1}$  が成り立つ.

特に任意の  $\alpha, \beta \in X(\mathbb{C}_p)$  に対して  $\left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \omega \right]_\alpha^\beta$  が well-defined になります (つまり積分が “経路” に依存しない / “モノドロミーが生じない” ということ). さらにコールマン関数に対して 一致の定理 *uniqueness principle* が成立することも, コールマン関数の構成から従います;

**命題 1.19** (一致の定理 [Col82, Corollary 4.8a], [Fur04, Proposition 2.6]). 分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  のコールマン関数  $f, g \in \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  が  $X(\mathbb{C}_p)$  の (強グロタンディーク位相に関する) 許容開集合 *admissible open set*  $U$  上で一致するならば,  $f$  と  $g$  は  $X(\mathbb{C}_p)$  のコールマン関数として一致する.

許容開集合の定義は省略します ([加藤 13, 定義 4.2.2] や [BGR84, Section 9.1.4, Proposi-

tion 2] を参照). 具体例としては,  $X(\mathbb{C}_p)$  のアフィノイド部分集合 (“縁のある” 部分集合) は許容開集合ですし, “開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  や第 A.2.3 節に登場する  $U_r$  のような “縁のない” 集合も許容開集合となります (本稿を読む上では, このくらいの部分集合を想定しておけば十分だと思います).

本小節の最後に コールマン関数の分枝 について補足しておきましょう. 分枝  $a$  のコールマン関数  $f(z)$  は定義から  $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  の元でもあるため,  $z_0 = 0, 1, \infty$  のまわりで 分枝  $a$  の  $p$  進対数関数  $\text{Log}_p^{(a)}(z)$  を用いた “漸近展開”

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(a)}(z - z_0) + \dots + f_m(z) \{ \text{Log}_p^{(a)}(z - z_0) \}^m \quad (z_0 = 0, 1 \text{ のとき})$$

または

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + f_m(z) \left\{ \text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}^m \quad (z_0 = \infty \text{ のとき})$$

を持ちます ( $f_i(z)$  は点  $z_0$  のまわりの或る “開円環”  $A_{z_0}(r, 1)$  上収束する冪級数; 第 A.2.2 節の  $\mathcal{A}(A_{z_0}(r, 1))$  の定義を参照してください). 此処に現れる 分枝  $a$  の  $p$  進対数関数  $\text{Log}_p^{(a)}(z)$  を分枝  $b$  の  $p$  進対数関数  $\text{Log}_p^{(b)}(z)$  に取り替える操作

$$\iota_{a,b}(f)(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(b)}(z - z_0) + \dots + f_m(z) \{ \text{Log}_p^{(b)}(z - z_0) \}^m \quad (z_0 = 0, 1 \text{ のとき})$$

および

$$\iota_{a,b}(f)(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(b)}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + f_m(z) \left\{ \text{Log}_p^{(b)}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}^m \quad (z_0 = \infty \text{ のとき})$$

は環同型  $\iota_{a,b}: \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p))$  を誘導します. まったく同様に  $\iota_{a,b}$ -半線型な\*17加群の同型  $\tau_{a,b}: \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p))$ ;  $\text{Log}_p^{(a)}(z) \mapsto \text{Log}_p^{(b)}(z)$  も構成出来ます\*18. コールマン積分は, 構成から分枝を取り替える写像  $\iota_{a,b}, \tau_{a,b}$  に対して “関手的に” 振舞います; つまり図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) & \xrightarrow{\int_{\text{Col}}^{(a)}} & \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))/\mathbb{C}_p \cdot 1 \\ \tau_{a,b} \downarrow \wr & & \downarrow \wr \iota_{a,b} \\ \Omega_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p)) & \xrightarrow{\int_{\text{Col}}^{(b)}} & \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p))/\mathbb{C}_p \cdot 1 \end{array}$$

が可換となります (コールマン積分の 分枝非依存性原理 *branch independency principle*; [Fur04, Proposition 2.3] を参照). したがって,  $X(\mathbb{C}_p)$  の 有理微分 1 形式  $\eta_j$  (これは勿論 もちろん)

\*17 正確な用法ではないかもしれませんが, 任意の  $f \in \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ ,  $\omega \in \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  に対して等式  $\tau_{a,b}(f\omega) = \iota_{a,b}(f)\tau_{a,b}(\omega)$  が成り立つという意味で “半線型” という用語を用いています.

\*18 同型  $\iota_{a,b}, \tau_{a,b}$  は “漸近展開” の局所パラメータに依らない well-defined な同型となります ([Fur04, Lemma 2.2] 参照).

分枝  $a$  には依らない対象であり,  $\tau_{a,b}(\eta_j) = \eta_j$  が成り立ちます) を分枝  $a, b$  で“同じ手順で”反復コールマン積分して得られる関数

$$f^{(a)}(z) := \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_k \right]_{\alpha}^z, \quad f^{(b)}(z) := \left[ \int_{\text{Col}}^{(b)} \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_k \right]_{\alpha}^z$$

は  $\iota_{a,b}(f^{(a)}) = f^{(b)}$  を満たすことが ( $k$  に関する帰納法により) 従います. より踏み込んだ言い方をするならば,  $f^{(a)}$  と  $f^{(b)}$  は  $z_0 = 0, 1, \infty$  で (現われる対数関数  $\text{Log}_p^{(a)}(z)$ ,  $\text{Log}_p^{(b)}(z)$  の分枝の差異を除けば) まったく同じ形の“漸近展開”を持つ“本質的には同じ関数”であるわけです. 特に斯様な関数は, どの分枝で考えても“漸近展開”の各係数  $f_j(z)$  が分枝に依存しません. 勿論  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  は  $X(\mathbb{C}_p)$  上の有理微分 1 形式  $\omega_1 = \frac{dz}{z}$ ,  $-\omega_2 = \frac{dz}{1-z}$  の反復コールマン積分で定義される関数ですから,  $p$  進多重ゼータ値の分枝非依存性の議論 (後述の定理 1.22 を参照) では 漸近展開に現れる対数関数部分  $\{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^j$  の影響を如何にして取り除くかに焦点が当てられるのです.

#### § 1.2.4 KZ 型 $p$ 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{K})$ の“定義”

何はともあれ  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_k^p(z)$  の“解析接続”  $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  が構成出来ましたので, 「実 / 複素」の場合に倣って“ $\zeta_p(\mathbf{k}) := \lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_k^{p,(a)}(z)$ ” とすれば「多重ゼータ値の  $p$  進版」と呼ぶべき対象が構成出来そうです. ところが我々は既に命題 1.1 で  $\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_k^p(z)$  が  $p$  進位相では収束しないことを証明してしまいました. 幾ら  $\text{Li}_k^p(z)$  を“解析接続”したからといって, 収束しなかったものが自動的に収束するようなことが起こるはずはありません. 其処で,  $z \rightarrow 1$  での  $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  の“極限值”として意味のある値を取り出すために 極限の取り方に制限を課す 必要が生じるのです.

**定義 1.20** (“分岐を制限した” 極限  $\lim'$ , [Fur04, Notation 2.12]).  $f(z)$  を  $\mathbb{C}_p$  上定義された関数とし,  $\alpha \in \mathbb{C}_p$  とする.  $\mathbb{Q}_p(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$  の  $\mathbb{Q}_p$  上の分岐指数が有限であり\*19, ( $p$  進位相で)  $\alpha$  に収束するような  $\mathbb{C}_p$  の任意の点列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  が同じ値に収束するとき, その収束値を  $\lim'_{z \rightarrow \alpha} f(z)$  で表し,  $\lim'_{z \rightarrow \alpha} f(z)$  は収束する という. そうでないとき (即ち  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  が同じ値に収束しないとき),  $\lim'_{z \rightarrow \alpha} f(z)$  は発散する という.

定義 1.20 の  $\lim'$  を用いることで, 古庄英和さんによって導入された  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  は形式的には「実 / 複素」の場合とまったく同じ形で定義出来ますので, (収束性などの確認は後回しにして) 先に  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の定義を紹介してしましましょう.

\*19 拡大  $\mathbb{Q}_p(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})/\mathbb{Q}_p$  自体は無限次拡大でも構いません.

**定義 1.21** (古庄英和の KZ 型  $p$  進多重ゼータ値, [Fur04, Definition 2.17]). 許容指数  $\mathbf{k}$  に対して KZ 型  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$   $p$ -adic multiple zeta value of KZ type を  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) = \lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  で定める.

定義 1.21 を命題 1.9 と比較してみれば,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が  $\zeta(\mathbf{k})$  の「 $p$  進」世界での対応物と呼ぶに相応しいものであることが実感出来るでしょう. 勿論定義 1.21 を見て気になるのは 極限  $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  の収束性 ですが, それ以前に  $p$  進多重ポリログ関数の解析接続  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  が分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存している 点も気になるどころです. と言うのも, 普通に考えると 極限值  $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  も分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存することとなり (それどころか 極限が存在するかどうか が分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  毎に変化したとしてもまったく可笑しくありません), “ $p$  進多重ゼータ値の値が  $p$  進多重ポリログ関数の分枝の取り方に依存する?!” というとんでもない事態になり兼ねないので. 次に紹介する定理は, そんな“病的な”状況が起こらないことを保障するものです. コールマン積分論が  $p$  進対数関数の分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存して構成されていることから, コールマン積分論を用いた議論では (特にコールマン関数の 特殊値 を考える際に) 分枝への依存性 / 非依存性を気に掛けるべし, と言うことは常に肝に命じておく必要があります.

**定理 1.22** ( $p$  進多重ゼータ値の分枝非依存性, [Fur04, Theorem 2.13]). 定義 1.21 に現れる  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  の極限  $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  が収束するか発散するかは 分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存しない. さらに, この極限が収束するとき, 極限值も 分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存しない.

特に  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  は, 定義に用いられる  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  の分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存しない.

第 1.2.3 節で見たように, コールマン関数が分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存している箇所は 極での漸近展開に現れる発散項  $\text{Log}_p^{(a)}(z)$  の部分 だけ であつたので, 定理 1.22 の証明に取り組む際には “発散項  $\text{Log}_p^{(a)}(z)$  が消えるかどうか” を調べるのが重要となります. 鍵となるのが次に紹介する補題 1.23 で, この補題こそが極限  $\lim'$  を導入する強い動機を与えています.

**補題 1.23** ([Fur04, Lemma 2.14]). 任意の  $a \in \mathbb{C}_p$ ,  $m \in \mathbb{N}$  および  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $\lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^m \left\{ \text{Log}_p^{(a)} \epsilon \right\}^n = 0$  が成り立つ.

**注意 1.24.** この補題は、「実 / 複素」の世界では典型的なド・ロピタルの定理の演習問題としても有名な結果  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x^{-1}} \stackrel{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0$  (を拡張したもの) の「 $p$  進」版です. ところが「実 / 複素」の世界では良く知られたこの結果が「 $p$  進」世界では 極限の取り方に制限を付けないと成り立たない ことには注意が必要です. 補題 1.23 の証明を見ればその理由が察せられると思いますので, 補題 1.23 の証明を概観した後で,  $\lim'$  の制限を課さないと極限が発散してしまう例 (反例 1.25) を紹介しましょう.

**【補題 1.23 の証明】**  $\lim'$  の定義に基づいて,  $\mathbb{C}_p$  の点列  $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$  を次の 2 つの条件を満たすように取ります;

- \*  $\epsilon_k \neq 0$  かつ  $\epsilon_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )
- \*  $\mathbb{Q}_p$  上の  $L_\epsilon := \mathbb{Q}_p(\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty)$  の分岐指数  $e_\epsilon$  が有限である

このとき  $L_\epsilon$  の元  $\varpi_\epsilon$  で  $|\varpi_\epsilon|_p = p^{-1/e_\epsilon}$  を満たすもの (即ち  $L_\epsilon$  の一意化元 *uniformiser*) が存在して,  $L_\epsilon$  の乗法群  $L_\epsilon^\times$  は  $L_\epsilon^\times = \langle \varpi_\epsilon \rangle \times \mu_{p'}(\mathcal{O}_{L_\epsilon}) \times (1 + \varpi_\epsilon \mathcal{O}_{L_\epsilon})$  と直積分解されます. ただ  $\mathcal{O}_{L_\epsilon}$  は  $L_\epsilon$  の整数環を表し,  $\mu_{p'}(\mathcal{O}_{L_\epsilon})$  は  $\mathcal{O}_{L_\epsilon}$  に含まれる 1 の べき 冪根で位数が  $p$  と素なもの全体のなす乗法群を表すものとします. 特に, 各  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $\epsilon_k$  は  $\epsilon_k = \varpi_\epsilon^{\nu_k} u_k$  ( $\nu_k \in \mathbb{Z}, u_k \in \mathcal{O}_{L_\epsilon}^\times$ ) と分解され, さらに  $p$  と素な整数  $r_k$  が存在して  $u_k^{r_k} \in 1 + \varpi_\epsilon \mathcal{O}_{L_\epsilon}$  になります. 特に  $p^C > e_\epsilon$  を満たす自然数  $C$  を固定しておく, 2 項定理と  $\varpi_\epsilon^{p^C} \in \varpi_\epsilon^{e_\epsilon} \mathcal{O}_{L_\epsilon} = p \mathcal{O}_{L_\epsilon}$  により  $u_k^{p^C r_k} \in (1 + \varpi_\epsilon \mathcal{O}_{L_\epsilon})^{p^C} \subset 1 + p \mathcal{O}_{L_\epsilon}$  が成り立ちますので, 分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  の取り方によらず  $\text{Log}_p^{(a)}(u_k^{p^C r_k}) = \text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t-1} \frac{(u_k^{p^C r_k} - 1)^t}{t}$  は  $p \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  の元となります. 一方で対数関数  $\text{Log}_p^{(a)}$  の加法性から

$$\begin{aligned} \epsilon_k^m \left\{ \text{Log}_p^{(a)}(\epsilon_k) \right\}^n &= \epsilon_k^m \left\{ \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon^{\nu_k} u_k^{\frac{p^C r_k}{p^C r_k}}) \right\}^n \\ &= \epsilon_k^m \left\{ \nu_k \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon) + \frac{1}{p^C r_k} \text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) \right\}^n \quad \dots (b) \end{aligned}$$

となりますが, 中括弧の中身の  $p$  進付値は  $k$  に関して有界 となります; 実際,  $\nu_k \in \mathbb{Z}$  ゆえ  $|\nu_k|_p \leq 1$  ですし, 既に注意したように  $\text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) \in p \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  が成り立ちますから  $|\text{Log}_p(u_k^{p^C r_k})|_p \leq p^{-1} \leq 1$  が従います. さらに  $r_k$  は  $p$  と素なので  $|(p^C r_k)^{-1}|_p = p^C$  です. ゆえに  $\left| \nu_k \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon) + \frac{1}{p^C r_k} \text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) \right| \leq \max \left\{ \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon), p^C \right\}$  となり,  $\text{Log}_p^{(a)}(\epsilon_k)$  の  $p$  進付値が  $k$  に依存しない値で上から抑えられます\*20. 最後に, 当然  $|\epsilon_k^m|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  ですから,  $k \rightarrow \infty$  としたときに (b) が 0 に収束することが従います.  $\square$

\*20 この事実は [Col82, Lemma 6.3] の証明で (特に成り立つ理由への言及もなく) 既に用いられていました.

**反例 1.25.** 補題 1.23 の証明は一意化元  $\varpi_\epsilon$  の存在が鍵となっています.  $L_\epsilon$  の分岐指数が無限の場合でも,  $|\varpi|_p < 1$  となる  $L_\epsilon$  の元を 1 つ選べば  $\epsilon_k = \varpi^{\nu_k} u_k$  ( $u_k \in \mathcal{O}_{L_\epsilon}^\times$ ) と表せますが, 一般には  $\varpi$  の指数  $\nu_k$  がすべて整数になるように (分母が出ないように) することは 出来ない のです. このことを踏まえると  $k \rightarrow \infty$  としたときに “急速に  $\nu_k$  に分母が生じる” ような  $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$  を考えると良からぬことが起こりそうです. 実際

$\tilde{\epsilon}_k = p^{k+p^{-2k}}$  により  $\{\tilde{\epsilon}_k\}_{k=1}^\infty$  を定めると, 確かに  $\tilde{\epsilon}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  となっていますが

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_k \operatorname{Log}_p^{(a)} \tilde{\epsilon}_k &= p^{k+p^{-2k}} \operatorname{Log}_p^{(a)} p^{k+p^{-2k}} = p^{k+p^{-2k}} (k + p^{-2k}) \operatorname{Log}_p^{(a)} p \\ &= p^{-k+p^{-2k}} \underbrace{(1 + kp^{2k})}_{\in \mathcal{O}_{L_\epsilon}} \operatorname{Log}_p^{(a)} p \end{aligned}$$

より  $\operatorname{Log}_p^{(a)}(p) = a \neq 0$  なら  $\tilde{\epsilon}_k \operatorname{Log}_p^{(a)} \tilde{\epsilon}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$  となつてしまいます\*21. 極限  $\lim'$  の定義で分岐に制限が課されているのは, この様な “望ましくない状況” を排除するためなのです.

**【定理 1.22 の証明の概略】** 分枝  $a$  の多重ポリログ関数  $\operatorname{Li}_k^{p,(a)}(z)$  は  $z = 1$  のまわりで

$$\operatorname{Li}_k^{p,(a)}(z) = f_0(z-1) + f_1(z-1) \operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1) + \dots + f_m(z-1) \{\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m$$

$$f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} z^j \quad (i = 0, 1, \dots, m) \text{ は } |z|_p < 1 \text{ 上収束する } a \text{ に依存しない 冪級数}$$

という形に “漸近展開” されることが帰納的に証明出来ます ([Fur04, Proposition 2.11] を参照). 右辺に補題 1.23 を適用すると,  $f_i(z-1)$  の高次の項と  $\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)$  の積は  $\lim'_{z \rightarrow 1}$  によって消えてしまいますから

$$\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in X(\mathbb{C}_p)}} \operatorname{Li}_k^{p,(a)}(z) = \lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in X(\mathbb{C}_p)}} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1) + \dots + a_0^{(m)} \{\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m \quad \spadesuit$$

が成り立ちます. 右辺の項で分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存するのは  $\{\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^j$  の部分だけですので, あとは  $\spadesuit$  の右辺が  $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = \dots = a_0^{(m)} = 0$  のときにのみ収束することを示せば十分です ([Fur04, Lemma 2.15] を参照). そのために, 例えば  $|\alpha|_p < 1$  かつ  $\operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha \neq 0$  なる  $\alpha \in X(\mathbb{C}_p)$  を用いて  $\epsilon_k = 1 + \alpha^k$  とおきましょう. これを  $\spadesuit$  に代入すると

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Li}_k^{p,(a)}(\epsilon_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha^k + \dots + a_0^{(m)} \{\operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha^k\}^m \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_0^{(0)} + k a_0^{(1)} \operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha + \dots + k^m a_0^{(m)} \{\operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha\}^m =: \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \end{aligned}$$

となります. 此処で級数の収束の一般論より

\*21  $a = 0$  のとき (即ち  $\operatorname{Log}_p^{(0)}(p) = 0$  のとき) も, 例えば  $\tilde{\epsilon}_k = (p + p^2)^{k+p^{-2k}}$  とおけば, 矢張り  $\{\tilde{\epsilon}_k\}_{k=1}^\infty$  は発散してしまいます.

$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$  が収束 (コーシー列)  $\Rightarrow$  階差数列  $\{\Delta s_k = s_{k+1} - s_k\}_{k=1}^{\infty}$  が 0 に収束

が成り立ちますから, 特に  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$  が収束するならば  $m$  階階差数列  $\{\Delta^m s_k\}_{k=1}^{\infty}$  が 0 に収束する必要があります. ところが  $\Delta^m s_k = (\Delta^m k^m) \times a_0^{(m)} \left\{ \text{Log}_p^{(a)} \alpha \right\}^m = m! a_0^{(m)} \left\{ \text{Log}_p^{(a)} \alpha \right\}^m$  と計算出来ますので,  $\Delta^m s_k$  が 0 に収束するためには  $a_0^{(m)} = 0$  である必要があります. 以下, 帰納的に  $a_0^{(m-1)} = a_0^{(m-2)} = \dots = a_0^{(1)} = 0$  が示せるので, 題意が証明出来ました.  $\square$

同様のテクニックを用いると, 許容指数に対して  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が “ちゃんと収束する” ことも示すことが出来ます;

**定理 1.26** ( $p$  進多重ゼータ値の収束性). 許容指数  $\mathbf{k}$  に対して  $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  は ( $p$  進多重ポリログ関数の分枝  $a$  に依らない値に) 収束する.

**【証明】**\*22  $\mathbf{k}$  が許容指数であることは,  $p$  進多重ポリログ関数のコールマン反復積分表示

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) = (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})-1}} \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})}} \right]_0^z \quad (i_t \in \{0, 1\})$$

に於いて  $\omega_{i_1} = \omega_1, \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})}} = \omega_0$  であることに注意しましょう. また, 積分定数の不定性の問題を無視してしまえば, コールマン反復積分は局所的には “冪級数の原始関数を取る操作” に他なりません. 積分定数のずれは  $\lim'_{z \rightarrow 1}$  での収束性には何ら関係しないので,  $\lim'_{z \rightarrow 1}$  での収束性だけを問題にするのであれば  $\mathbb{D}_1^-(1) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-1|_p < 1\}$  で局所的に積分を計算して確認すれば十分です. ポイントとなるのは  $\mathbb{D}_1^-(1)$  上では  $\omega_0$  が

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} = \{1 + (z-1)\}^{-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n dz$$

と収束冪級数に展開出来る ということです.

さて,  $\text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(z) := (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k}')} \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k}')-1}} \right]_0^z$  と定めると, これも  $p$  進多重ポリログ関数ですから, 定理 1.22 の証明とまったく同様に [Fur04, Proposition 2.11] を用いて  $\mathbb{D}_1^-(1)$  上で  $\text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(z) = \sum_{i=0}^m f_i(z-1) \{ \text{Log}_p^{(a)}(z-1) \}^i$  ( $f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} z^j$  は  $|z|_p < 1$  上定

義された収束冪級数) と表せます. したがって,  $\mathbb{D}_1^-(1)$  上の収束冪級数  $\phi(z), \psi(z)$  が定数のずれを除いて一致することを  $\phi(z) \sim \psi(z)$  という記号で表すことにすると

$$\text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(z) = \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(t) \frac{dt}{t} \right]_0^z \sim \sum_{i=0}^m \int_{\text{Col}}^{(a)} \tilde{f}_i(z-1) \{ \text{Log}_p^{(a)}(z-1) \}^i dz \quad \dots (\spadesuit)$$

\*22 以下の証明は, 安田正大さんのコメントを受けて付けたものです.

が成り立ちます。但し  $\tilde{f}_i(z-1) := \{1+(z-1)\}^{-1} f_i(z-1)$  は  $\mathbb{D}_1^-(1)$  で収束する<sup>べき</sup>冪級数です。次に紹介する補題 1.27 を (♠) の (コールマン) 積分に適用すると

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) \sim (z-1) \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^i h_k^{(i)}(z-1) \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^k$$

$(h_k^{(i)}(z))$  は  $|z|_p < 1$  で収束する<sup>べき</sup>冪級数

となるため、補題 1.23 より  $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) \sim 0$  が従います。□

**補題 1.27.** 任意の  $|z|_p < 1$  で収束する<sup>べき</sup>冪級数  $f(z)$  と任意の  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $|z|_p < 1$  で収束する<sup>べき</sup>冪級数  $h_0(z), h_1(z), \dots, h_m(z)$  が存在して

$$\int_{\text{Col}}^{(a)} f(z-1) \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m dz \sim (z-1) \sum_{k=0}^m h_k(z-1) \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^k$$

が成立する。但し記号  $\sim$  は両辺が定数のずれを除いて一致することを表す。

**【証明】**  $m$  に関する数学的帰納法によって証明します。  $f(z-1)$  を  $f(z-1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-1)^j$

と表すことにすると、先ず  $m=0$  のときは

$$\int_{\text{Col}}^{(a)} f(z-1) dz \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^{j+1}}{j+1} = (z-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^j}{j+1}}_{=: h_0(z) \text{ とおく}}$$

より題意が成り立ちます。  $m > 0$  のときは、部分積分法<sup>\*23</sup> *integration by part* によって

$$\begin{aligned} \int_{\text{Col}}^{(a)} f(z-1) \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m dz &= \int_{\text{Col}}^{(a)} \frac{d}{dz} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^{j+1}}{j+1} \right) \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m dz \\ &= (z-1) \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^j}{j+1} \right)}_{=: h_m(z-1)} \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m \\ &\quad - \underbrace{\int_{\text{Col}}^{(a)} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^{j+1}}{j+1} \right) \cdot m \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^{m-1} \frac{dz}{z-1}}_{\sim (z-1) \sum_{k=0}^{m-1} h_k(z-1) \{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^k \text{ (帰納仮定)}} \end{aligned}$$

より成り立ちます。□

\*23 部分積分は導分のライプニッツ則の“逆操作”に過ぎないため、コールマン積分でも問題なく成り立ちます。

**注意 1.28.** 定理 1.26 の証明は,  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  の  $z = 1$  での漸近展開の定数項を完全に無視して展開されていますが, (定理 1.22 の証明からも分かるように) この無視してしまった定数項こそが  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  に他なりません. 局所的な積分だけを考えていては積分定数の不定性<sup>やは</sup> がまったく制御出来ないため, 矢張り“局所的に項別積分を計算する”という安易な方針では  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  を計算することは出来ず, きちんと 大域的な コールマン反復積分を計算する必要があります. [BBK10] などで展開されているように, コールマン積分は<sup>しばしば</sup> 屢々 タイヒミュラー点 TEICHMÜLLER point (フロベニウス作用による固定点)<sup>つな</sup> を繋ぐ積分を介して計算されますが, 今の状況では考えたいタイヒミュラー点  $0, 1$  がともに  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  に於いて除外されている点であるため, この方針もなかなか一筋縄にはいかなさそうです. というわけで,  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  は, 定義は出来たものの 具体的に数値計算するのは難しい対象 です. 現在では安田正大さんの方法 (詳細は [安田 SS18a] を参照してください) など,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  を数値計算するアルゴリズムが<sup>いく</sup> 幾つか知られています.

### § 1.2.5 KZ 型 $p$ 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{K})$ の基本性質

$p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  は, 「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  にも負けず劣らず多彩な性質を持つ非常に魅力的な研究対象です. その中でも, 「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  との比較の観点から最初に抑えておくべき性質をまとめておきましょう.

- ★  $\mathbf{k}$  が 許容指数 *admissible index* ならば  $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  は  $(\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}))$  に収束する.  
定理 1.26, [Fur04, Theorem 2.18]

「実 / 複素」の場合と対応する性質です. 定理 1.26 では反復コールマン積分を (定数項を無視して) 直接計算し, 補題 1.23 を用いて示しましたが, [Fur04, Theorem 2.18] のように  $p$  進ドリinfeldt 結合子の関数等式 (注意 2.11 を参照) から証明することも出来ます.

- ★  $\mathbf{k}$  が 許容的でない ときは  $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  は 収束したりしなかったりする.  
収束する場合は (代数的に定義された) シャッフル正規化  $p$  進多重ゼータ値<sup>\*24</sup>  $\zeta_p^{\text{KZ},\text{sh}}(\mathbf{k})$  に収束する.

「実 / 複素」の世界では起こらない非常にミステリアスな現象です. 個別の指数  $\mathbf{k}$  に対しては, 原理的には  $p$  進 KZ 方程式の基本解の関数等式 (補題 2.10 (1) を参照) と明

<sup>\*24</sup> 原田遼太郎さんの記事で紹介されている  $\zeta^{\text{sh}}(w_{\mathbf{k}})$  [原田 SS18, Proposition 2.3] と全く同様に定義されます.

示公式 (定理 2.4 を参照) を用いて収束するか否かを判定することが出来ます ([Fur04, Example 2.23] を参照). 端的に説明を試みるならば, 次に紹介する「 $p$  進」世界ならではの現象である  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$  によって,  $\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  を関数等式で書き直したものの“発散項” ( $\{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^j$  の項) が消えてしまう場合に, “生き残った項” がちょうど  $p$  進多重ゼータ値のシャッフル正規化  $\zeta_p^{\text{KZ},\text{m}}(\mathbf{k})$  の定義式と一致している, ということです. ただ, どのような指数  $\mathbf{k}$  に対して  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が収束/発散するかについて, 何か法則性が隠れているのかどうかは分かっておりません. [Fur04, Remark 2.24] では「許容的でない指数  $\mathbf{k}$  に対する  $\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  の収束/非収束の問題は, 数論的に非常に深い何らかの性質を反映しているのではないか」という問題が提起されています.

★  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  は (定義から  $\mathbb{C}_p$  の元だが) 実は  $\mathbb{Q}_p$  の元  
[Fur04, Theorem 2.25]

「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  が, 単に複素数というだけではなく 実数であるという事実と対応する性質です (尤も「実 / 複素」の世界では,  $\zeta(\mathbf{k})$  の級数としての定義から実数であることは当たり前ですが). 証明は, コールマン積分が絶対ガロワ群  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  の作用に関して同変的に振る舞うこと (Amnon BESSER と Rob DE JEU の論文 [BdJ03, Remark 2.3] で指摘されていますが, まあ構成から“当たり前”な気がします) と  $\omega_0 = \frac{dt}{t}$ ,  $\omega_1 = \frac{dt}{t-1}$  がともに  $\mathbb{Q}_p$  有理的な微分形式であることを用いて, 任意の  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  の元  $\sigma$  の作用によって ( $\omega_0, \omega_1$  が固定されるため)  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が不変であることを示すことでなされます. 但し, 容易に想像出来るようにこの議論が機能するのは分枝  $a$  が  $\mathbb{Q}_p$  の元の時のみです. 実際,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の値の分枝非依存性 (定理 1.22) も暗に重要な役割を演じています.

★ 自然数  $k$  に対して  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$  「 $p$  進」世界では “ $\pi^2 = 0$ ”  
[Fur04, Example 2.19 (a)]

「実 / 複素」の世界での “ $\zeta(2k) = \frac{B_k}{2(2k)!} (2\pi)^{2k}$ ” に対応する性質ですが 「 $p$  進」世界では  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k)$  が 0 になってしまうということは特筆すべきでしょう\*25. このことは, コール

\*25 “正標数多重ゼータ値” (「関数体」の世界での多重ゼータ値) でも同様の現象が観察されます. ちなみに  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k)$  が 0 になってしまうのは “ $p$  進」世界のゼータの特色” というよりも “ $\mathbb{C}_p$  という体では  $\pi^2$  に相当する 周期 *period* を捉え切れていない” ことの顕われであると思えるべきかもしれません. 実際, “ $\pi^2$  (あるいは  $\pi$ ) に相当する  $p$  進的な周期も捉えられるような “大きな環” を構成しよう” という着想に基づいて導入されたのが, ジャン-マルク・フォンテーヌ Jean-Marc FONTAINE の  $p$  進周期環  $B_{\text{dR}}$  なのですから.

マンの公式  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = (1 - p^{-2k})^{-1} L_p(2k, \omega_p^{1-2k})$  (第3節の定理 3.24 を参照) と「奇指標  $\chi$  に対しては久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  は恒等的に 0 である」という事実から従います (注意 3.13 も参照; 法  $p$  タイヒミュラー指標  $\omega_p$  は奇指標なので, 当然  $\omega_p^{1-2k}$  も奇指標です). ただ, 「本来  $L$  関数の 負の整数点 での値を補間していた久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の 正の整数点 での値と  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k)$  を結び付けて (このこと自体は非常に面白い現象だと思えますので, 第3節で詳しく解説します), 久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数が恒等的に 0 になるという特殊事情を用いて  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$  を証明する」というのは, どうしても回り<sup>くど</sup>諄い印象が拭えませんが, 多少なりとも“オーバーキル”な印象も受けます. 実際, コールマンの公式や久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数といった“飛び道具”を用いずとも, ドリーニュが「実 / 複素」の世界でドリinfeld 結合子の 2-サイクル関係式と 3-サイクル関係式を用いて  $\zeta(2k) = \frac{B_k}{2(2k)!} (2\pi)^{2k}$  を導き出した手法の「 $p$  進」版を辿ることで, ( $p$  進ドリinfeld 結合子に対する) 2-サイクル関係式と 3-サイクル関係式から  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$  を証明することも出来るようです.

\*  $p$  が奇素数のとき, 自然数  $k$  に対して  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1) \neq 0$  であることは  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-2k)) = 0$  と同値 [Fur04, Example 2.19 (b)]

任意の代数体  $F$  に対してエタール・コホモロジー群  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$  が消滅することは  $F$  と  $p$  に対して レオポルト予想 LEOPOLDT conjecture が成り立つことと同値です ([NSW08, Theorem 10.3.6, Theorem 2.6.9] を参照). 一般に任意の整数  $m \neq 1$  のとき  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))$  が消滅することがペーター・シュナイダー Peter SCHNEIDER により予想されており ([Sch79, p. 192], [KNQ96, Conjecture ( $C_m$ )] を参照),  $m$  捻りレオポルト予想  $k$ -twisted LEOPOLDT conjecture などと呼ばれています. この予想は  $m \geq 2$  の場合は (任意の代数体で) 成り立ち<sup>\*26</sup>,  $F$  が総実代数体の場合は  $m$  が負の奇数のときにも予想が成り立つことが知られています ([Sch79, Sektion 5, Collar 7] を参照). つまり  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$  が自明とならないことは, 最も難しい  $m = -2k$  のときの (Q に対する)  $m$  捻りレオポルト予想 ( $C_{-2k}$ ) と関係しており,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$  が数論的 (或いは岩澤理論的) に非常に深い背景を持つ  $p$  進数であろうことが示唆<sup>ある</sup>されます.

$\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$  の非消滅性と  $(-2k)$  捻りレオポルト予想の同値性は, <sup>やは</sup>矢張りコールマンの公式  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1) = (1 - p^{-2k-1})^{-1} L_p(2k+1, \omega_p^{-2k})$  を用いて  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$  を久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の特殊値  $L_p(2k+1, \omega_p^{-2k})$  に置き替えた上で (定理 3.24 を参照), 有理数体の岩澤主予想 IWASAWA main conjecture [MW84, Wil90] を介して  $p$  進  $L$  関数とエタール・コホモロジー群  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-2k))$  を結び付けることに

\*26 本質的にアルマン・ボレル Armand BOREL 等による  $K_{2m-2}(\mathcal{O}_F)$  の有限性の結果から従います.

よって示されます\*27. ちなみに久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の連続性 (クンマー合同式の一般化; 雑談 3.14 も参照) により,  $k \equiv -k' \pmod{p-1}$  なる自然数  $k'$  に対して  $L_p(2k+1, \omega^{-2k}) \equiv L_p(1-2k', \omega^{2k'}) = \zeta(1-2k') \pmod{p}$  が成り立ちます. したがって  $p$  が正則素数であるか  $(p-1) \mid 2k$  が成り立つときは  $\zeta(1-2k') \not\equiv 0 \pmod{p}$  となるため  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1) = L_p(2k+1, \omega^{-2k}) \neq 0$  が成り立ちます.

最後に, 「実 / 複素」の世界でも  $\zeta(2k+1)$  が超越数か という非常に難しい未解決問題がありますが, 「 $p$  進」世界でもその種の “解析的性質” については何ら分かっています. [Fur07, Remark 2.20 (ii)] では,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$  の非自明性を ドリーニュ-スレ指標  $\chi_{p,2k+1}^{\text{Soul}}: \mathcal{X}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p(2k+1)$  DELIGNE-SOULÉ character [Sou81, Section 1] に関する性質として再解釈されることを引き合いに出して, 「この種の “ $p$  進超越数論的問題” は代数的整数論の問題に帰着出来るのではないか」という問を提出しています.

## §2 $p$ 進結合子と知られている結果・予想など

本節では, KZ 型  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  のより詳しい性質を調べるために, 最初に [ $p$  進] 多重ゼータ値と切っても切れない関係にある [ $p$  進] KZ 方程式 と [ $p$  進] ドリinfeld 結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p$  について簡単に解説します (第 2.1 節). その後,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  とは異なる文脈で導入された ドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  と ドリーニュ結合子  $\Phi_{\text{De}}^p$  の概念を (やや “天下り” 的に) 導入し, 古庄さんの  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  との関係について論じます (第 2.2 節). 最後の第 2.3 節では, これまでに導入してきた  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  や  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  について, 知られている結果や予想をまとめました.

### §2.1 $p$ 進 KZ 方程式と $p$ 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$

本小節では, 「実 / 複素」の世界での多重ゼータ値の理論で重要な役割を演じていた KZ 方程式 および ドリinfeld 結合子の 「 $p$  進版」を考察します. コールマン積分論を “ブラックボックス” として認めてしまえば, 議論の流れは 「実 / 複素」の場合と完全に並行的です (はらだりょうたろう). 本報告集の原田遼太郎さんの記事 [原田 SS18] と比較しながら読むと理解が深まるかと思えます (原田さんの記事 [原田 SS18] で詳しく解説されている部分は随時説明を省略し, 原田さんの記事の該当箇所を引用することにします).

\*27 より詳しくは, 有理数体の  $p$  分岐岩澤加群  $\mathcal{X}_p = \text{Gal}(M_{\{p\}}/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$  ( $M_{\{p\}}$  は  $p$  の外不分岐な  $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$  の最大副  $p$  アーベル拡大) のコホモロジー解釈により,  $m \neq 0$  のときに  $\mathcal{X}_p(m-1)^{\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})}$  が  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))$  のポントリヤーギン双対と同型になります. 岩澤予想は  $p$  分岐岩澤加群 (の特性イデアル) と  $p$  進  $L$  関数を結び付けるものなので, この同型と岩澤予想を介して  $L_p(2k+1, \omega^{-2k})$  の値とエタール・コホモロジー群  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-2k))$  が結び付くのです. 詳細は [KNQ98, Theorem 3.1] を参照してください.

## 記号の規約

以下,  $X(\mathbb{C}_p)$  上の局所解析的関数<sup>\*28</sup> *locally analytic function* のなす環を  $\mathcal{C}_{X(\mathbb{C}_p)}^{\text{la}}$  で表します. また, 各  $a \in \mathbb{C}_p$  に対し,  $X(\mathbb{C}_p)$  上の分枝  $a$  のコールマン関数のなす環を  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  とします. 一般に可換環  $R$  に対して, 2つの不定元  $e_0, e_1$  に関する  $R$  係数非可換冪級数環を  $R\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  で表し, 不定元  $e_0, e_1$  の空語を含む語全体および空語を含まない語全体をそれぞれ  $\{e_0, e_1\}^\times, \{e_0, e_1\}^{\times\times}$  で表します.

**定義 2.1** ( $p$  進形式的 KZ 方程式, [Fur04, Definition 3.2]). 非可換冪級数値の局所解析的関数  $G(e_0, e_1)(z) \in \mathcal{C}_{X(\mathbb{C}_p)}^{\text{la}}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  に関する微分方程式

$$\frac{d}{dz}G(e_0, e_1)(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)G(e_0, e_1)(z) \quad \cdots (\text{KZ})_p$$

を (形式的)  $p$  進クニズニーク-ザモロドチコフ方程式 ( $p$  進 KZ 方程式) *the (formal)  $p$ -adic KNIZHNIK-ZAMOLODCHIKOV equation* と呼ぶ.

勿論  $(\text{KZ})_p$  は, 原田さんの記事で紹介された KZ 方程式 [原田 SS18, Definition 3.1] の「 $p$  進」類似となっています. 原田さんの記事でも解説されていたように, KZ 方程式やドリinfeld 結合子の理論の中核を担っていたのが KZ 方程式の基本解の存在と一意性 でした. 定理 2.2 は「 $p$  進」世界でもまったく同様の主張が成り立つことを主張するもので, この定理のお陰で「実 / 複素」の世界での KZ 方程式やドリinfeld 結合子の理論を, 形式的には“ほぼそのままの形で”「 $p$  進」世界に移植することが可能となるのです.

**定理 2.2** (基本解の存在と一意性, [Fur04, Theorem 3.3, Proposition 3.7]).  $a \in \mathbb{C}_p$  を固定する毎に  $(\text{KZ})_p$  の解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z), G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z) \in \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  で

$$G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} \quad (z \rightarrow 0), \quad G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z) \approx (1-z)^{e_1} \quad (z \rightarrow 1)$$

なる漸近挙動を満たすものが それぞれ唯一存在する. これらを  $p$  進 KZ 方程式の基本解 *fundamental solutions of  $p$ -adic KZ equation* と呼ぶ.

ここで  $z^{e_0}$  や  $(1-z)^{e_1}$  は“形式的な級数展開”

$$z^{e_0} = e^{e_0 \text{Log}_p^{(a)} z} := 1 + \frac{\text{Log}_p^{(a)} z}{1!} e_0 + \frac{(\text{Log}_p^{(a)} z)^2}{2!} e_0^2 + \cdots + \frac{(\text{Log}_p^{(a)} z)^n}{n!} e_0^n + \cdots$$

$$(1-z)^{e_1} = e^{e_1 \text{Log}_p^{(a)}(1-z)} := 1 + \frac{\text{Log}_p^{(a)}(1-z)}{1!} e_1 + \cdots + \frac{\{\text{Log}_p^{(a)}(1-z)\}^n}{n!} e_1^n + \cdots$$

<sup>\*28</sup> 此处では  $z = 0, 1, \infty$  で対数的極を持つことは特に要請していないため  $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  とは違う記号にしましたが, あまり気にする必要はありません (結局  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  係数の解しか考えないので).

で定まる  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元で、記号 “ $\approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$ ” や “ $\approx (1-z)^{e_1} (z \rightarrow 1)$ ” の定義は [原田 SS18, Lemma 3.3] とまったく同様です.  $p$  進対数関数を用いた定義であるため  $z^{e_0}$  や  $(1-z)^{e_1}$  も  $p$  進対数関数の分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存している ことには注意する必要がありますが、分枝  $a$  のコールマン関数  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  の中で議論している以上誤解の恐れはないと思われるので  $a$  への依存性は記号の中に含めていません.

**【定理 2.2 の証明の概略】** 同様なので  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)$  についてのみ議論します.

[一意性について]  $(\text{KZ})_p$  の解であるような  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元で  $\approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$  となるものが  $G_0(e_0, e_1)(z)$ ,  $H_0(e_0, e_1)(z)$  の 2 つ存在すると仮定すると、ライプニッツ則から  $\boxed{\frac{d}{dz} \left[ \{H_0(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0(e_0, e_1)(z) \right] = 0}$  が成り立ちます ([原田 SS18, Lemma 3.3] の証明とまったく同じ計算です). したがって  $C(e_0, e_1) := \{H_0(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0(e_0, e_1)(z)$  は “定冪級数” (つまり  $\mathbb{C}_p\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元) となりますが、 $G_0(e_0, e_1)(z)$ ,  $H_0(e_0, e_1)(z)$  の何れも  $z \rightarrow 0$  で同じ漸近挙動  $\approx z^{e_0}$  を示すことから  $C(e_0, e_1)$  が 1 となることが確認出来ます ([原田 SS18, Lemma 3.3] の証明も参考にしてください).

[存在について]  $(\text{KZ})_p$  の解  $G_0(e_0, e_1)(z)$  で  $G_0(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$  を満たすものが存在するとして  $G_0(e_0, e_1)(z) = P(e_0, e_1)(z)z^{e_0}$  によって  $P(e_0, e_1)(z)$  を定めると、漸近挙動  $G_0(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$  の定義から  $P(e_0, e_1)(z)$  は  $P(e_0, e_1)(0) = 1$  を満たす  $z = 0$  のまわりのリジッド解析的関数となります. そこで  $P(e_0, e_1)(z) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} P_w(z)w$

とおいて  $G(e_0, e_1)(z) = \left\{ 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} P_w(z)w \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} z\}^m}{m!} e_0^m \right\}$  を  $(\text{KZ})_p$  の両辺に代入すると、 $P_w(z)$  に関する微分方程式の族

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z} P_{w'e_0}(z) - \frac{1}{z} P_{e_0w'}(z) \quad (w = e_0w'e_0, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z} P_{w'e_1}(z) \quad (w = e_0w'e_1, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z-1} P_{w'e_0}(z) - \frac{1}{z} P_{e_1w'}(z) \quad (w = e_1w'e_0, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z-1} P_{w'e_1}(z) \quad (w = e_1w'e_1, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = 0 \quad (w = e_0)$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z-1} \quad (w = e_1)$$

を得ます。したがって 分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  を固定する毎に 各  $P_w^{(a)}(z)$  を  $\omega_0 = \frac{dz}{z}$  と  $\omega_1 = \frac{dz}{z-1}$  の反復コールマン積分によって (語  $w$  の長さの短いものから順に) 構成することが出来るので、これらを代入し戻すことで所望の  $(KZ)_p$  の解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  を得ます\*29。 □

**注意 2.3.** 定理 2.2 の主張のうち、特に  $(KZ)_p$  の基本解の 一意性 は、後程定義する  $p$  進ドリinfeld 結合子の諸性質を導き出す際に中心的な役割を演じるわけですが、その証明が「実 / 複素」の世界での議論とまったく同じ手順になっている点は注目に値するでしょう。と言うのも、「 $p$  進」世界でテイラー展開可能な関数 (つまり 局所解析的関数)  $f$  の (外) 微分  $df$  が  $X(\mathbb{C}_p)$  上で恒等的に 0 であったとしても、そのことから  $f$  が局所定数関数 *locally constant function* であることしか帰結されなため、 $\mathcal{C}_{X(\mathbb{C}_p)}^{la} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  で解を考えている限り定理 2.2 の証明中の 二重下線部 の議論が破綻してしまうからです。それにも拘らずこの証明が機能しているのは 解を  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  に制限して 考えているからに他ならず、基本解の一意性の主張に於いてもコールマン積分論\*30は重要な立ち回りを演じているのです。

定理 2.2 では、 $(KZ)_p$  の基本解の抽象的な存在定理を紹介しましたが、基本解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  を具体的に計算してみると  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  は  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  の“母関数”となっていることが観察されます。基本解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  の明示式を紹介するために、ホフマン代数 (或いは  $e_0$  と  $e_1$  についての語) と指数の関係について整理しておきましょう。

### ホフマン代数についての記号の規約

$\mathfrak{H}_{\text{III}} = (\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle, \text{III})$  を (シャッフル積に関する) ホフマン代数とするとき ([金子 SS18, 第 3 節 (10 ページ)] を参照), その部分代数  $\mathfrak{H}_{\text{III}} \supset \mathfrak{H}_{\text{III}}^1 \supset \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$  を  $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}_{\text{III}} e_1$ ,  $\mathfrak{H}_{\text{III}}^0 := \mathbb{Q} + e_0 \mathfrak{H}_{\text{III}} e_1$  で定めます。また, 射影  $\pi^i: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}}^i$  ( $i = 0, 1$ ) を

$$\pi^1: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}} / \mathfrak{H}_{\text{III}} e_0 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}_{\text{III}}^1, \quad \pi^0: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}} / \langle e_1 \mathfrak{H}_{\text{III}} + \mathfrak{H}_{\text{III}} e_0 \rangle_{\mathfrak{H}_{\text{III}}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$$

で定めましょう。端的に言えば、 $e_0, e_1$  の語の形式的な  $\mathbb{Q}$  線型和に対し、 $\pi^1$  は「 $e_0$  で終わる語の項」を取り除く操作を表し、 $\pi^0$  は「 $e_1$  で始まる語の項」と「 $e_0$  で終わる語の項」を取り除く操作を表しています。このとき、(許容的とは限らない) 指

\*29 もちろん 分枝  $a$  の コールマン積分を用いて構成しているため、最終的に得られる関数  $P_w^{(a)}(z)$  や  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  が分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  に依存してしまうわけです。

\*30 より具体的には「コールマン関数環  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  が 一致の定理を満たすように 構成されている」こと (命題 1.19 を参照)。

数と「 $e_1$  で終わる語」(つまり  $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1$  の空語でない<sup>\*31</sup>モニック単項式)の間には

$$(k_1, k_2, \dots, k_r) \longleftrightarrow \underbrace{e_0^{k_r-1} e_1 \dots e_0^{k_2-1} e_1 e_0^{k_1-1} e_1}_{\text{べき}} \dots \text{(IW)}$$

という 1 対 1 対応があります (“*Index-Word correspondence*” の頭文字を取って (IW) と表記することにします; 指数の順序と語の**べき**順序が 逆転している ことに注意してください). この対応の下で, 指数  $\mathbf{k}$  に対応する語を  $w_{\mathbf{k}}$ , 語  $w$  に対応する指数を  $\mathbf{k}_w$  で表します. また, この 1 対 1 対応に基づき,  $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1$  の (空語でない) モニック単項式  $w$  に対して,  $w$  に含まれる  $e_0, e_1$  の**総数**を  $\text{wt}(w)$  と書いて  $w$  の重さ *weight* と呼び,  $w$  に含まれる  $e_1$  の**総数**を  $\text{dep}(w)$  と書いて  $w$  の深さと呼ぶことにしましょう.

以下,  $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1$  の元  $h = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} h_w w$  に対して  $\text{Li}_{\mathbf{k}_h}^{p,(a)}(z) := \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} h_w \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(z)$  と定め

ておきます (便宜的に  $\text{Li}_{\emptyset}^{p,(a)}(z) = 1$  とおきます).

**定理 2.4** (基本解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  の明示公式, [Fur04, Theorem 3.15]).  $(\text{KZ})_p$  の基本解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times \times} J_{p,w}^{(a)}(z)w$  の係数  $J_{p,w}^{(a)}(z)$  は以下の通り;

(ケース 1)  $w \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1$  ( $e_1$  で終わる語) のとき  $J_{p,w}^{(a)}(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(z)$

(ケース 2)  $w = w' e_0^t$  ( $t \geq 1, w' \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1$ ) のとき

$$J_{p,w}^{(a)}(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} \sum_{0 \leq i \leq t} (-1)^i \text{Li}_{\mathbf{k}_{\pi^{-1}(w' \text{ III } e_0^i)}}^{p,(a)}(z) \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} z\}^{t-i}}{(t-i)!}$$

(ケース 3)  $w = e_0^t$  ( $t \geq 0$ ) のとき  $J_{p,w}^{(a)}(z) = \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} z\}^t}{t!}$

此処では, 講演のときと同様に定理 2.4 の主張の中でも, 特に  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  が  $p$  進ポリログ関数の “母関数” であることを示唆する (ケース 1) の証明だけを簡単に紹介することになります. 残りのケースは発散項である  $\text{Log}_p^{(a)} z$  が絡む項を丁寧にから調べる必要があり, 多少技巧的な証明となりますので, 原論文 [Fur04, Theorem 3.15] の証明 (または [原田 SS18, Theorem 5.4] の証明) を参照してください.

**【定理 2.4 (ケース 1) の証明の概略】**  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times \times} J_{p,w}^{(a)}(z)w$  を  $(\text{KZ})_p$  の両辺に代入して  $w \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1$  (“ $e_1$  で終わる語”) の係数を比較すると,  $w$  の “先頭の文字” に応

\*31 空語  $\emptyset$  は空指数  $\emptyset$  と対応すると定めます.

じて微分方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{dz} J_{p,e_0 w'}^{(a)}(z) = \frac{1}{z} J_{p,w'}^{(a)}(z) & (w = e_0 w', w' \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1) \\ \frac{1}{dz} J_{p,e_1 w'}^{(a)}(z) = \frac{1}{z-1} J_{p,w'}^{(a)}(z) & (w = e_1 w', w' \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1) \\ \frac{1}{dz} J_{p,e_1}^{(a)}(z) = \frac{1}{z-1} & (w = e_1) \end{cases}$$

を得ますが, これは ( $\frac{1}{z-1}$  の符号を除けば)  $p$  進多重ポリログ関数を定義する微分方程式に他なりません (命題 1.15 と比べてみましょう). したがって  $w = e_0^{k_r-1} e_1 e_0^{k_{r-1}-1} e_1 \dots e_1 e_0^{k_1-1} e_1$  に対して, 命題 1.16 とまったく同様にして

$$\begin{aligned} J_{p,w}^{(a)}(z) &= \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \omega_1 \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \omega_1 \dots \omega_1 \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_{r-1}-1} \omega_1 \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z \\ &= (-1)^r \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \omega_1 \dots (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_{r-1}-1} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z \\ &= (-1)^{\text{dep}(w)} \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(z) \quad (\text{命題 1.17 (Li)}_{\text{Int}}^{p,(a)} \text{ より}) \end{aligned}$$

が成り立ちます (語の深さの定義から  $\text{dep}(w) = r$  であることに注意しましょう).  $\square$

**注意 2.5.** 「実 / 複素」の世界でも「 $p$  進」世界でも, 多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  は “[ $p$  進] 多重ポリログ関数の  $z = 1$  での特殊値  $\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ ” として表されるのでした. そんな [ $p$  進] 多重ゼータ値の〈母体〉とも呼べる [ $p$  進] 多重ポリログ関数が KZ 方程式の基本解  $G_0(e_0, e_1)(z)$  の係数に現われるのですから, 安易に考えれば “極限  $\lim_{z \rightarrow 1} G_0(e_0, e_1)(z)$ ” の係数に [ $p$  進] 多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  が現われるはずですが; つまり “ $\lim_{z \rightarrow 1} G_0(e_0, e_1)(z)$ ” は [ $p$  進] 多重ゼータ値の母関数 となることが期待されます. これが [ $p$  進] ドリinfeld 結合子 <sup>おおよ</sup> の凡そのイメージです. とは言え  $z = 1$  は [ $p$  進] 多重ポリログ関数や KZ 方程式の基本解  $G_0(e_0, e_1)(z)$  の定義域から外れていますので, 実際には  $z = 1$  での漸近挙動を指定しながら  $z = 1$  への極限を取る, という繊細な操作が必要となります. この操作をやりやすくするために,  $z = 1$  での漸近挙動を指定した基本解 <sup>あわ</sup>  $G_1(e_0, e_1)(z)$  も併せて考えているのです.

**定義 2.6** ( $p$  進ドリinfeld 結合子, [Fur04, Definition 3.12]). 非可換形式的冪級数環  $\mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) := \{G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  を  $p$  進ドリinfeld 結合子 *the  $p$ -adic DRINFELD associator* と呼ぶ.

**注意 2.7.** 先ず  $p$  進ドリinfeld結合子は 変数  $z$  に依存しない定冪級数 (つまり  $\mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元) となります. このことは, ライプニッツ則を用いた形式的計算によって  $\frac{d}{dz} \left[ \{G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \right] = 0$  となることから, コールマン関数に対する一致の定理 (命題 1.19) を用いて正当化されます. 詳細は [Fur04, Remark 3.9], [原田 SS18, Lemma 3.7] を参照してください. また, (基本解  $G_i^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  はそれぞれコールマン関数の分枝  $a$  に依存するにも拘わらず)  $p$  進ドリinfeld結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  はコールマン関数の分枝  $a$  の取り方には 依存しません. というのも, 既に説明したようにコールマン関数は, (発散項として  $p$  進対数関数  $\text{Log}_p^{(a)} z$  が現われる)  $z = 0, 1, \infty$  を中心とした半径 1 の “開円盤”  $\mathbb{D}_0^-(1), \mathbb{D}_1^-(1), \mathbb{D}_\infty^-(1)$  以外の点のまわりでは  $a$  に依存しない収束冪級数展開を持ちます. 一方で  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  が  $z$  に依らないことは既に確認しましたので, 特に  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  を “ $\{G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  の  $z_0 \in \mathbb{C}_p \setminus \{\mathbb{D}_0^-(1) \cup \mathbb{D}_1^-(1) \cup \mathbb{D}_\infty^-(1)\}$  での値である” と考えると, これは  $a$  の取り方に 依らない値 となりますので, 結局  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  もコールマン関数の分枝  $a$  に依らないことが従います (詳細は [Fur04, Theorem 3.10] を参照してください). 最後に, このあと紹介する明示公式 (定理 2.8) により  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  の係数がすべて  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  (の適当な線型和) で表されることが分かりますので,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が  $\mathbb{Q}_p$  の元であったことと併せて  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  が実際には  $\mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元であることも従います.

このようにして構成した  $p$  進ドリinfeld結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  は, 期待通り  $p$  進多重ゼータ値 (正確にはシャッフル正規化された  $p$  進多重ゼータ値) の母関数となっています;

**定理 2.8** ( $p$  進ドリinfeld結合子の明示公式, [Fur04, Theorem 3.30]).  $p$  進ドリinfeld結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  はシャッフル正規化された  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k})$  の母関数となっている. より詳しくは,  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  を  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} I_p(w) w$

と展開したときの係数  $I_p(w)$  は以下のように計算される;

$$I_p(w) = \begin{cases} (-1)^{\text{dep}(w)} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w) & (w \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^0 \text{ のとき}), \\ (-1)^{\text{dep}(w)} \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i \leq s \\ 0 \leq j \leq t}} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_{\pi^0(e_1^i \mathfrak{m} e_1^{s-i} w' e_0^{t-j} \mathfrak{m} e_0^j)})}_{=: \zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k}_w) \text{ と定義}} & \begin{pmatrix} w = e_1^s w' e_0^t, s, t \geq 0, \\ w' \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^0 \text{ のとき} \\ ※ w' \text{ は空語でも良い} \end{pmatrix} \end{cases}$$

実際に  $p$  進ドリinfeld結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  を計算する際には次の命題が用いられます.

**命題 2.9** ([Fur04, Lemma 3.27]). 等式  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) = \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon)$  が成り立つ.

命題 2.9 の証明に用いられる主要な道具は, 基本解  $G_1$  を  $G_0$  で表示する関数等式 (補題 2.10 の (1)) と, 極限操作に関する簡単な補題 (補題 2.10 の (2)) です.

**補題 2.10.**  $(\text{KZ})_p$  の基本解  $G_0(e_0, e_1)(z)$ ,  $G_1(e_0, e_1)(z)$  について以下が成立する.

- (1)  $G_1^{(a)}(\underline{e_0}, \underline{e_1})(1 - z) = G_0^{(a)}(\underline{e_1}, \underline{e_0})(z)$  が成り立つ. [Fur04, Proposition 3.8]  
(2)  $\lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_0} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) = 1$  が成り立つ\*32. [Fur04, Lemma 3.26]

**【補題 2.10 の証明】**

- (1)  $\tilde{z} := 1 - z$  と変数変換すると,  $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(\tilde{z})$  は変数  $\tilde{z}$  に関する KZ 方程式  $(\text{KZ})_p^\sim$  の解となります. したがって  $\frac{d}{d\tilde{z}} = \frac{dz}{d\tilde{z}} \frac{d}{dz} = -\frac{d}{dz}$  に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{z}} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(\tilde{z}) &= \left( \frac{e_0}{\tilde{z}} + \frac{e_1}{\tilde{z} - 1} \right) G_1^{(a)}(e_0, e_1)(\tilde{z}) \quad \cdots (\text{KZ})_p^\sim \\ \therefore -\frac{d}{dz} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z) &= \left( \frac{e_0}{1 - z} + \frac{e_1}{-z} \right) G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z) \end{aligned}$$

より,  $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z)$  は  $(\text{KZ})_p^{\leftrightarrow} : \frac{d}{dz} G(e_0, e_1)(z) = \left( \frac{e_1}{z} + \frac{e_0}{z - 1} \right) G(e_0, e_1)(z)$  という形の  $p$  進 KZ 方程式の解であることが従います (右辺の係数の  $e_0$  と  $e_1$  が入れ替わっている点に注意しましょう). さらに  $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  の漸近挙動に関する特徴付けから  $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon) \approx \epsilon^{e_1}$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) が成り立ちますので,  $p$  進 KZ 方程式の基本解の一意性 (定理 2.2 を参照) により,  $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z)$  は  $(\text{KZ})_p^{\leftrightarrow}$  の基本解  $G_0^{(a)}(e_1, e_0)(z)$  と一致しなければなりません. 以上で題意が示されました\*33.

- (2)  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0}$  ( $z \rightarrow 0$ ) より  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)z^{-e_0} = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} z \tilde{P}_{0,w}^{(a)}(z)w$

と表すことが出来ます ( $\tilde{P}_{0,w}^{(a)}$  は  $z = 0$  の近傍での収束べき級数です). したがって

$$\begin{aligned} \epsilon^{-e_0} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) &= \exp(-e_0 \text{Log}_p^{(a)} \epsilon) \{ G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) \epsilon^{-e_0} \} \exp(e_0 \text{Log}_p^{(a)} \epsilon) \\ &= \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n}{n!} e_0^n \right\} \left\{ 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} \epsilon \tilde{P}_{0,w}^{(a)}(\epsilon)w \right\} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n}{n!} e_0^n \right\} \end{aligned}$$

\*32  $\epsilon^{-e_0}$  が左から掛かっていることに注意. 実際,  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon)\epsilon^{-e_0}$  は “ $\approx \epsilon^{e_0}$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ )” の定義から  $\epsilon \rightarrow 0$  で 1 に収束しますが,  $\epsilon^{-e_0} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon)$  は (証明からも分かるように)  $\lim'_{\epsilon \rightarrow 0}$  でないと収束しません.

\*33 KZ 方程式の基本解の性質を調べる際に用いられる 基本解の一意性に基づく議論 の典型例です.

となりますが、<sup>ここ</sup> 此処で右辺を展開して空でない語の係数を調べると、すべて  $(\epsilon \rightarrow 0$  で収束する項)  $\times \epsilon^m \{\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n$  ( $m \geq 1, n \geq 0$ ) という形の項の線型和となっていることが確認出来ます。したがって補題 1.23 によって、これらの項は  $\lim'_{\epsilon \rightarrow 0}$  で 0 に収束するため、題意が従います (もちろん右辺の定数項は 1 なので)。□

**【命題 2.9 の証明】**  $p$  進ドリinfeld 結合子の定義式 (定義 2.6) および補題 2.10 より

$$\begin{aligned} \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon) &\stackrel{\text{定義 2.6}}{=} \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon) \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \\ &\stackrel{\text{補題 2.10 (1)}}{=} \left\{ \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(e_1, e_0)(\epsilon) \right\} \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \\ &\stackrel{\text{補題 2.10 (2)}}{=} 1 \cdot \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \end{aligned}$$

が成り立ちます。□

**【定理 2.8 の証明の概略】** 命題 2.9 の式の各項  $\epsilon^{-e_1}, G_0^{(a)}(e_1, e_0)(1 - \epsilon), \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  をそれぞれ  $\mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元として展開すると

$$\lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n}{n!} e_1^n \right\} \left\{ 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} J_{p,w}^{(a)}(1 - \epsilon) w \right\} = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} I_p(w) w$$

となります。其処<sup>ここ</sup> で先ず  $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$  の係数を比較してみますと、 $w$  は  $e_0$  で始まる語<sup>語</sup> ですので、左辺の 二重下線部 ( $\epsilon^{-e_1}$  の部分) の高次の項は  $w$  の係数に寄与し得ません。したがって

$$I_p(w) = \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} J_{p,w}^{(a)}(1 - \epsilon) \stackrel{\text{定理 2.4}}{=} (-1)^{\text{dep}(w)} \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(1 - \epsilon)$$

となりますが、右辺の極限值は  $p$  進多重ゼータ値  $(-1)^{\text{dep}(w)} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w)$  の定義そのものなので、 $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$  の係数について題意が成り立つことが示されました。  $w \notin \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$  なる語の係数については、定理 2.4 の証明と同様の巧妙な手法によって計算されます。原論文 [Fur04, Theorem 3.15] の証明<sup>ある</sup> (或いは [原田 SS18, 定理 Theorem 5.10]) を参照してください。□

**注意 2.11.** 対応 (IW) によって語  $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$  と対応する指数  $\mathbf{k}_w$  は許容的指数 *admissible index* であることが簡単に確認出来ますので、上記の計算は指数  $\mathbf{k}$  が許容的であるときに (KZ 型の)  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  が  $(\lim'_{z \rightarrow 1}$  の極限で) 収束することの別証明にもなっています。実際 [Fur04, Theorem 2.18] の証明では、上記の議論によって許容指数に対する  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の収束性が説明されています。

本小節の最後に、 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  がシャッフル積公式 *shuffle product formula* を満たすことを紹介しておきましょう。

**定理 2.12** (KZ 型  $p$  進多重ゼータ値のシャッフル積公式, [Fur04, Corollary 3.46]). KZ 型  $p$  進多重ゼータ値 (およびそのシャッフル正規化) はシャッフル積公式を満たす; 即ち  $\zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k} \sqcup \mathbf{k}') = \zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k})\zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k}')$  が成り立つ.

**【証明の概略】** 原田遼太郎さんの記事 [原田 SS18, Remark 4.3] でも解説されているように,  $p$  進多重ゼータ値 (のシャッフル正規化) がシャッフル積公式を満たすことと  $p$  進ドリinfeld 結合子が 群的元 *group-like element* であること, 即ち  $\mathbb{C}_p$  代数の射

$$\Delta: \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle; e_i \mapsto e_i \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} e_i \quad (i = 0, 1)$$

に対して  $\Delta(\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)) = \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \hat{\otimes} \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  が成り立つことは同値ですので, 後者を示します. そこで  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} (\mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle)$  での KZ 方程式

$$\frac{d}{dz} \hat{G}(z) = \left( \frac{\Delta e_0}{z} + \frac{\Delta e_1}{z-1} \right) \hat{G}(z)$$

を考えると,  $\Delta(G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z))$  と  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  は  $\approx z^{e_0} \hat{\otimes} z^{e_0}$  ( $z \rightarrow 0$ ) を満たす解であることが形式的な計算で確認出来るので (詳細は [Fur04, Proposition 3.43] の証明を参照), KZ 方程式の基本解の一一意性<sup>\*34</sup>から両者は一致します. まったく同様に  $\Delta(G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))$  と  $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  も ( $\approx (1-z)^{e_1} \hat{\otimes} (1-z)^{e_1}$  ( $z \rightarrow 1$ )) を満たす解なので一致することが分かります. したがって

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)) &\stackrel{\text{定義 2.6}}{=} \Delta(G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} \Delta(G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)) \\ &= (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} \hat{\otimes} (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} \cdot (G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)) \hat{\otimes} (G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)) \\ &= (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \\ &= \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \hat{\otimes} \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \end{aligned}$$

が成り立ちます. □

## § 2.2 ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ とドリーニュの $p$ 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$

本小節では, 古庄英和さんによって定義された  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  とは別の流儀で導入された ドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  を,  $p$  進ドリinfeld 結合子  $\Phi_p^{\text{KZ}}(e_0, e_1)$  を用いたやや “天下り” 的な方法で定義し, 古庄英和さんの  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  との関係性を記述します. 本小節ではドリーニュによる  $p$  進多重ゼータ値の理論の詳細には踏み込みませんので, 興味のある方は古庄さんの論文 [Fur07] や ÜnVER の論文 [Ünv13] をご参照ください (数論幾何学やモチーフの哲学に関する予備知識が不可欠な論文ですが).

<sup>\*34</sup> 係数環が複雑になりますが, 定理 2.2 とまったく同様の形式的な議論で正当化出来ます.

**定義 2.13** (ドリーニュ結合子, [Fur07, Theorem 2.8], [De02]). 文字  $e_0, e_1$  に関する非可換冪級数  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1) \in \mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  を, 等式

$$\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) = \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1) \cdot \Phi_{\text{KZ}}^p \left( \frac{e_0}{p}, \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)^{-1} \frac{e_1}{p} \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1) \right) \cdots (\text{KZD})_p$$

によって定め, ドリーニュ結合子 DELIGNE associator と呼ぶ.

ドリーニュ結合子  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  は, その名が示す通り (退化) 結合子 (*degenerate associator*) となっていることが証明されています (第 2.3 節も参照してください). そこで,  $p$  進ドリinfeld 結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  の “許容的な語”  $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$  の係数に (古庄英和さんの意味での)  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w)$  が現れていたことを真似て ドリーニュの多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  を次のように定義しましょう.

**定義 2.14** (ドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値, [Fur07, Definition 2.7]). ドリーニュ結合子  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  を  $\mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の元として展開した際の “許容的な語”  $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$  の係数を  $(-1)^{\text{dep}(w)} \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}_w)$  と定める. 許容指数  $\mathbf{k}$  に対し, この手順で定まる  $p$  進数  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  を ドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値 DELIGNE’s  $p$ -adic multiple zeta values と呼ぶ.

**例 2.15** ([Fur07, Example 2.10]). 等式  $(\text{KZD})_p$  の両辺を展開して, 「深さが小さい語」(つまり, 含まれる  $e_1$  の数が少ない語) から順に係数を比較することにより, 2 種の  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  と  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  の関係が記述出来ます\*35. 例えば深さが 1 のときは

$$\zeta_p^{\text{De}}(k) = \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \zeta_p^{\text{KZ}}(k) \quad (k \geq 2)$$

となることが簡単に確認出来ます. 深さが 2 のときは若干計算が繁雑になりますが,  $k_2 \geq 2$  に対して

$$\begin{aligned} & \zeta_p^{\text{De}}(k_1, k_2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1, k_2) - \frac{(1 - \delta_{k_1,1}) \left(\frac{1}{p^{k_2}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_2)}{1} \\ & \quad - \frac{\sum_{i=0}^{k_1-2} (-1)^i \left(\frac{1}{p^{k_1-i}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \binom{k_2-1+i}{k_2-1} \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1-i) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_2+i)}{1} \\ & \quad - (-1)^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-2} \left(\frac{1}{p^{k_2-j}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \binom{k_1-1+j}{k_1-1} \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1+j) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_2-j) \end{aligned}$$

となることが直接計算によって確認出来ます。但し  $\delta_{k_1,1} = \begin{cases} 1 & (k_1 = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (k_1 \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$  はク

ロネッカーのデルタ記号です; つまり上式の 下線部 は  $k_1 = 1$  のときは 0 と見做しています。もちろん深さ 1 での関係式  $\zeta_p^{\text{KZ}}(k) = \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^{-1} \zeta_p^{\text{De}}(k)$  を右辺に代入して整理することで, KZ 型の  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(k_1, k_2)$  を, 深さが 2 以下のドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値たち (の積) の  $\mathbb{Q}$  線型和で表すことも出来ます。

一般に深さが  $r$  のときには, 対応 (IW) によって許容指数  $\mathbf{k}$  に対応する語  $w_{\mathbf{k}}$  での等式  $(\text{KZD})_p$  の係数を比較すると

$$(-1)^r \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) = (-1)^r \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) + (-1)^r \frac{1}{p^{\text{wt}(\mathbf{k})}} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) \\ + (\text{深さが } r \text{ 未満の } \zeta_p^{\text{KZ}} \text{ と } \zeta_p^{\text{De}} \text{ の積たちの } \mathbb{Q} \text{ 線型和})$$

という形になることは容易に確認出来ます。したがって, 指数  $\mathbf{k}$  の深さ  $r$  に関する帰納法によって  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}), \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  のいずれも, 他方の  $p$  進多重ゼータ値の (積の)  $\mathbb{Q}$  線型和で表せることが従います。その意味で [Fur07] では,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  と  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  を “等しくはないが等価” “*not the same but equivalent*” と表現しています。但し, 非可換冪級数  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  の逆元  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)^{-1}$  の計算も容易ではありませんし,  $(\text{KZD})_p$  の右辺を展開して  $w_{\mathbf{k}}$  の係数を計算する際に “語  $w_{\mathbf{k}}$  の分割の仕方” に纏わる複雑な組合せ論的問題が生じるため, 深さ  $r$  が大きいときに  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  や  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  の一方を, 他方の  $p$  進多重ゼータ値の (積の)  $\mathbb{Q}$  線型和で表す明示式を書き下すことは容易なことではありません。

**雑談 2.16.** 本小節では  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  を等式  $(\text{KZD})_p$  を用いて “天下り” 式に “定義” しましたが, もちろんドリーニュがあるとき突然  $(\text{KZD})_p$  という複雑怪奇な等式を思いついて, 徐におもむろに  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  を定義したわけではありません。それどころか, ドリーニュ結合子  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  の導入は寧ろ古庄英和さんによる  $p$  進ドリinfeld 結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  の定義に先んじており (2002 年のアリゾナ・ウィンタースクールでドリーニュが出題した課題 [De02] の中で既に  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  の構成のアイデアが本質的に紹介されています), ドリーニュ自身も多大な貢献を果たした  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  の 代数的基本群の理論 [De89] を背景としています。たとえば,  $\mathbb{Q}$  上の射影的代数多様体  $X/\mathbb{Q}$  の ( $\ell$  進) エタールコホモロジー  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$  へのフロベニウス作用の特性多項式は, 本質的に  $X$  のハッセ-ヴェイユ・ゼータ関数の  $p$  因子となっており, 数論的に極めて重要な不変量であることは良く知られ

\*35  $\Phi_*^p(e_0, 0) = \Phi_*^p(0, e_1) = 0$ , 即ち「 $\Phi_*^p(e_0, e_1)$  の  $e_0^s, e_1^t$  ( $s, t \geq 1$ ) の項の係数はすべて 0」であることに気を付けましょう (\* = KZ または De とします)。

ています。ドリーニュ結合子  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  は、非常に大雑把に言えばこの良く知られた構成の基本群版 (“非可換版”) を辿って得られるものです; より具体的には、本来  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  は「 $\vec{01} = 1_0 = \mathbf{0}$  と  $\vec{10} = -1_1 = \mathbf{1}$  を繋ぐ “標準的なドラム道” *canonical de Rham path*  $d_{\vec{01}, \vec{10}}$  への (クリスタリン) フロベニウスの作用を記述する冪級数」として定義されるもので、“物理的” な動機から導入された KZ 方程式をルーツとする  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  とはまったくと言って良いほど異なる背景を持つ対象なのです。定義 2.13 の式  $(\text{KZD})_p$  は、本当は出自を異にする 2 つの結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  と  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  の関係を記述する “非自明な等式” として捉えられるべきものです。ドリーニュ結合子  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  やドリーニュの  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  についての詳細は古庄さんの論文 [Fur07, Definition 2.7] や Sinan ÜNVER の論文 [Ünv13] を参照してください。

**雑談 2.17.** 2 つの結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ ,  $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$  を繋ぐ等式  $(\text{KZD})_p$  は非常に複雑な形をしていますが、実は “退化結合子の棲み家” である次数付きグロタンディーク-タイヒミュラー群  $\text{GRT}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \times \text{GRT}_1(\mathbb{Q}_p)$  の積構造

$$\begin{aligned} (\alpha_2, g_2(e_0, e_1)) \circ (\alpha_1, g_1(e_0, e_1)) &= \left( \alpha_1 \alpha_2, g_1 \left( g_2(e_0, e_1) \frac{e_0}{\alpha_2} g_2(e_0, e_1)^{-1}, \frac{e_1}{\alpha_2} \right) \cdot g_2(e_0, e_1) \right) \\ &= \left( \alpha_1 \alpha_2, g_2(e_0, e_1) \cdot g_1 \left( \frac{e_0}{\alpha_2}, g_2(e_0, e_1)^{-1} \frac{e_1}{\alpha_2} g_2(e_0, e_1) \right) \right) \end{aligned}$$

と密接に関係しています; 実際この積 (の第 2 式) を用いると、等式  $(\text{KZD})_p$  は

$$\boxed{(p, \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)) = (p, \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)) \circ (1, \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1))} \quad \cdots (\text{KZD})'_p$$

の第 2 成分を取り出したものと解釈出来ます。(次数付き) グロタンディーク-タイヒミュラー群  $\text{GT}/\mathbb{Q}$ ,  $\text{GRT}/\mathbb{Q}$  については [古庄 16] で分かりやすく解説されていますので、是非参考になさってください ( $\text{GRT}/\mathbb{Q}$  の積構造は定理 1.33(2), 系 2.14 で紹介されています)。

### § 2.3 知られている結果と予想

本小節では  $p$  進多重ゼータ値の概説の締め括りとして、 $p$  進多重ゼータ値について知られている結果や予想などを、特に「実 / 複素」の世界の理論や「有限多重ゼータ値」の理論、或いは「正標数多重ゼータ値」(「関数体」の世界の多重ゼータ値) の理論との比較の観点<sup>ある</sup>を重視しつつ纏めます。

- \*  $p$  進 KZ 結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  は  $\mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  の群元的元 *group-like element* であり、さらに  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \in \exp[\mathbb{L}_{\mathbb{C}_p}^\wedge, \mathbb{L}_{\mathbb{C}_p}^\wedge]$  が成り立つ ( $\mathbb{L}_{\mathbb{C}_p}^\wedge$  はこの後登場しないので、定義は割愛します)。 [Fur04, Proposition 3.43, Theorem 3.45]

この後紹介する結合子関係式 *associator relation* の一部ではありますが、これらは KZ 方程式の基本解の一意性 (定理 2.2 参照) から容易に導き出せます。その事実を強調するため、敢えて結合子関係式と分けて紹介しました。尚、 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  が群元的元であることからシャッフル積関係式 *shuffle product formula* が従うことも既に注意した通りです (定理 2.12 を参照)。ただ、「実 / 複素」世界でのシャッフル積の“幾何的”解釈である「 $\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)$  の積分表示の積分領域  $\Delta^{\text{wt}(\mathbf{k}_1)} \times \Delta^{\text{wt}(\mathbf{k}_2)}$  (但し  $\Delta^k := \{(t_i)_{i=1}^k \mid 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1\}$ ) を標準単体  $\Delta^j$  の和に細分する」という考え方 (金子先生原稿 [金子 SS18, Section 3 の前半] も参照してください) が「 $p$  進」世界では最早通用しないため\*36, 「 $p$  進」世界での  $p$  進多重ゼータ値のシャッフル積関係式は結合子が群元的元であることの帰結として導き出さざるを得ない、という点は注意しておくとも良いかもしれません。

★ 双対性 *duality*:  $w \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$  に対して  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_{\tau(w)}) = \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w)$  が成り立つ。但し  $\tau: \mathfrak{H}_{\text{III}}^0 \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$  は  $e_i \mapsto e_{1-i}$  ( $i = 0, 1$ ) で定義される反自己同型。  
田中立志 [Ta04, 田中 07], 古庄英和

多重ゼータ値の双対性がドリinfeld結合子の 2-サイクル関係式と同値であることは良く知られています。したがって (KZ 型)  $p$  進多重ゼータ値の双対性は、今や  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  の結合子関係式の帰結に過ぎませんが、まだ KZ 型  $p$  進多重ゼータ値が定義されて間もない時期に、田中立志さんが修士論文で  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{K})$  に対して双対性が成り立つことを一早く指摘されていました。田中さんの証明方法は形式的結合子 *formal associator* と呼ばれるホフマン代数係数の非可換冪級数  $\widehat{\Phi}(e_0, e_1) \in \mathfrak{H}_{\text{III}} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  を用いる方法です。形式的結合子とは、大雑把に言えば“実値写像”  $\zeta^{\text{III}}: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathbb{R}; w \mapsto \zeta^{\text{III}}(\mathbf{k}_w)$  によってドリinfeld結合子  $\Phi_{\text{KZ}}(e_0, e_1)$  が得られるような、言わば“普遍的なドリinfeld結合子”とでも呼ぶべき対象です ([田中 07, Section 3] を参照)。一方で形式的結合子の構成と  $p$  進ドリinfeld結合子の明示公式 (定理 2.8) を比較すると、 $\widehat{\Phi}(e_0, e_1)$  の“ $p$  進値写像”  $\zeta_p^{\text{KZ, III}}: w \mapsto \zeta_p^{\text{KZ, III}}(\mathbf{k}_w)$  での像が  $p$  進ドリinfeld結合子  $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  と一致することは直ちに分かります。田中さんは、形式的結合子の段階で“2-サイクル関係式”に相当する関係式が成立することを直接確認することで、 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$  も 2-サイクル関係式を満たすことを示しています。一方で KZ 方程式の基本解の一意性の議論を巧みに用いた古庄英和さんの別証明も知られています (こちらも形式的で非常に分かりやすい証明だと思います; [田中 07, p.p. 173–174] も参照してください)。

\*36 コールマン反復積分はあくまで“コールマン積分を逐次的に実行する”操作を表しているだけであり、「実 / 複素」の世界のように多重積分の逐次積分表示としての解釈は与えられていなかったことに注意してください (「 $p$  進」世界での多重積分の困難性については複シャッフル関係式を紹介する際にも注意します)。

- ★ ドリーニュ結合子  $(0, \Phi_{De}^p(e_0, e_1))$  の結合子関係式  
Sinan ÜNVER [Ünv13, Section 7]
- $p$  進ドリinfeld結合子  $(0, \Phi_{KZ}^p(e_0, e_1))$  の結合子関係式  
古庄英和 [Fur07, Proposition 3.1]

「 $p$  進」世界での結合子関係式は、最初に Sinan ÜNVER によってドリーニュ結合子に対して証明されました。古庄英和さんは、最初は ÜNVER とは独立に（恐らく「実 / 複素」の世界でのドリinfeld結合子の結合子関係式の証明の「 $p$  進」類似を直接辿ることで） $\Phi_{KZ}^p(e_0, e_1)$  の結合子関係式を証明することを計画していたようですが、[Fur07] では結局等式  $(KZD)_p$  を用いて ÜNVER の結果に帰着することで  $\Phi_{KZ}^p(e_0, e_1)$  の結合子関係式を導いています。尚、ドリーニュ結合子は形式的にはコールマン積分論を用いずに定義することが出来ませんが、ÜNVER の結果 [Ünv13] でも 5-サイクル関係式の証明でコールマン積分が用いられている点は注意しておきます。

- ★ 複シャッフル関係式 *double shuffle relation* Amnon BESSER–古庄英和 [BF06]
- 正規化複シャッフル関係式 *regularised double shuffle relation*  
古庄英和–Amir JAFARI [FJ07]

(正規化された) 調和積関係式と (正規化された) シャッフル積関係式を結びつけることで簡単に得られる、「実 / 複素」の世界では良く知られた関係式ですが、「 $p$  進」の世界でもまったく同様の関係式が成り立ちます。——でも、ちょっと待ってください。「シャッフル関係式」の方はともかく\*37、「調和積関係式 *harmonic product formula, stuffle product formula*」は多重ゼータ値の級数表示を掛け合わせたものに対して“和の取り方を変える”ことで得られるものでした。しかるに「 $p$  進」世界では多重ゼータ値の“級数表示”は必ず発散してしまう (!! ) のですから (命題 1.1 を参照)，“複シャッフル関係式”が成立するかどうかを議論する以前に、抑々「調和積関係式」などというものが「 $p$  進」世界で成立し得るのかという課題と真正面から対峙せねばなりません。

この「 $p$  進」世界ならでの困難を克服し、調和積関係式および複シャッフル関係式が「 $p$  進」世界でも成り立つことを示したのが Amnon BESSER と古庄英和の共同研究 [BF06] です。彼等は、(KZ 型)  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{KZ}(\mathbf{k})$  が元々  $p$  進冪級数を由来に持つ  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$  の“ $z \rightarrow 1$  での極限”として与えられていたことに着目し、 $p$  進多

\*37 此処ではシャッフル関係式については簡単に流してしまっていますが、シャッフル積関係式の成立も「 $p$  進」世界では（“結合子を経由しなければ得られない”という意味で）それほど明らかな関係式とは言えない、という点は改めて確認しておいた方が良いでしょう。

重ポリログ関数の段階で

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^p(z_1) \cdot \mathrm{Li}_{\mathbf{l}}^p(z_2) = \left( \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \right) \left( \sum_{0 < m_1 < \dots < m_s} \frac{z_2^{m_s}}{m_1^{l_1} m_2^{l_2} \dots m_s^{l_s}} \right)$$

を計算して「調和積関係式」を導き出し，“解析接続”した上で，その“(z<sub>1</sub>, z<sub>2</sub>) → (1, 1)での極限”として KZ 型 p 進多重ゼータ値の「調和積関係式」を取り出そうと考えました。直観的にも非常に分かり易い戦略ですが，これを実行するためには

◎ 2 変数関数 “Li<sub>k</sub><sup>p</sup>(z<sub>1</sub>)Li<sub>l</sub><sup>p</sup>(z<sub>2</sub>)” の“解析接続”が必要

↪ コールマン積分論の 多変数関数版 を構築しなければならない (!)

◎ 極限“(z<sub>1</sub>, z<sub>2</sub>) → (1, 1)”の取り方に制限を付けないと発散してしまう (第 1.2.4 節で説明した lim' の導入の過程を思い出しましょう)

↪ 高次元 (多変数) の設定でどうやって“極限の取り方”に制限を課すか?

という 2 つの困難を克服する必要があります。前者の困難については，実は [BF06] の研究よりも以前に Amnon BESSER が [Bes02] に於いて，コールマン積分の“淡中解釈”に基づいたコールマン積分論の“多変数化”に成功しており，[BF06] でも BESSER の理論が縦横無尽に用いられています。後者の困難の克服こそが [BF06] の主たる目的の 1 つであり，彼等はドリーニュによる接基点 *tangential base points* の理論を“高次元化”し，極限 (z<sub>1</sub>, z<sub>2</sub>) → (1, 1) の取り方を“高次元化”した接基点を用いて指定することで，KZ 型 p 進多重ゼータ値の「調和積公式」を導き出すことに見事に成功しました (したがって，既に正当化されているシャッフル積公式と組み合わせることで，KZ 型 p 進多重ゼータ値に対する複シャッフル関係式が正当化されたこととなります)。古庄英和と Amir JAFARI の共同研究 [FJ07] は，[BF06] の結果を正規化された p 進多重ゼータ値に拡張したものです。

尚，[BF06, FJ07] が出版された後に，古庄英和さんによる「結合子関係式から正規化複シャッフル関係式が導かれる」という有名な結果 [Fur11, Theorem 0.2] が発表されました\*38。[Fur11] で採用されている戦略は非常に明快で，最初に結合子関係式 (より詳しくは五角形関係式) を用いてバー構成 *bar construction*\*39 の段階で調和積関係式を証明しています。バー構成は有理数体 Q 上で定義されている対象ですので，その“(実数への) 実現”をとることで調和積関係式や (正規化) 複シャッフル関係式が従う，という絡繰りです。[Fur11] では“実数への実現”しか扱われていませんが，“p 進実現”を考えると KZ 型の p 進多重ゼータ値の調和積関係式や (正規化) 複シャッフル関係式が導かれることは，バー構成とコールマン反復積分による ζ<sub>p</sub><sup>KZ</sup>(k) の構成からほぼ明らかです。したがって [Fur11]

\*38 以降の説明は，山本修司さんからの質問コメント，指摘を受けて加筆しました。

\*39 おおざっぱ非常に大雑把なイメージとしては，反復積分が満たす関係式 (例えばシャッフル積公式など) を，反復積分する前の“有理微分形式”の段階で扱えるように定式化したものがバー複体 (バー構成) の理論と言えるでしょう。詳細は，例えば [GF, Section 3.4] などを参照してください。

を用いれば, [BF06, FJ07] で展開された  $p$  進積分論の難しい議論 (コールマン積分論や接基点の理論の高次元化) を回避して (正規化) 複シャッフル関係式を導出することが出来ます. ただ, 「 $p$  進」世界の中だけで調和積関係式や複シャッフル関係式がどのようにして導き出されるかを明らかにした [BF06, FJ07] は, 非常に直接的な証明で分かり易く, 現在に於いても大変意義のある結果だと思えます. また, [Fur11] でも多重ポリログ関数の調和積関係式をバー構成の文脈に持ち込むこと ([Fur11, (3.1), (3.2)] 式を参照) が非常に大きなステップになっていますので, 取り分け「 $p$  進」世界の (正規化) 複シャッフル関係式に於いて <sup>お</sup>多重ポリログ関数が重要な役割を演じている ことに何ら変わりはありません.

★ 次元予想: 数列  $\{d_k^p\}_{k=0}^\infty$  を漸化式  $d_{k+3}^p = d_{k+1}^p + d_k^p$ ,  $d_0^p = 1$ ,  $d_1^p = d_2^p = 0$  で定める (母関数は  $\sum_{k=0}^\infty d_k^p t^k = \frac{1-t^2}{1-t^2-t^3}$ ). このとき, 重さが  $k$  の許容指数に関する  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  たち<sup>\*40</sup>で張られる  $\mathbb{Q}_p$  の  $\mathbb{Q}$  線型部分空間  $\mathcal{Z}_k^p$  の次元は  $d_k^p$  だろう; 即ち  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^p \stackrel{?}{=} d_k^p$  が成り立つだろう.

古庄英和–山下剛 [Ya10, Conjecture 2]

「実 / 複素」世界の多重ゼータ値に対するザギエの次元予想 (金子先生<sup>ここ</sup>の原稿 [金子 SS18, 予想 2.2] を参照) に対応する「 $p$  進」世界での次元予想です. 此処で定義されている次元の数列  $\{d_k^p\}_{k=0}^\infty$  は, ザギエ予想に登場する数列  $\{d_k^{\mathbb{R}}\}_{k=0}^\infty$  と  $d_k^{\mathbb{R}} = d_{k+3}^p$  という関係にあります. これは, 「 $p$  進」世界特有の関係式  $\zeta_p^{\text{KZ}}(2) = \zeta_p^{\text{De}}(2) = 0$  により  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_2^p = 0$  となってしまう分, 漸化式の「初期条件」がザギエ予想のもの<sup>なお</sup>とずれてしまうからです. 尚, 「実 / 複素」の世界では混合テイトモチーフの理論を用いることで次元予想の“上界”の不等式  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}} \leq d_k^{\mathbb{R}}$  が示されていましたが (寺杣–DELIGNE–GONCHAROV の定理; 詳細は萩原啓さんの記事 [萩原 SS18, 定理 1.1] を参照してください), 「 $p$  進」世界でも対応する不等式  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^p \leq d_k^p$  が山下剛さんによって証明されています [Ya10, Theorem 1.3]. 山下さんの証明方針は, Deligne–Goncharov の証明の「 $p$  進」版を辿るもので, 混合テイトモチーフの「 $p$  進実現」を考察する際に高度な  $p$  進ホッジ理論 (“開多様体の  $p$  進ホッジ理論”) が用いられています. 尚, 山下さんは Deligne–Goncharov に倣って “ $p$  進多重  $L$  値” の概念も定義した上で, 次元予想や上界の不等式の結果を “ $p$  進多重  $L$  値” にまで拡張しています ([Ya10, Theorem 1.4] を参照).

最後に, 「 $p$  進」世界の次元予想の数列  $\{d_k^p\}_{k=0}^\infty$  が, 小野雅隆さんの原稿 [小野 SS18] の予想 1.2.1 で紹介されている有限多重ゼータ値の空間  $\mathcal{Z}_k^A$  の次元予想の数列  $\{d_k^A\}_{k=0}^\infty$  と

\*40 空間  $\mathcal{Z}_k^p$  の定義の際に,  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  の代わりに  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  を用いても構いません ( $p$  進多重ゼータ値の“等価性”より; 例 2.15 を参照してください).

まったく同じもの となっていることに注意を喚起しておきましょう\*41. この“奇妙な符合”からも、「 $p$ 進多重ゼータ値」の世界と「有限多重ゼータ値」の世界の間に何やら“密接な関係”があることが窺い知れるのですから。

★ 「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値との関係: 重さが  $k$  の許容指数に関する (通常の) 多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  たちで張られる  $\mathbb{R}$  の  $\mathbb{Q}$  線型部分空間  $\mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}}$  に対し, 対応  $\phi_p = (\phi_{p,k})_k: \mathcal{Z}^{\mathbb{R}} := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{Z}^p := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k^p; \zeta(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$  (または  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ ) は well-defined な  $\mathbb{Q}$  代数の全射準同型写像となるだろう\*42. また  $\phi_p$  の核は  $\zeta(2)$  で生成される部分  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{Z}^{\mathbb{R}}\zeta(2)$  だろう (特に  $\phi_p$  の核は素数  $p$  に依存しない?).  
 —— *falklore?* 古庄英和の予想?

この予想は“ $\zeta_p(2k) = 0$ ”という「 $p$ 進」世界特有の関係式を除いて「実 / 複素」世界の多重ゼータ値と「 $p$ 進」世界の多重ゼータ値は まったく同じ振舞いをする こと、<sup>ある</sup>或いはより突っ込んだ表現をするならば「実 / 複素」の世界と「 $p$ 進」の世界というまったく位相が異なる世界に棲む多重ゼータ値が“本質的に等価なもの”であることを主張する非常に大胆不敵な予想です。一応〈モチーフの哲学〉など、この予想を支える哲学的な根拠(?)は幾つかあるのですが、決定的な証拠があるわけでもなく、まだまだ解決にはほど遠い大予想です。ちなみに「実 / 複素」世界の多重ゼータ値と「有限多重ゼータ値」に対しても、この予想と非常に良く似た形で、核が  $\mathcal{Z}^{\mathbb{R}}\zeta(2)$  であるような well-defined な  $\mathbb{Q}$  代数の全射準同型  $\rho: \mathcal{Z}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{Z}^A; \zeta_S^*(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_A(\mathbf{k})$  が存在することが予想されています (これが有名な金子-ザギエ予想 KANEKO-ZAGIER conjecture です; 詳しくは本報告集の小野さん [小野 SS18, 予想 2.1.3] および関さん [関 SS18] の解説記事を参照してください)。

この予想は“標数 0”の世界では解決の糸口すら見つかりませんが、“標数  $p$ ”の多重ゼータ値 *positive characteristic multiple zeta values* の世界では、驚くべきことに対応する予想のかなりの部分が成り立つことが、最近 <sup>チャンチェユー</sup>張介玉さんと <sup>みしばよしのり</sup>三柴善範さんの共同研究の中で示されました。非常に紛らわしいですが、“標数  $p$ ”の多重ゼータ値とは (金子昌信さんと Don ZAGIER さんにより導入された) 「有限多重ゼータ値」とはまったく別のもので、言うなれば「関数体」の世界の多重ゼータ値です。以下、 $A$  を  $q$  元体  $\mathbb{F}_q$  上の多項式環  $\mathbb{F}_q[\theta]$  とし、 $K$  をその商体とします。  $K$  の“無限素点”に付随する付値  $|\cdot|_{\infty}$  (つまり  $|\theta|_{\infty} = q$  を満たす付値) での  $K$  の完備化を  $K_{\infty} = \mathbb{F}_q((1/\theta))$  とし、 $K_{\infty}$  の代数的閉包  $\overline{K}$  の  $(1/\theta)$  進完備化を  $\mathbb{C}_{\infty}$  とします。関数体と代数体の間に強い類似性が見られること

\*41 小野さんの原稿では  $\mathcal{Z}_k^A$  の予想次元を表す記号  $d_k^A$  は定義されておらず、 $d_{k-3}^{\mathbb{R}}$  が用いられています。

\*42 つまり「実多重ゼータ値の任意の  $\mathbb{Q}$  代数関係式に対し、対応する  $p$  進多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  代数関係式が成立するだろう」ということ。

は古典的に良く知られていますが、リーマンゼータ値の「関数体類似」として、1935年には Leonard CARLITZ [Car35] が カーリッツゼータ値  $\zeta_{A,\infty}(k) \in K_\infty$  の概念を導入してその性質を研究していました。カーリッツゼータ値の多重版として、2004年頃に Dinesh S. THAKUR [Tha04, Section 5.10] が 正標数多重ゼータ値  $\zeta_{A,\infty}(\mathbf{k}) \in K_\infty$  の概念を導入しています\*43。これを  $\infty$  進多重ゼータ値 と呼ぶことにしましょう。張-三柴は、 $K$  の有限素点  $v$  ( $A$  のモニック既約多項式に付随する付値のこと) に対して  $v$  進多重ゼータ値  $\zeta_{A,v}(\mathbf{k}) \in K_v$  [ChaM17, Definition 6.1.1] を “ $v$  進カーリッツ星付多重ポリログ関数” を用いて定義し\*44 ( $K_v$  は  $K$  の  $v$  に関する完備化です)、次の結果を証明しました。

**定理 2.18** ([ChaM17, Corollary 6.4.3]).  $K_v$  の代数的閉包の  $v$  進完備化  $\mathbb{C}_v$  への  $\overline{K}$  の埋め込みを固定し、 $\infty$  進多重ゼータ値  $\zeta_{A,\infty}(\mathbf{k})$  および  $v$  進多重ゼータ値  $\zeta_{A,v}(\mathbf{k})$  の張る  $\overline{K}$  線型空間をそれぞれ  $\overline{\mathcal{Z}}_\infty, \overline{\mathcal{Z}}_v$  とすると、 $\overline{\mathcal{Z}}_\infty \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}_v; \zeta_{A,\infty}(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_{A,v}(\mathbf{k})$  は well-defined な全射  $\overline{K}$  線型写像\*45である。

証明の核心を担うのは アンダーソン-タークルの  $\langle t$ -モチーフ  $\rangle$  の理論  $t$ -motives introduced by Greg W. ANDERSON and Dinesh S. THAKUR という「関数体」の世界特有の  $\langle$ モチーフ  $\rangle$  理論です。そのためもちろん彼等の証明を “標数 0” の世界に直接逆輸入することは出来ませんが、「関数体」の世界の多重ゼータ値<sup>なお</sup>に対しても或る種の  $\langle$ モチーフ  $\rangle$  が主要な役割を演じていることは注目に値するでしょう。尚、既に指摘したように、彼等は  $t$ -モチーフの理論に加えてカーリッツ対数関数の「多重版」および「 $v$  進版」を主要な道具立てとして積極的に用いており、 $[p$  進] 多重ゼータ値の理論に於いて  $[p$  進] 多重ポリログ関数が重要な役割を演じていたことと符合している点も見逃せません。

\*43 金子-ザギエの有限多重ゼータ値  $\zeta_A(\mathbf{k})$  と記号まで紛らわしいですが、[ChaM17] の記法に倣<sup>なら</sup>って “ $A$ ” の記号をローマン体で表記することにし、さらに下付き添字  $\infty, v$  などを付けることで区別してみました。

\*44 タークルも [Tha04, Section 5.10] で  $v$  進多重ゼータ値を定義していますが、(両者に何らかの関係があることは期待されているものの) まったく同じものではないそうです。

\*45 (三柴義範さんからのコメント) 張の直和性定理 [Cha14, Theorem 2.2.1. (1)]  $\overline{\mathcal{Z}}_\infty \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \overline{\mathcal{Z}}_{\infty,k}$  ( $\overline{\mathcal{Z}}_{\infty,k}$  は重さ  $k$  の  $\infty$  進多重ゼータ値の張る  $\overline{K}$  線型空間) により  $\overline{\mathcal{Z}}_\infty$  には次数付き代数の構造が入りますが、 $\overline{\mathcal{Z}}_v$  に次数付き代数の構造が入るかどうかはまだ明らかではなく、特にこの全射が  $\overline{K}$  代数の準同型であるかは分かっていません。また、この写像の核も完全には決定されていません ([ChaM17, Remark 6.4.4] も参照)。

★  $p$  進整性: 指数  $\mathbf{k}$  に対し  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbf{k})]}$  が成り立つ. 特に  $p > \text{wt}(\mathbf{k})$  ならば  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}_p$  が従う. 但し  $(p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbf{k})]}$  は  $\left\{ \frac{p^j}{j!} \mid j \geq \text{wt}(\mathbf{k}) \right\}$  が生成する  $\mathbb{Q}_p$  の  $\mathbb{Z}_p$  部分加群 (“PD<sup>\*46</sup>イデアル”と呼ばれています).

赤木和真–広瀬稔–安田正大 [AHY, 赤木 17]

Andre CHATZISTAMATIOU [Chat17, Corollary 5.5]

金子昌信–Don ZAGIER の有限多重ゼータ値への応用:  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  の法  $p$  還元と  $\zeta_A(\mathbf{k})$  との関係, 有限多重ゼータ値の空間の次元の上界評価  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^A \leq d_k^A$  への応用  
赤木和真–広瀬稔–安田正大 [AHY, 赤木 17] + David JAROSSAY [Jar15, (1.4.7)]

$p$  進多重ゼータ値に関する最近の進展の中でも最もホットな話題の 1 つです.  $p$  進多重ゼータ値の “ $p$  進整性” に関しては, 当初から古庄英和さんが問題にされていました (古庄さんは  $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}_p$  と予想していたようです; [古庄 03, p.42 ②]などを参照) が, 近年 Andre CHATZISTAMATIOU<sup>\*47</sup> の研究と赤木和真, 広瀬稔, 安田正大の 3 氏による共同研究に於いて独立に同じ形の “ $p$  進整性” の結果が得られています.

[AHY] では  $p$  進多重ゼータ値の  $p$  進整性に留まらず,  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  の “法  $p$  還元” と有限多重ゼータ値  $\zeta_A(\mathbf{k})$  を結び付け,  $p$  進多重ゼータ値の空間  $\mathcal{Z}_k^p$  の次元評価についての山下剛さんの結果を用いることで有限多重ゼータ値の空間  $\mathcal{Z}_k^A$  の次元を評価することを試みています. その途中で “予想” として登場する, 或る種の調和和と (ドリーニュの)  $p$  進多重ゼータ値の関係式 [Jar15, (1.4.7)] が, 近年 David JAROSSAY によって証明されたため, 両者の結果を合わせることで現在では  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^A$  の次元評価も得られているのです.

本項目のより詳しい内容に関しては, [AHY] の執筆者の 1 人である安田正大さんの記事 [安田 SS18b] で解説されています. この結果が生み出された背景や経緯についても詳しく書かれた, 1 つの大理論が生み出されるまでのドキュメントとしての側面も持つ大変興味深い記事です, 興味を持たれた方は, 本稿に引き続き是非安田さんの解説記事もお楽しみください. また, JAROSSAY の公式を応用した “一般化金子–ザギエ予想” の壮大な構想については, 関真一朗さんが矢張り本報告集の解説記事 [関 SS18] の中で熱く語っていらっしやると思いますので, そちらもお見逃しなく.

\*46 フランス語 “puissances divisées” (divided power) にちなんだ名称.  $p$  の冪乗  $p^n$  を  $n!$  で割ったものを divided power と呼びます. “分母を持つ  $p$  冪” 程度の意味です.

\*47 綴り字 “ch” はギリシア・アルファベットの  $\chi$  (カイ, キー) のローマ字表記であるため, 発音を無理矢理カタカナ表記するのであれば “カチスタマチウ” といった感じになるようです.

### §3 $p$ 進 [多重] $L$ 関数とコールマン型の公式

本節では  $p$  進 [多重] ゼータ値の話題から少し離れて、 $p$  進 [多重]  $L$  関数  $p$ -adic [multiple]  $L$ -function について論じます。歴史的には (1 変数の)  $p$  進  $L$  関数 (久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数)  $L_p(s, \chi)$  は、 $p$  進 [多重] ポリログ関数の “ $z = 1$  での値” として導入される (古庄さんの)  $p$  進 [多重] ゼータ値よりもずっと以前に構成されており、既に岩澤理論 IWASAWA theory など整数論の諸分野に多大な影響を与える存在でした。 $p$  進  $L$  関数の理論は、これまで概観してきた  $p$  進 [多重] ゼータ値の理論とはかなり趣が異なるものの、それでいて大変魅力的なものとなっています。「ディリクレ  $L$  関数の 負の整数点 での値を補間する “唯一の関数” としての  $p$  進  $L$  関数の “定義” (または特徴付け) の段階で、 $p$  進 [多重] ゼータ値の纏う雰囲気とは 些か異なる印象 を持たれる方が多いでしょう。しかしながら コールマンの公式 (定理 3.24) によって、「実 / 複素」の世界と同様に  $p$  進  $L$  関数の 正の整数点 での値が (古庄英和さんの意味での)  $p$  進ゼータ値と結びつく (!) というのですから驚くより他にありません。本節ではそんな  $p$  進 [多重]  $L$  関数の織り成す魅惑の世界を存分に味わっていただければと思います。第 3.0 節では (1 変数の)  $p$  進  $L$  関数の 補間性質 *interpolation property* による特徴付けを紹介します。第 3.1 節では、 $p$  進 [多重]  $L$  関数を構成するために必要な  $p$  進測度論  $p$ -adic measure theory を概観し、第 3.2 節では古典的な 1 変数の場合の理論を若干詳しく考察します。第 3.3 節では、 $p$  進多重  $L$  関数に関する古庄英和、小森靖、松本耕二、津村博文による最近の共同研究 [FKMT17b] の概要を簡単に紹介します。

#### §3.0 「 $p$ 進」世界で “ゼータ関数” をどう “定義” するか?

多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  を特殊値として持つ オイラー-ザギエ型多重ゼータ関数  $\zeta(\mathbf{s})$  *multiple zeta function of EULER-ZAGIER type* は、複素 変数  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r)$  に対して

$$\zeta(\mathbf{s}) := \zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s}) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \quad \dots \text{(EZ)}$$

で定義される (多変数) 複素関数で、 $\mathbb{C}^r$  の適切な領域  $\mathcal{D}_r$  で絶対収束し、積分表示を用いて  $\mathbb{C}^r$  全体へと有理型に解析接続されるのでした (詳細は小野塚友一さんの解説記事 [小野塚 SS18, Proposition 2.1] を参照; 本稿の第 3.3.1 でも触れています)。斯様な関数  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の 「 $p$  進」世界での対応物を考察するにはどうすれば良いのでしょうか? ——単に変数を  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_p^r$  や  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}_p^r$  のような 「 $p$  進」変数に取り替えるだけでは巧くいきそうにありません (命題 1.1 でも見たように、「 $p$  進」世界では  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$  であっても “ $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{k})$ ” は発散してしまうのですから)。一方で、今回は “指数”  $\mathbf{s}$  を動かしたいのですから、指数が  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$  で固定された関数である 多重ポリ

ログ関数  $\text{Li}_k(z)$  を用いる, という手段も封じられています\*48. 斯くして「 $p$  進」世界で“ゼータ関数”の対応物を構成するのは, 見た目よりもずっと難しい問題 となっていることが実感出来るかと思えます.

ところで  $r = 1$  のとき (つまり  $s = (s)$  のとき) は, オイラー-ザギエ型多重ゼータ関数  $\zeta_{EZ}(s)$  は リーマンゼータ関数 RIEMANN zeta function  $\zeta(s)$  に他なりません, その負の整数点での特殊値 は 関-ベルヌーイ数 SEKI-BERNOULLI number  $B_k$  による明示的な表示

示  $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$  ( $k \geq 1$ ) を持っていたのでした. 但し, 此处では関-ベルヌーイ数は母関数  $\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$  によって定義されるものを採用しています. 特にリーマンゼータ関数の負の整数点での値は 有理数 となりますので, 「実 / 複素」の世界でも「 $p$  進」の世界でも意味のある値となっています.

「 $p$  進」世界で“ゼータ関数”を“定義”する (或いは“特徴付ける”) 際に活躍するのが, (1 変数) 複素関数論でも非常に重要な役割を演じていた 一致の定理 identity theorem です (円盤上のリジッド解析的関数については定義 A.8 を参照してください).

**命題 3.1** ( $p$  進一致の定理). 中心  $a$ , 半径  $r > 0$  の円盤  $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  上定義されたリジッド解析的関数  $f(z), g(z)$  を考える. 円盤  $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  に集積点を持つ点列  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  に対して  $f(z_k) = g(z_k)$  ( $\forall k \geq 1$ ) が成り立つならば,  $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  上のリジッド解析的関数として  $f = g$  が成り立つ (複号同順).

**【証明】** 証明中に現れる複号は同順であるとします. 以下では  $f$  と  $g$  を  $f-g$  と  $0$  に取り替えて, 円盤  $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  に集積点を持つ点列  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  に対して  $f(z_k) = 0$  ( $\forall k \geq 1$ ) を満たすような  $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  上のリジッド解析的関数が零関数であることを示します. また, 適当に  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  の部分列に取り替えることで,  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \alpha \in \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  かつ  $z_k \neq \alpha$  ( $\forall k \geq 1$ ) が成り立つと仮定しても一般性を失いません. このとき  $f$  が零関数でない<sup>ま</sup>と仮定して矛盾を導きましょう. 先ず  $\alpha \in \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  であったことから, 命題 A.11 によって  $f$  は点  $z = \alpha$  のまわりで ( $\mathbb{D}_a^{\pm}(r) = \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  で収束する) テイラー展開

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n(z-\alpha)^n + c_{n+1}(z-\alpha)^{n+1} + c_{n+2}(z-\alpha)^{n+2} + \dots \quad (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_n \neq 0) \\ &= (z-\alpha)^n \{c_n + c_{n+1}(z-\alpha) + c_{n+2}(z-\alpha)^2 + \dots\} =: (z-\alpha)^n h(z) \end{aligned}$$

を持ちます (上記のような  $n$  の存在は,  $f$  が零関数ではないという仮定によるものです). 此处

\*48 <sup>そもそも</sup> 抑々 多重ポリログ関数  $\text{Li}_k(z)$  の「 $p$  進版」はあくまで  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_k^p(z)$  であって, “ $p$  進多重ゼータ関数”とは到底呼ばれませんよね.

で  $h(z) = (z - \alpha)^{-n} f(z)$  は  $h(\alpha) = c_n \neq 0$  を満たす  $\mathbb{D}_\alpha^\pm(r)$  上の解析的関数となります\*49. 一方で  $f(z_k) = 0$  かつ  $z_k \neq \alpha$  より  $h(z_k) = 0$  ( $\forall k \geq 1$ ) が成り立ちます. したがって解析的関数の連続性から  $h(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(z_k) = 0$  が従うはずですが, これは  $h(\alpha) \neq 0$  であったことと矛盾します. したがって背理法により  $f(z)$  が零関数であることが示されました.  $\square$

**注意 3.2.**  $p$  進ワイエルシュトラスの準備定理 *p-adic WEIERSTRASS preparation theorem* により,  $\mathbb{Z}_p$  係数の形式的冪級数  $f(T)$  は  $p$  の或る非負整数冪  $p^\mu$  と多項式  $g_f(T)$  で  $g_f(T) \equiv T^{\text{ord}(g)} \pmod{p\mathbb{Z}_p}$  を満たすもの (特殊多項式 *distinguished polynomial* と呼ばれています), および  $\mathbb{Z}_p[[T]]$  の可逆元\*50  $u(T)$  の積  $f(T) = p^\mu g_f(T) u(T)$  の形に一意的に分解することが出来ます.  $f(t)$  の零点は多項式  $g_f(T)$  の零点と一致するため, 特に有限個であることが従います.  $p$  進  $L$  関数は  $\mathbb{Z}_p[[T]]$  (或いは分母を少し付け加えたもの) の元として構成出来るため,  $p$  進ワイエルシュトラスの準備定理を用いて命題 3.1 を証明することも出来ます ([落合 14, 命題 2.21] を参照).  $p$  進ワイエルシュトラスの準備定理自体は, 所謂 “(ワイエルシュトラスの) 割り算定理” と  $p$  進位相の完備性を用いた比較的簡単な代数的議論で証明出来るため (例えば [落合 14, 定理 2.13] を参照),  $p$  進ワイエルシュトラスの準備定理を用いた証明の方が分かり易いと思われる方も多いかもしれませんが, 本稿では敢えて複素関数論での一致の定理の証明 [Ahl78, p.p.126–127] との比較を重視した証明を採用しました. 実際, 命題 3.1 の証明を [Ahl78, p.p.126–127] (の前半部) と見比べてみると, 殆んど同じ議論で証明が進んでいることが見て取れると思います.  $p$  進数体 (の代数的閉包の完備化)  $\mathbb{C}_p$  は, 有理数体  $\mathbb{Q}$  の完備化であるという点で複素数体  $\mathbb{C}$  と非常に良く似通っているため (図 1 も参照),  $p$  進解析 (“ $p$  進” 世界での解析学) も最初は複素関数論との類似に着目して研究が進められました. そのため  $p$  進解析を勉強すると, 複素関数論と非常に良く似た定理や命題を数多く見ることが出来ます.

一方で複素関数論と “ $p$  進” 世界の解析の間の 超えることの出来ない壁 (複素解析的

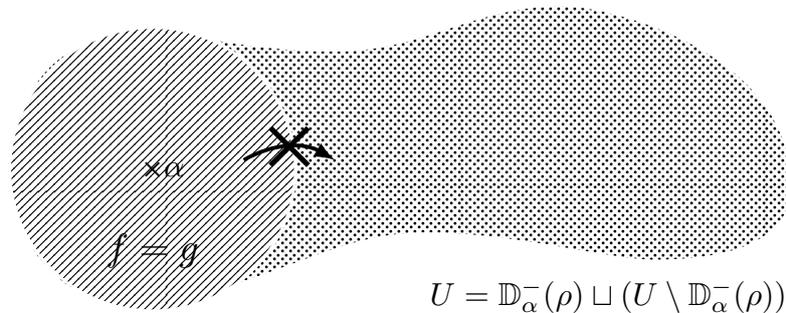


図 3  $p$  進一致の定理の証明の限界: “収束円盤” での結果をその外側に拡張することが出来ない

\*49 実際,  $|c_j|_p \rho^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  が成り立つならば  $|c_{n+j}|_p \rho^j = \rho^{-n} \cdot |c_{n+j}|_p \rho^{n+j}$  も 0 に収束します.  $h(z)$  の  $(z - \alpha)^j$  の係数は  $c_{n+j}$  なので,  $h(z)$  も  $f(z)$  と同じ収束条件を満たすことが分かります.

手法の“限界”)も認識しておくことは非常に大切です。例えば複素関数論では、一致の定理は最終的に  $f, g$  が定義されている 領域 上での主張へと拡張されますが、「 $p$  進」世界では円盤上での主張から拡張することは出来ません。複素関数論では、最後に 連結性 *connectedness* の議論によって、 $f = g$  が成り立つ範囲を集積点  $\alpha$  でのテイラー展開の収束円盤から  $f, g$  の定義領域へと拡張していましたが (抑々“領域”という用語自体が 連結な開集合を指していました)。ところが「 $p$  進」世界は 完全不連結 *totally disconnected* な世界ですので (命題 A.6 を参照),  $f, g$  の定義されている開集合は 連結とはなりえず、したがって  $f = g$  が成り立つ範囲を  $\alpha$  を中心とする円盤の外に延ばすことが出来ないのです (図 3 も参照)。一致の定理は、複素関数論に於ける 解析接続 *analytic continuation* の理論の基礎付けを与える定理でした。第 1.2.3 節で「 $p$  進」世界では (素朴な意味での) 解析接続 は出来ないことを解説しましたが、解析接続の理論の 礎たる一致の定理を証明する際の (位相に纏わる) “限界” もまた、「 $p$  進」世界での解析接続の難しさを示唆しているのです。

さて、 $p$  と  $p-1$  は互いに素な整数なので、自然数  $\mathbb{N}$  の集合  $\{k \in \mathbb{N} \mid k \equiv 0 \pmod{p-1}\}$  は  $p$  の高い冪乗を幾らでも含みます。特にこの集合は  $\mathbb{D}_0^-(1)$  の中に集積点  $0$  を持ちます。したがって、もし (適当な  $r \geq 1$  に対して)  $\mathbb{D}_0^-(r)$  上定義された  $s = 1$  でのみ  $1$  位の極を持つ  $p$  進有理型関数  $\zeta_p: \mathbb{D}_0^-(r) \rightarrow \mathbb{C}_p$  で、各  $k \in \mathbb{N}, k \equiv 0 \pmod{p-1}$  に対して ( $\mathbb{C}_p$  の部分体である  $\mathbb{Q}$  での等式として)

$$\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k) \left( = -(1-p^{k-1})\frac{B_k}{k} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 0 \pmod{p-1} \quad \dots (IP)_\zeta$$

を満たすものが 存在するとしたら、斯様な関数  $\zeta_p(s)$  は  $(IP)_\zeta$  という性質を満たす 唯一つの  $s = 1$  でのみ  $1$  位の極を持つ  $p$  進有理型関数として特徴付けられる こととなります; 実際  $p$  進一致の定理 (命題 3.1) を  $\mathbb{D}_0^-(r)$  上の解析的関数  $(s-1)\zeta_p$  に適用することで一意性が導かれるのです。この  $\zeta_p(s)$  は リーマンゼータ関数の負の整数点での特殊値を「 $p$  進的に」補間している ので、まさしく リーマンゼータ関数の「 $p$  進」世界での対応物 (“ $p$  進リーマンゼータ関数”) と呼ぶに相応しい対象であると言えるのではないのでしょうか?

等式  $(IP)_\zeta$  は、関数  $\zeta_p(s)$  を “「 $p$  進」世界のリーマンゼータ関数” として特徴付けている性質と見做すことが出来るため、屢々  $p$  進ゼータ関数 (より一般には  $p$  進  $L$  関数) の 補間性質 *interpolation property* と呼ばれます。もちろん補間性質  $(IP)_\zeta$  や後の定理-定義 3.11 で紹介する  $(IP)_{KL}$  を満たすような ( $s = 1$  でのみ  $1$  位の極を持つ)  $p$  進有理型関数や  $p$  進正則関数が 存在することは まったく自明ではなく、したがって「 $p$  進」世界で“ゼータ関数”や“ $L$  関数”を考察する際には、先ず  $p$  進ゼータ関数 /  $p$  進  $L$  関数の構成 自体が 非自明な問題 とな

\*50  $\mathbb{Z}_p[[T]]$  の可逆元は、定数項が  $\mathbb{Z}_p$  の単数であるものとして特徴付けられます ([落合 14, 補題 2.15] を参照)。

ります。この辺りの事情は、適当なディリクレ級数 (の有理型解析接続) を  $L$  関数の“定義”とする「実 / 複素」世界の古典的な  $L$  関数の理論とは大きく立場を異ことにしています。それどころか、補間性質  $(IP)_\zeta$  や  $(IP)_{KL}$  を満たす関数を作り出さえすれば、それは ( $p$  進一致の定理 3.1 により) “自動的に”  $p$  進ゼータ関数 /  $p$  進  $L$  関数になってしまうのですから、 $p$  進ゼータ関数 /  $p$  進  $L$  関数の構成法は 複数存在し得る ことになります。実際、この後の第 3.2 節で紹介する 久保田–レオポルトの  $p$  進  $L$  関数 KUBOTA–LEOPOLDT  $p$ -adic  $L$ -function に限っても、久保田–レオポルトが最初に提示した構成法 [KL64] (雑談 1.4 も参照してください) を筆頭に、AMICE–FRESNEL による方法 [AF72], “スティッケルベルガー元の極限” として構成する岩澤健吉のスティッケルベルガー構成 ([落合 14, 3.2.3 項] を参照), MAZUR によるベルヌーイ分布を用いた  $p$  進測度論的構成 ([Ko77, Chapter II] を参照; 雑談 3.23 でも簡単に触れています), WASHINGTON によるフレヴィッツゼータ関数の特殊値の  $p$  進補間を経由する方法 ([Was97, Section 5.2] を参照), 円単数のノルム整合系のコールマン冪級数を用いたコールマン–岩澤の構成 ([落合 14, 3.2.3 項], [坂内 02] を参照), さらにアイゼンシュタイン級数の定数項にディリクレ  $L$  関数の負の整数点での特殊値が現われることに着目して、アイゼンシュタイン級数の合同式 (或いはそれを用いた極限操作により得られる  $p$  進アイゼンシュタイン級数) を介して  $p$  進  $L$  関数を構成する方法 ([Ser73, 長岡 SS05] を参照;  $p$  進モジュラー形式  $p$ -adic modular forms の理論の先駆けであり、後の Pierre R. DELIGNE と Kenneth A. RIBET による大理論 [DR80], [大下 SS14, 付録 C] のプロトタイプとも言える手法です) など、非常に沢山の構成法が知られています。これらの構成法にはそれぞれ長所短所があり、取り分け 岩澤理論 IWASAWA theory などの分野では、場面に応じて様々な構成法を使い分けることで、あの様な多彩な理論が展開されてきたと言っても過言ではないでしょう。第 3.2 節では数ある久保田–レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の構成法の中から、 $p$  進ゼータ関数の正の整数点での特殊値 と第 2 節まで概観した (KZ 型)  $p$  進ゼータ値  $\zeta_p^{KZ}(k)$  との関係調べるのに非常に適した コブリッツの構成法 [Ko79, Ko80] を紹介します。

**雑談 3.3.** 補間性質  $(IP)_\zeta$  や定理-定義 3.11 で紹介する補間性質  $(IP)_{KL}$  による  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  の特徴付けは「実 / 複素」世界では“まったく意味をなさない” ことには注意しておく必要があるでしょう。実際、 $g(s)$  を  $\mathbb{C}$  上の任意の正則関数として

$$f(s) = e^{g(s)} s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{s}{3}\right)^3 + \dots + (-1)^k \frac{1}{k}\left(\frac{s}{k}\right)^k}$$

と定めると、 $f(s)$  は任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $f(1-k) = 0$  を満たす整関数となります (WEIERSTRASS の無限乗積の理論; [Ahl78, Chapter 5, Theorem 7] を参照)<sup>\*51</sup>。したがって関数  $(1-p^{-s})\zeta(s) + f(s)$  もまた  $(1-p^{-s})\zeta(s)$  と同じ「負の整数点での特殊値」を持つ、 $s=1$  でのみ 1 位の極を持つ有理型関数となります。関数  $f(s)$  は正則関数  $g(s)$  の選び方の分だけ任意性を持ちますので、リーマンゼータ関数と同じ「負の整数点での特殊値」を持つ複素有理型関数は 非可算無限個存在する こととなり、補間性質  $(IP)_\zeta$  (或いは  $\mathbb{Z}$  の

部分集合  $\{1 - k \mid k \equiv 0 \pmod{p-1}\}$  での  $(1 - p^{-s})\zeta(s)$  の特殊値) はリーマンゼータ関数をまったく特徴付けていません。斯くして「実 / 複素」の世界では (適切な) デイリクレ級数の有理型解析接続である ということ自体が「ゼータ関数である」ことを特徴付ける非常に重要な要素となるのです。一方の「 $p$  進」世界は, [多重] デイリクレ級数がまったく収束してくれない (命題 1.1) という意味で “ゼータ関数との相性が非常に悪い” 世界ですが, そんな「 $p$  進」世界では, 我々が散々悩まされ続けてきた  $p$  進位相の “悲劇的な” 性質を逆手に取って “ゼータ関数の整数点での特殊値を  $p$  進的に補間する” という性質のみでゼータ関数が特徴付けられる——この或る種の “逆転現象” は実に興味深いと思います。

### § 3.1 記号等の準備: $p$ 進測度論速習コース

本小節は, 本節の後半 (第 3.2 節および第 3.3 節) での議論で用いられる記号や諸概念の纏めです。特に  $p$  進  $L$  関数の構成の際に非常に有用な  $p$  進測度論 について若干詳しく説明しました。“1 変数版” の  $p$  進測度論はコブリッツの論文 [Ko79] の Section 1 や書籍 [Ko80, Section 2] にも分かりやすく纏められていますので, 是非参考にしてください。後程 “多変数版” の理論を展開することを見越して, 本稿ではもう少し一般的な設定での解説を試みました ([MSw74, Section 7] に基づいています)。

#### 第 3 節の記号の設定

以下では  $p$  は (簡単のため) 奇素数<sup>\*52</sup>とし, 有理数体  $\mathbb{Q}$  の代数的閉包  $\overline{\mathbb{Q}}$  の複素数体  $\mathbb{C}$  への埋め込み  $\iota_\infty: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$  および  $p$  進数体の代数的閉包  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  への埋め込み  $\iota_p: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$  ( $\subset \mathbb{C}_p$ ) を固定しておきます。また, ヘンゼルの補題 HENSEL'S lemma ([Ko77, Theorem 2] を参照) により誘導される標準的な  $p$  進指標  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mu_{p-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  を  $\omega_p$  と表記し, 法  $p$  タイヒミュラー指標 TEICHMÜLLER character modulo  $p$  と呼びます (但し  $\mu_{p-1} \subset \overline{\mathbb{Q}}^\times$  は 1 の  $(p-1)$  乗根全体のなす乗法群を表しています)。合成  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\omega_p} \mu_{p-1} \xrightarrow{\iota_\infty} \mathbb{C}^\times$  を介して, 屢々  $\omega_p$  を導手  $p$  のデイリクレ指標  $\omega_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  と見做すことがあります。 $p$  進指標  $\omega_p$  とデイリクレ指標を同一視する方法が, 最初に固定した埋め込み  $\iota_\infty: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$  に依存していることは改めて強調しておきます。最後に, ヘンゼルの補題が誘導す

\*51 「 $p$  進」世界でもワイエルシュトラスの無限乗積の類似は存在しますが (例えば [Rob00, Chapter 6, Section 2.3, Theorem] を参照), 指定した無限個の点集合  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$  で零点を持つ無限乗積の収束条件は  $|\alpha_k|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  となります (本質的に  $p$  進ワイエルシュトラスの準備定理の帰結です)。「 $p$  進」世界では任意の  $x \in \mathbb{Z}$  の  $p$  進付値が 1 以下になってしまうので,  $\mathbb{Z}$  の無限部分集合に対して無限乗積の理論を適用することは出来ません。このような考察から, 「 $\mathbb{Z}$  が  $\mathbb{C}$  や  $\mathbb{C}_p$  に (位相的に) “どのような形で入っているか?” が「関数を整数点での値で特徴出来るか否か」を大きく左右していることが窺い知れるでしょう。

る直積分解  $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$  によつて  $x \in \mathbb{Z}_p^\times$  に対応する元を  $(\omega_p(x), \langle x \rangle)$  で表すことにします; つまり  $\langle x \rangle := x\omega_p(x)^{-1} \in 1 + p\mathbb{Z}_p$  と定めます.  $\langle x \rangle$  はしばしば岩澤の括弧記号 IWASAWA bracket と呼ばれます.

それでは  $p$  進測度論の解説に移りましょう. 以下本小節では, アーベルな位相群  $\mathcal{G}$  は位数有限な開正規部分群の減少列  $\{\mathcal{N}_n\}_{n \geq 0}$  で  $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{N}_n = \{0_{\mathcal{G}}\}$  を満たすものを持ち, さらに  $\mathcal{G} \cong \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n$  と表されると仮定します (アーベル群  $\mathcal{G}$  の単位元を  $0_{\mathcal{G}}$  としました). ただ各有限商  $\mathcal{G}_n := \mathcal{G}/\mathcal{N}_n$  には離散位相を入れておき, 同型  $\mathcal{G} \cong \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n$  は位相群の同型であるとしています. このとき  $\mathcal{G}$  はコンパクトかつ完全不連結な位相群となります. 実用上は  $\mathcal{G} \cong (\text{有限アーベル群}) \times \mathbb{Z}_p^d$  の形の位相群\*53しか出て来ませんので, この形の位相群のみを想定して読み進めていただいてもまったく問題ありません.

**定義 3.4** (分布と測度, [MSw74, Section 7, (7.1)] など).  $\mathcal{K} (\subset \mathbb{C}_p)$  を  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大とする. 位相アーベル群  $\mathcal{G}$  上の関数  $\mu: \{\mathcal{G} \text{ のコンパクト開集合} \} \rightarrow \mathcal{K}$  が有限加法的性 *finite additivity*  $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^k U_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(U_i)$  を満たすとき,  $\mu$  を  $\mathcal{G}$  上の ( $\mathcal{K}$  値) 分布 *distribution* と呼ぶ. さらに,  $\mathcal{G}$  の各コンパクト開集合  $U$  に対して  $|\mu(U)|_p$  が 有界 となるとき,  $\mu$  を ( $\mathcal{K}$  値) 測度 *measure* と呼ぶ.

**注意 3.5.**  $\mathcal{G}$  の任意のコンパクト開集合は, 部分集合族  $\{g + \mathcal{N}_n\}_{g \in \mathcal{G}, n \geq 0}$  の元の非交和として表されますので,  $\mu$  の有限加法的性をチェックする際は任意の  $g \in \mathcal{G}, n \geq 0$  に対して

$$\mu(g + \mathcal{N}_n) = \sum_{a \in \mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n+1}} \mu(g + a + \mathcal{N}_{n+1}) \quad \cdots \text{(DR)}$$

が成り立つことを確認すれば良いことになります. 等式 (DR) は 分布関係式 *distributin relation* と呼ばれます.

さて,  $p$  進分布  $\mu$  が与えられると

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G} \text{ 上の } \mathcal{K} \text{ 値局所定数関数} \} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ \phi = \sum_{g \in \mathcal{G}_n} \phi_g \mathbb{1}_{g + \mathcal{N}_n} \quad (\phi_g \in \mathcal{K}) &\longmapsto \int_{\mathcal{G}} \phi d\mu := \sum_{g \in \mathcal{G}_n} \phi_g \mu(g + \mathcal{N}_n) \end{aligned}$$

によつて  $\mathcal{G}$  上の 局所定数関数 を分布  $\mu$  で積分することが出来ます (此処では  $\mathbb{1}_U$  で開集合  $U$  の特性関数を表しています). 一方で  $\mathcal{G}$  上の ( $\mathcal{K}$  値) 連続関数  $\phi$  は, 局所定数関数 (“階段関数”) の 極限  $\phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k$  として実現することが出来るため\*54, “ $\int_{\mathcal{G}} \phi d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{G}} \phi_k d\mu$ ”

\*52 本節の議論の大半は, 若干の修正の下で  $p = 2$  のときも適用出来ます.

\*53 この場合は  $\mathcal{N}_n = \{0\} \times (p^n \mathbb{Z}_p)^d$  とすれば, 上記の条件をすべて満たします.

\*54 実際,  $\mathcal{G}$  上の  $\mathcal{K}$  値連続関数の空間  $C(\mathcal{G}, \mathcal{K})$  の中で,  $\mathcal{K}$  値局所定数関数のなす  $\mathcal{K}$  線型部分空間が (上限ノルム  $\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{g \in \mathcal{G}} |f(g)|_p$  に関して) 稠密であることが簡単に確認出来ます.

によって  $\mu$  による積分を 連続関数 に拡張することが出来そうです. この極限が常に収束し, 収束値が関数列  $\{\phi_k\}_k$  の取り方に依らないことを保障するために  $\mu$  が 測度 であること, 言い換えれば分布  $\mu$  の 有界性 が要請されます ([MSw74, Section 7, (7.1) Proposition] などを参照; 議論としては通常の測度論と大差ありません). このような事情から,  $p$  進測度論を適用したい場面では 測度の有界性を確認すること が極めて重要な課題となるのです\*55.

**雑談 3.6.**  $\mathcal{O}_K$  を  $K$  の整数環としますと,  $\mathcal{O}_K$  値分布はすべて (自動的に有界になるので) 測度となります. このとき, 対応

$$\{\mathcal{G}_n \text{ 上の } \mathcal{O}_K \text{ 値測度}\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K[\mathcal{G}_n]; \mu \mapsto \sum_{g \in \mathcal{G}_n} \mu(g + \mathcal{N}_n)g$$

の射影極限を取ることで,  $\mathcal{G}$  上の  $\mathcal{O}_K$  値測度全体のなす  $\mathcal{O}_K$  加群と  $\mathcal{G}$  の  $\mathcal{O}_K$  係数 岩澤代数 *IWASAWA algebra*  $\mathcal{O}_K[[\mathcal{G}]] := \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_K[\mathcal{G}_n]$  との間の全単射を得ます ([MSw74, Section 7, (7.2)] を参照)\*56. この対応を介して  $p$  進測度を岩澤代数の元として捉えることが出来ます. この観点は, 取り分け 岩澤理論 *IWASAWA theory* で  $p$  進  $L$  関数を “代数的な不変量” (岩澤加群の特性イデアルなど) と結び付ける際には極めて重要ですが, 本稿の目的のためには必要ないのでこれ以上立ち入らないことにします.

### § 3.2 1 変数の場合 — 久保田–レオポルトの $p$ 進 $L$ 関数とコールマンの公式

本小節では [FKMT17b] の原点とも言える 1 変数の  $p$  進  $L$  関数とコールマンの公式に関する古典理論を解説します. 第 3.2.1 節では, デイリクレ  $L$  関数の負の整数点での特殊値が (ハンケル経路積分を介して) 一般化関–ベルヌーイ数で表されることを復習した後に, それらを  $p$  進補間する  $p$  進正則関数 (自明指標の場合は  $s = 1$  でのみ 1 位の極を持つ  $p$  進有理型関数) である 久保田–レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の補間性質に基づく定式化を紹介します. 第 3.2.2 節では, コブリッツの  $p$  進測度を用いた久保田–レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の構成法について解説します. 久保田–レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の構成に於いては, 特に自明指標やタイヒミュラー指標の冪乗に制限して論じる意義が感じられなかったため (寧ろこのような過剰な単純化は不要な弊害を招くだけなので), 一般のデイリクレ  $L$  関数に対して論じています. 第 3.2.3 節ではコールマンによる “レオポルトの公式の一般化” [Col82, Chapter VII] について解説しました. 補間性質からは 負の整数点での特殊値の様子しか分からないはずであった久保田–レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の 正の整数点での特殊値 を  $p$  進ポリログ関数の特殊値 (=“KZ

\*55 「非有界な分布」による積分論も Yuri MANIN などにより考察されてはいますが (局所解析的分布 *locally analytic distribution* の積分論など), 有界測度での積分論と比較すると矢張り扱いづらい印象は否めません.

\*56 実はこの対応は  $\mathcal{O}_K$  代数の同型となっており, 岩澤代数の元  $x, y$  の積  $xy$  は, 対応する測度  $\mu_x, \mu_y$  の畳み込み積  $\mu_x * \mu_y$  convolution product  $\int_{\mathcal{G}} f d(\mu_x * \mu_y) := \iint_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}} f(g + g') d\mu_x(g) d\mu_y(g')$  に対応します.

型  $p$  進ゼータ値”) と結び付ける大変興味深い結果です. 第 3.2.3 節では, KZ 型  $p$  進ゼータ値との関係を強調するため, タイヒミュラー指標の冪乗の場合に制限して解説し, 一般のディリクレ指標についての結果は簡単に紹介するに留めました (雑談 3.31 を参照). 尚, コールマンの公式については, 坂内健一さんが (何とコブリッツ測度もコールマン積分も用いない!!) 異なるアプローチからの証明を解説されている論説 [坂内 02] もあります. 本節の手法と比較検証してみるの<sup>ぜひ</sup>は, それだけで非常に楽しい経験になるでしょうし, 得るものも非常に大きいと思いますので, 是非お手元にどうぞ<sup>ぜひ</sup>\*57.

### § 3.2.1 ディリクレ $L$ 関数の特殊値と久保田-レオポルトの $p$ 進 $L$ 関数

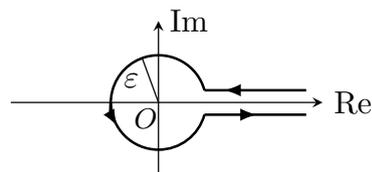
導手  $f_\chi$  のディリクレ指標<sup>\*58</sup>  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して, 無限級数  $L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$  により定義される 1 変数複素関数  $L(s, \chi)$  を  $\chi$  のディリクレ  $L$  関数 DIRICHLET  $L$ -function と呼びます. 自明なディリクレ指標  $\mathbb{1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \forall n \mapsto 1$  に対するディリクレ  $L$  関数  $\zeta(s) := L(s, \mathbb{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  は リーマンゼータ関数 RIEMANN zeta function に他なりません. ディリクレ  $L$  関数は  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で絶対収束する級数で, この範囲では メラン変換公式 MELLIN transformation formula  $\int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt = n^{-s} \Gamma(s)$  を用いて

$$\begin{aligned} \Gamma(s)L(s, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \chi(mf_\chi - \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(mf_\chi - \alpha)t} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \chi(-\alpha) \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \underbrace{\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-f_\chi t})^m \right\}}_{\text{幾何級数}} t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \chi(-\alpha) e^{\alpha t} \cdot \frac{e^{-f_\chi t}}{1 - e^{-f_\chi t}} \right\} t^{s-1} dt = \chi(-1) \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) e^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1} \right\} t^{s-1} dt \end{aligned}$$

と積分表示出来ます<sup>\*59</sup>. 最後の式に現われる “被積分関数” (の  $t$  倍) を  $\mathfrak{F}_\chi^0(t) := \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) t e^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1}$  とおき,

いわゆる

所謂 ハンケル積分経路 HANKEL contour (右図を参



ハンケル経路 HANKEL contour  $\mathcal{C}_\epsilon$

\*57 坂内さんの論説 [坂内 02] での  $p$  進  $L$  関数の構成は, 円単数こそ表立って登場はしないものの, 実質的には コールマン-岩澤の構成 ([落合 14, 3.2.3 項] 参照) と等価です.

\*58 自明なディリクレ指標  $\mathbb{1}$  は “導手  $1$  のディリクレ指標” と見做します.

\*59 無限和と積分の交換可能性など, 積分計算の際に注意すべき細部はすべて認めて計算しています. 詳細は [Iwa72, Section 1] などを参照してください.

照) に沿って  $\frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t} t^{s-1}$  を経路積分すると \*60

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t} t^{s-1} dt &= \chi(-1)(e^{2\pi\sqrt{-1}s} - 1)\Gamma(s)L(s, \chi) \\ &= \chi(-1)e^{\pi\sqrt{-1}s} 2\sqrt{-1} \sin(\pi s)\Gamma(s)L(s, \chi) = (-1)^s \chi(-1) \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s)} L(s, \chi) \quad \cdots (\diamond) \end{aligned}$$

となります。但し此処では複素対数関数  $\log z$  の分枝を  $0 \leq \text{Im}(\log z) < 2\pi$  としており、最後の等号では  $e^{\pi\sqrt{-1}s} = (e^{\log(-1)})^s = (-1)^s$  とガンマ関数の関数等式  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

を用いました。メラン変換  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t} t^{s-1} dt$  は任意の  $s \in \mathbb{C}$  に対して定義出来るので、この式は  $L(s, \chi)$  の  $\mathbb{C}$  への (有理型) 解析接続を与えています。また、 $L(s, \chi)$  が極を持ち得る点は  $\Gamma(1-s)$  の零点であつて  $L(s, \chi)$  の絶対収束域に入っていない  $s=1$  のみです。そこで  $s=1$  として  $\frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t}$  の留数を計算すると、 $\chi = \mathbb{1}$  のときは 1 でそれ以外のときは 0 となります。したがつて  $\chi$  が非自明なディリクレ指標であれば  $L(s, \chi)$  は正則関数となり、 $\chi$  が自明な指標  $\mathbb{1}$  であれば  $\zeta(s) = L(s, \mathbb{1})$  は  $s=1$  でのみ 1 位の極を持つ有理型関数となります。

解析接続の式  $(\diamond)$  を用いて  $s=1-k$  でのディリクレ  $L$  関数の特殊値が計算出来ます。

**定義 3.7** (一般化関-ベルヌーイ数). 等式  $\mathfrak{F}_\chi^1(t) = \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)te^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{\chi,k} \frac{t^k}{k!}$  によつて定義される代数的数  $\{B_{\chi,k}\}_{k=0}^{\infty}$  ( $\subset \mathbb{Q}(\text{Im } \chi)$ ) を一般化関-ベルヌーイ数 *generalised SEKI-BERNOULLI number* と呼ぶ。自明指標  $\chi = \mathbb{1}$  に対する一般化関-ベルヌーイ数は特に関-ベルヌーイ数 *SEKI-BERNOULLI number* と呼ばれ、 $B_k := B_{\mathbb{1},k}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) と表記される。

**注意 3.8.** 2つの関数  $\mathfrak{F}_\chi^0(t)$  と  $\mathfrak{F}_\chi^1(t)$  の和を取る範囲の違いに注意してください。両者はディリクレ指標  $\chi$  が非自明であれば一致しますが (このときは  $\mathfrak{F}_\chi(t)$  と略記します), 自明な指標  $\mathbb{1}$  (導手は 1 と考えます) のときは  $\mathfrak{F}^0(t) := \mathfrak{F}_{\mathbb{1}}^0(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ ,  $\mathfrak{F}^1(t) := \mathfrak{F}_{\mathbb{1}}^1(t) = \frac{te^t}{e^t - 1}$  と異なる関数を定めます (どちらも関-ベルヌーイ数  $B_k$  の母関数として用いられる有名な関数です\*61)。第 3.2.2 節で紹介するコブリッツの  $p$  進測度は“母関数  $\mathfrak{F}_\chi^0(t)$  を  $p$  進補間する”ような測度ですが, [Ko80, p. 24] の記述を見る限り, コブリッツは自明指標  $\mathbb{1}$  のときに  $\mathfrak{F}^0(t)$  と  $\mathfrak{F}^1(t)$  が微妙に異なることには無頓着であるようです。本稿では、 $\mathfrak{F}^0(t)$  と  $\mathfrak{F}^1(t)$  の違いに由来する諸問題について気付いた範囲で修正を施しました。

\*60 この経路積分 *contour integrtion* は、経路の形から“マンドリン積分” *mandolin integral* とも呼ばれます。

\*61 良く知られているように、2つの流儀ではベルヌーイ数  $B_1$  の値のみが異なり、 $\mathfrak{F}^1(t)$  を用いる流儀では  $B_1 = +\frac{1}{2}$ ,  $\mathfrak{F}^0(t)$  を用いる流儀では  $B_1 = -\frac{1}{2}$  となります。ちなみに  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  です。

**注意 3.9.** 2つの関数  $\mathfrak{F}_\chi^0(t), \mathfrak{F}_\chi^1(t)$  の間には  $\mathfrak{F}_\chi^1(-t) = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)$  という関係があります; 実際

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\chi^1(-t) &= \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)(-t)e^{-\alpha t}}{e^{-f_\chi t} - 1} = \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)te^{(f_\chi - \alpha)t}}{e^{f_\chi t} - 1} \\ &\stackrel{f_\chi - \alpha \mapsto \alpha}{=} \sum_{\alpha=0}^{f_\chi - 1} \frac{\chi(f_\chi - \alpha)te^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1} = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t) \end{aligned}$$

が成り立ちます. 特に  $\chi$  が非自明なときは, 等式  $\mathfrak{F}_\chi(-t) = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi(t)$  の係数を比較することにより,  $\chi$  が偶指標 *even character* (つまり  $\chi(-1) = +1$  を満たすディリクレ指標) ならば  $B_{\chi, 2m+1} = 0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), 奇指標 *odd character* (つまり  $\chi(-1) = -1$  を満たすディリクレ指標) ならば  $B_{\chi, 2m} = 0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) となることが従います. 一方  $\chi$  が自明な指標  $\mathbf{1}$  のときは  $\mathfrak{F}^1(-t) = \mathfrak{F}^0(t) = \mathfrak{F}^1(t) - t$  が成り立つため,  $B_1 = +\frac{1}{2}$  かつ  $B_{2m+1} = 0$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) が従います.

**命題 3.10** (ディリクレ  $L$  関数の負の整数点での値). 任意の自然数  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$L(1-k, \chi) = -\frac{B_{\chi, k}}{k} \text{ が成り立つ (特に } L(1-k, \chi) \in \mathbb{Q}(\text{Im } \chi) \text{ が成り立つ).}$$

**【証明】** 解析接続の式 (◇) に  $s = 1 - k$  を代入して整理すると, 留数計算により

$$L(1-k, \chi) = (-1)^{k-1} \Gamma(k) \cdot \text{Res}_{t=0} \frac{\chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t^{k+1}}$$

を得ます. 注意 3.9 の等式  $\mathfrak{F}_\chi^1(-t) = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)$  と一般化関-ベルヌ-イ数の定義 3.7 から

$$L(1-k, \chi) = (-1)^{k-1} \Gamma(k) \cdot \text{Res}_{t=0} \frac{\mathfrak{F}_\chi^1(-t)}{t^{k+1}} = (-1)^{k-1} (k-1)! \cdot \frac{(-1)^k B_{\chi, k}}{k!} = -\frac{B_{\chi, k}}{k}$$

が従います. □

以上の準備のもとで, 久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の存在定理を紹介しましょう.

**定理-定義 3.11** (久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の存在と一意性, [KL64]). “開円盤”  $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) = \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}\}$  上で定義された  $\mathbb{Q}_p(\text{Im } \chi)$  値<sup>\*62</sup>正則関数  $L_p(s, \chi)$  ( $\chi$  が自明指標  $\mathbf{1}$  のときは  $s = 1$  でのみ 1 位の極を持つ  $\mathbb{Q}_p$  値有理型関数  $L_p(s, \mathbf{1})$ ) で, 以下の補間性質 (IP)<sub>KL</sub> によって特徴付けられるものが唯一つ存在する;

$$L_p(1-k, \chi) = (1 - \chi\omega_p^{-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \chi\omega_p^{-k}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \dots \text{ (IP)}_{\text{KL}}.$$

<sup>\*62</sup> 第 3.1 節冒頭で固定した埋め込み  $\iota_\infty, \iota_p$  を用いて,  $\chi$  を  $\mathbb{C}_p$  値指標  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}_p$  とみな見做しています.

**注意 3.12.** 第 3.0 節で導入した  $\zeta_p(s)$  は、自明指標  $\mathbb{1}$  に対する  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \mathbb{1})$  に相当します。実際  $k \equiv 0 \pmod{p-1}$  のときは  $\omega_p^{-k} = \mathbb{1}$  ですから、 $L_p(s, \mathbb{1})$  は  $\{1-k \mid k \in \mathbb{N}, k \equiv 0 \pmod{p-1}\}$  に対して補間性質  $(IP)_\zeta$  を満たしています。

**注意 3.13.** デイリクレ指標  $\chi$  が 奇指標 のときは、 $k$  の偶奇と  $\chi\omega_p^{-k}$  の (デイリクレ指標としての) 偶奇が異なるため、注意 3.9 によってすべての自然数  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $L(1-k, \chi\omega_p^{-k}) = -\frac{B_{\chi\omega_p^{-k}, k}}{k} = 0$  が成り立ちます。つまり  $\chi$  が奇指標のとき、定理-定義 3.11 の補間性質  $(IP)_{KL}$  は  $L_p(1-k, \chi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$  が成り立つことを主張しています。一方で、当然 零関数  $0$  も  $0(1-k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$  を満たしますので、再び定理-定義 3.11 によって奇指標  $\chi$  に対する久保田-レオポルト  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  は 零関数となる ことが従います。この事実は、第 1.2.5 節で紹介した (KZ 型の)  $p$  進ゼータ値の重要な性質  $\zeta_p^{KZ}(2k) = 0$  が成り立つことの根拠としても用いられていました。

**雑談 3.14** (クンマー合同式との関係). 久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の“補間性質  $(IP)_{KL}$  を満たす唯一つの  $p$  進正則関数 (或いは  $s = 1$  でのみ 1 位の極を持つ  $p$  進有理型関数)”としての特徴付けについては、第 3.0 節でも簡単にアイデアを説明しましたが、それでも最初のうちは“人工的”で“回り諄い”印象が拭い去れないでしょう。一体どのような経緯でこのような対象が考えられるようになったのでしょうか——?“ $p$  進  $L$  関数”なるものが考えられるようになった切っ掛けの中でも取り分け影響が大きかったものは、矢張り エルンスト・クンマー Ernst KUMMER によるベルヌーイ数の数論的性質の研究でしょう。クンマーは、正の偶数  $k_1, k_2$  が  $k_1 \equiv k_2 \not\equiv 0 \pmod{p-1}$  を満たすとき、 $\frac{B_{k_1}}{k_1}, \frac{B_{k_2}}{k_2}$  がともに  $p$  進整数であって、合同式  $\frac{B_{k_1}}{k_1} \equiv \frac{B_{k_2}}{k_2} \pmod{p}$  が成り立つことを示しました (クンマーの合同式 KUMMER congruence). クンマーの発見したこの合同式は、その後  $p$  の高い冪乗を法とする合同式へと精密化されていきます; 正の偶数  $k_1$  と  $k_2$  が  $k_1 \equiv k_2 \not\equiv 0 \pmod{p-1}$  かつ  $k_1 \equiv k_2 \pmod{p^{n-1}}$  を満たすとき、合同式  $(1-p^{k_1-1})\frac{B_{k_1}}{k_1} \equiv (1-p^{k_2-1})\frac{B_{k_2}}{k_2} \pmod{p^n}$  が成り立ちます。この段階に至ると、クンマーの合同式 (或いはその精密化) は“ベルヌーイ数間の合同式”というよりも、寧ろ“( $p$  オイラー因子を除いた) リーマンゼータ関数の負の整数点での特殊値 間の合同式”  $(1-p^{k_1-1})\zeta(1-k_1) \equiv (1-p^{k_2-1})\zeta(1-k_2) \pmod{p^n}$  であると見做す方が自然であると気が付くでしょう。さらには「 $k_1$  と  $k_2$  が“ $p$  進的に近い”ほど  $(1-p^{k_1-1})\zeta(1-k_1)$  と  $(1-p^{k_2-1})\zeta(1-k_2)$  も“ $p$  進的に近づく”という或る種の“ $p$  進的な連続性”と表現すべき関係が明らかに存在していることにも気が付くはずで、これらの傍証から「(適切な) 負

の偶数  $k$  に対して  $\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k)$  を満たす “ $p$  進連続関数  $\zeta_p(s)$ ” が存在するのではないか?』と期待してしまうのは無理からぬことでしょう。久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数 [KL64] は、見方を変えるとベルヌーイ数の間に成り立つクンマーの “不思議な合同式” に “( $p$  進  $L$  関数の) 連続性” という形で意味付けをしたものである、と捉えることも出来るのです。

クンマー合同式と  $p$  進ゼータ関数について興味を持たれた方は、是非雑誌『数学セミナー』2018年1月号の栗原将人くりはら まさとさんの記事 [栗原 18] をご覧ください。短い論説ではありますが、ベルヌーイ数の間の具体的な合同関係から  $p$  進ゼータ関数の存在に迫る構成おのに自ずとわくわくさせられることは必定ひつじょうですし、示唆だそくに富んだ記述が多く色々と発見があるのではないかと思います (蛇足だそくですが、サマースクールの本講演および本稿の標題は、栗原さんの記事の印象的なタイトルに触発されて付けさせていただきました)。

### § 3.2.2 コブリッツの $p$ 進測度と $p$ 進 $L$ 関数

引き続き  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を導手  $f_\chi$  のディリクレ指標とします。コブリッツによる  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  の構成は、レルヒ型ディリクレ  $L$  関数の特殊値を  $p$  進補間する というアイデアに基づいていますので、まずはレルヒ型ディリクレ  $L$  関数を導入しましょう。

**定義 3.15** (レルヒ型ディリクレ  $L$  関数).  $c \in \mathbb{N}$  とする. 導手  $f_\chi$  のディリクレ指標  $\chi$  と 1 の  $c$  乗根  $\xi$  に対して, ディリクレ級数  $L(s, \chi, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\xi^n}{n^s}$  で定義される複素関数を レルヒ型ディリクレ  $L$  関数 DIRICHLET  $L$ -function of LERCH type (または 捩れディリクレ  $L$  関数 twisted DIRICHLET  $L$ -function) と呼ぶ.  $\chi$  が自明な指標  $\mathbb{1}$  のときには  $\zeta(s, \xi) := L(s, \mathbb{1}, \xi)$  と表記して レルヒ型リーマンゼータ関数 RIEMANN zeta function of LERCH type と呼ぶことにする.

レルヒ型ディリクレ  $L$  関数  $L(s, \chi, \xi)$  は, ディリクレ  $L$  関数  $L(s, \chi)$  を “1 の  $c$  乗根  $\xi$  で捻った” だけのものなので,  $L(s, \chi)$  と非常に良く似た性質を持ちます. 例えば  $L(s, \chi, \xi)$

は  $\operatorname{Re} s > 1$  で絶対収束し, 関数  $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t) := \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha)\xi^{\alpha t} e^{\alpha t}}{\xi^{f_\chi} e^{f_\chi t} - 1}$  のハンケル経路  $\mathcal{C}_\varepsilon$  に沿っ

た “メラン変換” による表示  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t)}{t} t^{s-1} dz = (-1)^s \chi(-1) \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s)} L(s, \chi, \xi)$  を

持ちます. この積分表示により  $L(s, \chi, \xi)$  は  $\mathbb{C}$  全体に有理型に解析接続され, さらに  $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(t) := \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)\xi^{\alpha t} e^{\alpha t}}{\xi^{f_\chi} e^{f_\chi t} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{\chi, \xi, k} \frac{t^k}{k!}$  によって “捩れ関-ベルヌーイ数” twisted SEKI-

BERNOULLI number  $B_{\chi, \xi, k}$  を定めると  $L(1-k, \chi, \xi) = -\frac{B_{\chi, \xi, k}}{k}$  ( $\forall k \geq 1$ ) が成り立ちます

(第 3.2.1 節の計算とほぼ同様なので、各自計算してみてください). 最後に、良く知られた公

$$\text{式 } \sum_{\xi^c=1} \xi^n = \begin{cases} c & (c \mid n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \text{ により}$$

$$\sum_{\xi^c=1} L(s, \chi, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\xi^c=1} \xi^n \right\} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ c \mid n}}^{\infty} \frac{c\chi(n)}{n^s} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(cn)}{(cn)^s} = c^{1-s} \chi(c) L(s, \chi)$$

$$\therefore \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L(s, \chi, \xi) = \sum_{\xi^c=1} L(s, \chi, \xi) - \underbrace{L(s, \chi, 1)}_{=L(s, \chi)} = (c^{1-s} \chi(c) - 1) L(s, \chi) \quad \cdots (L_{\xi})_c$$

が成り立ちます. 注目すべきは  $\xi \neq 1$  のときは  $L(s, \chi, \xi)$  は 正則関数 となるため, デイリクレ  $L$  関数をレルヒ型に“分解”する公式  $(L_{\xi})_c$  が, そのまま  $L(s, \chi)$  が  $s = 1$  でのみ持ち得る高々 1 位の極を“取り除く”操作になっている, という点でしょうか.

**注意 3.16.** 2つの関数  $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)$  と  $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(t)$  の間には  $\boxed{\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(-t) = \chi(-1) \mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t)}$  という関係が成り立っていますので (各自確認してみてください),  $L(s, \chi, \xi)$  の負の整数点での特殊値は  $L(1-k, \chi, \xi) = (-1)^{k-1} \chi(-1) \cdot \left( \mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t) \text{ の } \frac{t^k}{k!} \text{ の係数} \right)$  と表すことが出来ます. したがって

$$\begin{aligned} L(-k, \chi, \xi) &= \frac{(-1)^k \chi(-1)}{k+1} \cdot \left( \mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t) \text{ の } \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \text{ の係数} \right) \\ &= (-1)^{k+1} \chi(-1) \left( -\frac{\mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t)}{t} \text{ の } \frac{t^k}{k!} \text{ の係数} \right) \end{aligned}$$

が成り立ちますので,  $\mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t) := -\frac{\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)}{t} = \sum_{\alpha=0}^{f_{\chi}-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^{\alpha} e^{\alpha t}}{1 - \xi^{\alpha} e^{\alpha t}} = \frac{\mathfrak{B}_{\chi, \xi, -1}}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{\chi, \xi, k} \frac{t^k}{k!}$

とおくと  $\boxed{L(-k, \chi, \xi) = (-1)^{k+1} \chi(-1) \mathfrak{B}_{\chi, \xi^{-1}, k}}$  ( $k \geq 0$ ) と表すことが出来ます. 2つ

のベルヌーイ数  $B_{\chi, \xi, k}$  と  $\mathfrak{B}_{\chi, \xi, k}$  は, 等式  $\boxed{\mathfrak{B}_{\chi, \xi, k} = (-1)^k \chi(-1) \frac{B_{\chi, \xi^{-1}, k+1}}{k+1}}$  ( $k \geq 0$ )

によって結び付いています. コブリッツの  $p$  進測度は, おおざっぱ大雑把に言えば“ベルヌーイ数  $\{\mathfrak{B}_{\chi, \xi, k}\}_{k=0}^{\infty}$  の母関数  $\mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t)$  ごと  $p$  進補間する”ような  $p$  進測度のことです. また, [FKMT17b, Definition 1.4] で定義されている  $\mathfrak{B}(\mathbf{n}; \xi)$  は  $\mathfrak{B}_{1, \xi, n}$  を多重化したものです.

コブリッツの  $p$  進測度は拍子抜けしてしまう程簡単に定義出来てしまう, 単純明快な形の  $p$  進測度です. 以下自然数  $f \in \mathbb{N}$  に対して  $\mathcal{G}_f = \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{f, n} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/fp^n\mathbb{Z}$  とおきます. 自然数  $f$  を  $f = f_0 p^e$ ,  $p \nmid f_0$  と分解しておく, 中国剰余定理により  $\mathcal{G}_f = \mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ ,  $\mathcal{N}_n = \{0\} \times p^{e+n}\mathbb{Z}_p$  と表されます.

**命題-定義 3.17** (コブリッツの  $p$  進測度  $\mu_z$ , [Ko79, Section 1, Key example and Proposition 2], [Ko80, Chapter II, Section 2, Basic Example]).  $\mathcal{K}$  を  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大とし,  $p$  進数  $z \in \mathcal{K}$  を  $|z^f - 1|_p \geq 1$  となるようにとる. このとき  $\{x + \mathcal{N}_n\}_{x \in \mathcal{G}_f, n \geq 0}$  に対して  $\mu_z(x + \mathcal{N}_n) := \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - zf^{p^n}}$  と定めると,  $\mu_z$  は  $\mathcal{G}_f$  上の  $\mathcal{K}$  値  $p$  進測度となる. 但し  $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$  は  $x \equiv \tilde{x} \pmod{\mathcal{N}_n}$  かつ  $0 \leq \tilde{x} < fp^n$  を満たす唯一つの整数とする.

**【証明の概略】**  $\mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n+1}$  の代表系として  $\{\nu fp^n \mid 0 \leq \nu \leq p-1\}$  が取れるので, 等比数列の和の公式を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{p-1} \mu_z(x + \nu fp^n + \mathcal{N}_{n+1}) &= \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{z^{\tilde{x} + \nu fp^n}}{1 - zf^{p^{n+1}}} = \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - zf^{p^{n+1}}} (1 + z^{fp^n} + \dots + z^{(p-1)fp^n}) \\ &= \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - zf^{p^{n+1}}} \cdot \frac{1 - (zf^{p^n})^p}{1 - zf^{p^n}} = \mu_z(x + \mathcal{N}_n) \end{aligned}$$

となり, 分布関係式 (DR) が従います. 分布の有界性については, 仮定  $|z^f - 1|_p \geq 1$  から任意の  $n$  に対して  $|z^{fp^n} - 1|_p \geq 1$  が成り立つことが容易に確認出来ますので, 先ず  $z \in \mathbb{D}_0^+(1)$  の場合は

$$|\mu_z(x + \mathcal{N}_n)|_p = \left| \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - zf^{p^n}} \right|_p \leq |z|_p^{\tilde{x}} \leq 1 \quad (\forall x \in \mathcal{G}_f, \forall n \in \mathbb{N})$$

と評価出来ます. 次に  $z \notin \mathbb{D}_0^+(1)$  のときは  $|z^{fp^n}|_p > 1$  より  $|1 - z^{fp^n}|_p = |z^{fp^n}|_p$  が成り立ちますので

$$|\mu_z(x + \mathcal{N}_n)|_p = \left| \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - zf^{p^n}} \right|_p = |z|_p^{\tilde{x} - fp^n} \leq |z|_p^{-1} < 1 \quad (\forall x \in \mathcal{G}_f, \forall n \in \mathbb{N})$$

と評価出来ます. したがって  $\mu_z$  は有界な分布となります.  $\square$

一見すると“ $L$  関数の特殊値”とはかけ離れた対象のようにも見えるコブリッツの  $p$  進測度ですが, 指数関数を積分するとレルヒ型ディリクレ  $L$  関数の特殊値と結び付くというのですから驚きです.  $p$  進測度  $\mu_z$  の定義に登場する  $z$  として“1 の  $c$  乗根  $\xi$ ”を考えるのがポイントです;  $\xi$  の位数  $c \neq 1$  が  $fp$  と素であれば,  $\xi$  が命題-定義 3.17 の条件  $|\xi^f - 1|_p \geq 1$  を満たすことは簡単に確認出来ます.

**命題 3.18** ([Ko79, (1.8)]).  $c \neq 1$  を  $fp$  と素な自然数とし, 或る非負整数  $e_0$  に対し  $\chi$  の導手  $f_\chi$  が  $fp^{e_0}$  を割り切ると仮定する. このとき, 任意の非負整数  $k \geq 0$  に対して

$$\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) \pi_2(x)^k d\mu_\xi(x) = \mathfrak{B}_{\chi, \xi, k} = (-1)^{k+1} \chi(-1) L(-k, \chi, \xi^{-1})$$

が成り立つ. 但し  $\pi_2$  は射影  $\mathcal{G}_f \cong \mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  を表す.

【証明の概略】 先ず  $p$  進指数関数

$$\{t \in \mathbb{C}_p \mid |t|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\} \rightarrow \mathbb{C}_p; t \mapsto e^{\pi_2(x)t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi_2(x)t)^k}{k!} \quad \dots \text{(exp)}$$

が  $t$  に関する  $p$  進正則関数となることに注意しておきましょう (例えば [Ko77, p. 79], [Ko80, p. 14]などを参照). さて,  $n \geq e_0$  のときに  $fp^n = f_x d_n$  と表すことにしますと,  $p$  進積分の定義と  $p$  進測度  $\mu_\xi$  の定義 (命題-定義 3.17) から

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in \mathcal{G}_{f,n}} \chi(\tilde{x}) e^{\pi_2(\tilde{x})t} \mu_\xi(x + \mathcal{N}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=0}^{fp^n-1} \chi(\alpha) e^{\alpha t} \frac{\xi^\alpha}{1 - \xi fp^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{d_n-1} (\xi^{f_x} e^{f_x t})^j \sum_{\alpha=0}^{f_x-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi fp^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\xi^{f_x} e^{f_x t})^{d_n}}{1 - \xi^{f_x} e^{f_x t}} \sum_{\alpha=0}^{f_x-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi fp^n} = \sum_{\alpha=0}^{f_x-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi^{f_x} e^{f_x t}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\xi e^t)^{fp^n}}{1 - \xi fp^n} \end{aligned}$$

と計算出来ます\*63が,  $t$  の取り方から  $|1 - e^t|_p < 1$  となるので,  $|1 - \xi^{fp^n}|_p^{-1} \leq 1$ ,  $|\xi|_p = 1$  に注意すると

$$\left| \frac{1 - (\xi e^t)^{fp^n}}{1 - \xi^{fp^n}} - 1 \right|_p = \left| \frac{\xi^{fp^n} (1 - e^{fp^n t})}{1 - \xi^{fp^n}} \right|_p \leq |1 - (e^t)^{fp^n}|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

つまり  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\xi e^t)^{fp^n}}{1 - \xi^{fp^n}} = 1$  が成り立ちます. ゆえに等式

$$\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x) = \sum_{\alpha=0}^{f_x-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi^{f_x} e^{f_x t}} = \mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t)$$

を得ます. 最後に (exp) より  $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) \pi_2(x)^k d\mu_\xi(x) \right) \frac{t^k}{k!}$  が成り立つことを踏まえて, 上式の両辺の  $t^k$  の係数を比較すると, 主張の等式を得ます.  $\square$

**雑談 3.19.** 命題 3.18 の積分  $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) \pi_2(x)^k d\mu_\xi(x)$  で, レルヒ型ディリクレ  $L$  関数の特殊値  $L(-k, \chi, \xi)$  がそのまま出て来てくれたら嬉しかったのですが, 被積分関数の  $\chi$  と  $k$  に依存した符号  $(-1)^{k+1} \chi(-1)$  が余計に掛かってしまったり  $\xi$  が  $\xi^{-1}$  になってしまっていたりするのが残念なところです. この余計な符号が生じてしまう原因は偏に積分  $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x)$  の計算結果が (特殊値の定義に適した  $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(t)$  ではなく)  $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)$  から構成した関数  $\mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t)$  になってしまっているからです. そして命題-定義 3.17

\*63 有理整数環  $\mathbb{Z}$  の元  $\alpha$  は, 対角埋め込み  $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$  によって  $\mathcal{G}_f$  の元と見做しています. この解の下で,  $\alpha \in \mathbb{Z}$  に対して  $\pi_2(\alpha) = \alpha$  が成り立ちます.

に於いて、 $\mathcal{G}_{f,n}$  の元  $x$  の代表元  $\tilde{x}$  として  $x \equiv \tilde{x} \pmod{\mathcal{N}_n}$  かつ  $0 \leq \tilde{x} \leq fp^n - 1$  を満たす整数を用いて  $\mu_z$  を定義していることが、 $\chi(x)e^{\pi_2(x)t}$  を積分した際に  $\mathfrak{H}_{\chi,\xi}(t) = -\frac{\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^0(t)}{t}$  が出来てしまう最大の要因となっています。したがって、安直に考えると  $\mathcal{G}_{f,n}$  の代表系を  $1 \leq \tilde{x} \leq fp^n$  として 命題-定義 3.17 とまったく同様の手順で  $\mu_z^1$  を定義してしまえば、命題 3.18 と同じ計算によって  $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x)e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi^1(x) = -\frac{\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^1(t)}{t}$  となるので、係数比較により余計な符号を取り除いた形の補間公式  $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x)\pi_2(x)^k d\mu_\xi^1(x) = L(-k, \chi, \xi)$  が得られそうです。著者が確認した限りでは、このような修正を施しても特に不具合は生じないように思われます。ただ、[FKMT17b] でも命題 3.17 の定義を採用しているため、文献を参照した際の混乱を避けるために、本稿でも符号のずれには目を瞑<sup>つむ</sup>って [Ko79, Ko80, FKMT17b] などの流儀に合わせました。尚、 $\chi$  が 非自明なディリクレ指標 のときは  $\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^0(t) = \mathfrak{F}_{\chi,\xi}^1(t)$  が成り立つため、注意 3.16 の等式  $\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^1(t) = \chi(1)\mathfrak{F}_{\chi,\xi^{-1}}^0(t)$  を用いて計算すると積分  $\int_{\mathcal{G}_k} \chi(x)\pi_2(x)^k d\mu_\xi$  が “正しい  $L$  値”  $(-1)^{k+1}\chi(-1)L(-k, \chi, \xi^{-1}) = L(-k, \chi, \xi)$  を与えていることが確認出来ます。一方で  $\chi$  が 自明な指標 1 のときは符号等のずれがどうしても残ってしまいますが、 $\mu_\xi$  を “足し合わせて”  $p$  進  $L$  関数を構成する際には、このずれは巧く解消されます (定理-定義 3.11 の証明の概略をご覧ください)。

レルヒ型ディリクレ  $L$  関数の特殊値を補間するような  $p$  進測度  $\mu_\xi$  が構成出来たので、その “ $p$  進メラン変換” によってレルヒ型ディリクレ  $L$  関数の “ $p$  進版” を構成することが出来ます。以下、 $\mathcal{G}_f$  の “単数群” を  $\mathcal{G}_f^* = (\mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p^\times$  で表すことにします。また、合成写像  $\mathcal{G}_f^* \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\omega_p} \mathbb{Z}_p^\times$  のことも、同じ記号  $\omega_p$  で表すことにしましょう。最後に記号の乱用で、 $x \in \mathcal{G}_f^*$  に対して岩澤の括弧記号を  $\langle x \rangle = \pi_2(x)\omega_p(x)^{-1} \in 1 + p\mathbb{Z}_p$  と定義します。円盤上のリジッド解析的関数については定義 A.8 を参照してください。

**補題 3.20.**  $\mathcal{G}_f^*$  の元  $x$  と “開円盤”  $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) := \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}\}$  の元  $s$  に対して  $\langle x \rangle^s := \text{Exp}_p(s \text{Log}_p(\langle x \rangle))$  と定める。このとき  $\langle x \rangle^s$  は  $x \in \mathcal{G}_f^*$  に関して連続であり、 $s \in \mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}})$  に関してリジッド解析的である。但し  $\text{Exp}_p(x)$ ,  $\text{Log}_p(x)$  はそれぞれ次の <sup>た</sup>べき <sub>べき</sub> 冪級数で定義される関数である；

$$\text{Exp}_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\text{Log}_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

【証明】  $\mathcal{G}_f^* \rightarrow \mathbb{C}_p; x \mapsto \langle x \rangle^s$  の連続性は

$$x \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \langle x \rangle \xrightarrow{\text{Log}_p} \text{Log}_p(\langle x \rangle) \xrightarrow{s \cdot -} s \text{Log}_p(\langle x \rangle) \xrightarrow{\text{Exp}_p} \text{Exp}_p(s \text{Log}_p(\langle x \rangle)) = \langle x \rangle^s$$

の各写像が連続であることから従います。  $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) \rightarrow \mathbb{C}_p; s \mapsto \langle x \rangle^s$  のリジッド解析性を調べるために、先ずは以下のことを思い出しましょう ([Ko77, Chapter IV, Section 1, Proposition] を参照);

★ 冪級数  $\text{Exp}_p(x)$  は  $\mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}}) := \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\}$  上で収束する。

★  $\mathbb{C}_p$  の整数環を  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} (= \mathbb{D}_0^+(1))$  とおくと、  $\text{Exp}_p(x), \text{Log}_p(x)$  は特に  $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  と  $1+p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$

の間の位相同型写像を引き起こす;  $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \xrightleftharpoons[\text{Log}_p]{\text{Exp}_p} 1+p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  .

したがって  $s \text{Log}_p(\langle x \rangle) \in \mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}})$  が成り立つような  $s$  に対して  $\langle x \rangle^s = \text{Exp}_p(s \text{Log}_p(\langle x \rangle))$  は収束します。 此処で  $\text{Log}_p(\langle x \rangle) \in p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  であることから  $|\text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p \leq p^{-1}$  が成り立つことに注意しますと、  $s \in \mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) (= \mathbb{D}_0^-(p^{1-\frac{1}{p-1}}))$  であれば

$$|s \text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p < p^{1-\frac{1}{p-1}} \cdot p^{-1} = p^{-\frac{1}{p-1}} \quad \therefore s \text{Log}_p(\langle x \rangle) \in \mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}})$$

より冪級数  $\langle x \rangle^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^n}{n!} s^n = 1 + \frac{\text{Log}_p(\langle x \rangle)}{1!} s + \frac{\{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^2}{2!} s^2 + \dots$  は確かに収束します。 □

**定義 3.21** (レルヒ型  $p$  進  $L$  関数, [Ko79, (1,10)]).  $c \neq 1$  を  $pf$  と素な自然数とし、或る自然数  $e_0$  に対して  $\chi$  の導手  $f_\chi$  が  $fp^{e_0}$  の約数となっていると仮定する。このとき、1 の  $c$  乗根  $\xi \neq 1$  に対して  $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) = \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}\}$  上のリジッド解析的関数  $L(s, \chi, \xi)$  を  $L_p(s, \chi, \xi) := \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{-s} d\mu_\xi(x)$  で定義し、レルヒ型  $p$  進  $L$  関数  $p$ -adic  $L$ -function of LERCH type と呼ぶ。

**注意 3.22.** 測度  $\mu_\xi$  の有界性より、或る正の定数  $M > 0$  が存在して  $\mathcal{G}_f^*$  上の任意の連続関数  $f$  に対して  $\left| \int_{\mathcal{G}_f^*} f(x) d\mu_\xi(x) \right|_p \leq M \sup_{x \in \mathcal{G}_f^*} |f(x)|_p$  が成り立ちます。また、任意の  $x \in \mathcal{G}_f^*$  に対して  $\chi \omega_p^{-1}(x) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$  より  $|\chi \omega_p^{-1}(x)|_p = 1$  となるので、良く知られた評価式  $|n!|_p > p^{-\frac{n}{p-1}}$  ([Ko77, p.79] 参照) および  $|\text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p \leq p^{-1}$  と併せて評価式

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-s)^n}{n!} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^n d\mu_\xi \right|_p &\leq M |s|_p^n |n!|_p^{-1} \sup_{x \in \mathcal{G}_f^*} \underbrace{\{|\chi \omega_p^{-1}(x)|_p\}}_{=1} \underbrace{\{|\text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p^n\}}_{\leq p^{-n}} \\ &< M |s|_p^n p^{\frac{n}{p-1}} \cdot p^{-n} = M (|s|_p \cdot p^{-\frac{p-2}{p-1}})^n \end{aligned}$$

を得ます。右辺は  $|s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}$  であれば  $n \rightarrow \infty$  のときに 0 に収束するので、結局

$$L_p(s, \chi, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^n d\mu_\xi(x)$$

も “開円盤”  $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}})$  上のリジッド解析的関数となることが従います。

$p$  進測度  $\mu_z$  の定義 (命題-定義 3.17) から直ちに<sup>ただ</sup>従う等式  $\mu_z(px + \mathcal{N}_{n+1}) = \mu_{z^p}(x + \mathcal{N}_n)$  を用いると、レルヒ型  $p$  進  $L$  関数の補間性質が形式的な計算により簡単に計算出来ます;

$$\begin{aligned} L_p(1-k, \chi, \xi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{k-1} d\mu_\xi(x) = \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \pi_2(x)^{k-1} \omega_p(x)^{1-k} d\mu_\xi(x) \\ &= \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(x) \pi_2(x)^{k-1} d\mu_\xi(x) - \int_{p\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(x) \pi_2(x)^{k-1} d\mu_\xi(x) \\ &= \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(x) \pi_2(x)^{k-1} d\mu_\xi(x) - \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(px) \pi_2(px)^{k-1} \underbrace{d\mu_\xi(px)}_{=d\mu_{\xi^p}(x)} \\ &\stackrel{\text{命題 3.18}}{=} (-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1) \{L(1-k, \chi \omega_p^{-k}, \xi^{-1}) - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1} L(1-k, \chi \omega_p^{-k}, \xi^{-p})\} \end{aligned}$$

レルヒ型ディリクレ  $L$  関数の特殊値の  $p$  進補間に成功した今となつては、目標であった久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  は最早手中に取めたも同然です; と言うのも、レルヒ型  $p$  進  $L$  関数を “関係式  $(L_\xi)_c$  に沿って” 組み合わせれば良いのですから。

**【定理-定義 3.11 の証明の概略】**  $c \neq 1$  を  $pf$  と素な自然数として、 $p$  進測度  $\tilde{\mu}_c := \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \mu_\xi$

の “ $p$  進メラン変換” で定まる関数

$$L_p(s, \chi) := \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^{1-s} - 1} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{-s} d\tilde{\mu}_c(x)$$

が補間公式 (IP)<sub>KL</sub> を満たすことを確認します。自然数  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} L_p(1-k, \chi) &= \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^k - 1} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{k-1} d\tilde{\mu}_c(x) \\ &\stackrel{\text{定義}}{=} \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^k - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{k-1} d\mu_\xi(x) = \frac{1}{\chi \omega_p^{-k}(c) c^k - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L_p(1-k, \chi, \xi) \end{aligned}$$

となりますので、先程の  $L_p(s, \chi, \xi)$  の補間公式を代入して計算を進めると

$$L_p(1-k, \chi)$$

$$= \frac{(-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1)}{\chi \omega_p^{-k}(c) c^k - 1} \left\{ \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L(1-k, \chi \omega_p^{-k}, \xi^{-1}) - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L(1-k, \chi, \xi^{-p}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{(L_\xi)_c} \frac{(-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1)}{\chi \omega_p^{-k}(e) e^k - 1} \\
& \cdot \{(\chi \omega_p^{-k}(e) e^k - 1) L(1-k, \chi \omega_p^{-k}) - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1} (\chi \omega_p^{-k}(e) e^k - 1) L(1-k, \chi \omega_p^{-k})\} \\
& = (-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1) (1 - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1}) L(1-k, \chi \omega_p^{-k})
\end{aligned}$$

と計算出来ます ( $c$  が  $p$  と素であるため,  $\xi$  が 1 以外の 1 の  $c$  乗根を動くときに  $\xi^p$  も同じ集合の元を動くことに注意しましょう). したがって, 見かけ上は補間公式 (IP)<sub>KL</sub> と符号  $(-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1)$  のずれが生じてしまっているように見えますが, 実際には符号のずれが生じていないことを確認しましょう. 先ず  $\chi \omega_p^{-k}$  が非自明なときは注意 3.9 より  $k$  の偶奇と  $\chi \omega_p^{-k}$  の (ディリクレ指標としての) 偶奇が一致しなければ  $L(1-k, \chi \omega_p^{-k})$  は 0 となり, 偶奇が一致するならば  $(-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1) = 1$  となるため,  $\chi \omega_p^{-k}$  が非自明なときは補間公式に符号のずれが生じていないことが確認出来ました. 次に  $\chi \omega_p^{-k}$  が自明な指標  $\mathbb{1}$  のときは,  $(-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1) = (-1)^k = -1$  となるのは  $k$  が奇数のときだけです. そして  $k=1$  のときは  $1 - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1} = 1 - p^0 = 0$ ,  $k \geq 3$  が奇数のときは  $L(1-k, \chi \omega_p^{-k}) = \zeta(1-k) = 0$  となって (注意 3.9 を参照), 何れの場合も  $L_p(1-k, \chi)$  の値は 0 になってしまうため, 矢張り符号のずれは生じていません.  $\square$

**雑談 3.23** ( $p$  進測度論を用いた  $p$  進  $L$  関数の構成について). 改めてコブリッツの  $p$  進測度の構成を振り返ってみますと, その“簡明さ”には目を眩るものがあります.  $p$  進測度論を介した  $L$  関数の構成は, 基本的には

- Step 1. 各整数点  $k$  毎に (より正確には各臨界点毎に), その点での  $L$  関数の特殊値を補間する  $p$  進分布  $\mu_k$  を構成する
- Step 2. 各分布  $\mu_k$  の 有界性を証明 する
- Step 3. 各分布  $\{\mu_k\}_k$  を “クンマー型合同式  $\mu_k \equiv x^{k-1} \mu_1$ ” (“水平方向の合同式” *horizontal congruence* と呼ばれています) を介して関係付ける

という, 大きく分けると 3 つのステップを経て実行されます. 例えば久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数の場合は, 母関数表示  $\frac{te^{Xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(X) \frac{t^k}{k!}$  で定まる 関-ベルヌーイ多項式 SEKI-BERNOULLI *polynomial*  $B_k(X)$  から構成される ベルヌーイ分布 BERNOULLI *distribution*  $\mu_{B,k}(x + \mathcal{N}_n) = \frac{(fp^n)^{k-1}}{k} B_k\left(\left\{\frac{x}{fp^n}\right\}\right)$  を考察するのが一般的です ( $\{x\}$  は有理数  $x$  の “小数部分” を表す記号です). ベルヌーイ分布  $\mu_{B,k}$  に対する分布関係式 (DR) および補間公式は, 直接計算により簡単に確認出来ます. 但し  $\mu_{B,k}$  は 有界ではない ことが簡単に示されてしまうため, Step 2 を完遂するためには  $\mu_{B,k}$  を 有界な測度 となるように “修正” する必要があります. 斯様な修正は,  $p$  と素な自然数  $c \neq 1$  を用いて  $\mu_{M,k}^{(c)}(x + \mathcal{N}_n) = \mu_{B,k}(x + \mathcal{N}_n) - c^k \mu_{B,k}(c^{-1}(x + \mathcal{N}_n))$  と定めることで実現されます.

この“修正”された  $p$  進測度  $\mu_{M,k}^{(c)}$  は<sup>しばしば</sup> 屢々 メイザー測度 MAZUR measure と呼ばれています。最後に Step 3 を経て各整数点毎に構成したメイザー測度  $\{\mu_{M,k}^{(c)}\}_k$  が“同じ  $p$  進  $L$  関数”を表していることが正当化されるわけですが、このステップを完遂することは本質的に(一般化) 関-ベルヌーイ数の間の クンマー合同式 KUMMER congruence を証明することに他なりません ([Ko77, Theorem 5] も参照)。このように、 $p$  進測度論を用いた  $p$  進  $L$  関数の構成は意外と手間のかかる作業が何段階にも渡って要求されるのが一般的ですが、コブリッツの  $p$  進測度を用いた構成では、<sup>ま</sup> 先ず 特殊値の 母関数ごと  $p$  進補間してしまうこと<sup>ま</sup> によって Step 1, Step 3 を回避しています。また、 $p$  進測度  $\mu_z$  の(あまりにもシンプルな) 定義から、Step 2 の 有界性の確認 も容易に出来てしまう点も注目に値します。 $p$  進  $L$  関数の構成について勉強した経験のある人であれば、誰もがコブリッツの  $p$  進測度を用いた構成の簡明さに驚かれるのではないのでしょうか。

メイザー測度  $\{\mu_{M,k}^{(c)}\}_k$  を用いた  $p$  進  $L$  関数の構成については [Ko77, Chapter II] が<sup>ま</sup> 良く纏まっていて分かりやすいと思います(但し<sup>ただ</sup> タイヒミュラー指標の<sup>べき</sup> 冪乗のケースしか扱われていません)。また、メイザー測度を用いた  $p$  進  $L$  関数の構成は、 $p$  進測度論の文脈で構成するか岩澤代数の元として直接構成するかの違いを除けば、実質的に 岩澤健吉 Kenkichi IWASAWA による“スティッケルベルガー元の極限としての構成” [Iwa72] と等価なものです。スティッケルベルガー元 STICKELBERGER element は“部分ゼータ関数の特殊値の母関数”<sup>ゆいしよ</sup> とでも呼ぶべき群環  $\mathbb{Q}[\mathcal{G}_n]$  の由緒正しい元であり、スティッケルベルガーの定理 はスティッケルベルガー元が円分体のイデアル類群の零化元になっていることを主張しています。この定理は、解析的な量である“ $L$  関数の特殊値”と代数的な対象である“イデアル類群”の間に何らかの密接な関係があることを示唆する、<sup>いわゆる</sup> 所謂“岩澤理論的現象 IWASAWA theoretic phenomena”の典型例であると言えます。岩澤のスティッケルベルガー構成については [落合 14, 3.2.3 項] も参照してください。

### § 3.2.3 コールマン-レオポルトの公式

本小節では、コールマンによって証明された“久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  の正の整数点での 特殊値と  $p$  進ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  の特殊値を結び付ける”公式(コールマンの公式; 定理 3.24) の証明の概略を紹介します。以下第 1 節, 第 2 節の記号を踏襲します。即ち  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  および  $a \in \mathbb{C}_p$  に対して、 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  で  $X(\mathbb{C}_p)$  上定義された分枝  $a$  のコールマン関数の集合を表し、 $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$  で分枝  $a$  の  $p$  進ポリログ関数(命題-定義 1.17) を表します。コールマンの公式の主張は実に明快です。

**定理 3.24** (コールマンの公式, [Col82, Chapter I. (4), Chapter VII.]).  $k$  を 2 以上の自然数とすると、等式  $L_p(k, \omega_p^{1-k}) = (1 - p^{-k}) \lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_k^{p,(a)}(z) \stackrel{\text{定義 1.21}}{=} (1 - p^{-k}) \zeta_p^{\text{KZ}}(k)$  が成り立つ。

**注意 3.25.** コールマンの公式 (定理 3.24) に現れる項の逆数  $(1 - p^{-k})^{-1}$  が リーマンゼータ値  $\zeta(k)$  の  $p$  でのオイラー因子 と一致していることに注目しましょう。久保田-レオポルトの  $p$  進  $L$  関数はディリクレ  $L$  関数の “ $p$  でのオイラー因子を取り除いたもの” を  $p$  進補間する関数であったので、対応してコールマンの公式でも “KZ 型  $p$  進ゼータ値  $\zeta_p^{\text{KZ}}(k)$  の  $p$  でのオイラー因子”  $(1 - p^{-k})^{-1}$  が取り除かれている、と解釈することができます。

証明のアイデアは非常に単純明快で、実質的に  $L_p(k, \omega_p^{1-k})$  の定義に現れる  $p$  進積分  $L_p(k, \omega_p^{1-k}) = \frac{1}{\omega_p^{1-k}(c) \langle c \rangle^{1-k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega_p^{-k}(x) \langle x \rangle^{-k} d\tilde{\mu}_c(x) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\tilde{\mu}_c(x)$  を定義に基づいて丁寧に計算するだけです\*64。  $p$  進測度  $\tilde{\mu}_c$  はコブリッツの  $p$  進測度  $\mu_\xi$  を足し合わせたものですから、まずは  $x^{-k}$  という関数をコブリッツの  $p$  進測度で積分するとどうなるかを調べておきましょう。

**命題-定義 3.26** (過収束  $p$  進ポリログ関数, [Col82, Proposition 6.2]). 自然数  $k$  に対し、許容開集合  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上定義されたリジッド解析的関数  $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  で、  $\text{Li}_k^{p,\dagger}(0) = \text{Li}_k^{p,\dagger}(\infty) = 0$  を満たし、さらに  $\mathbb{D}_0^-(1)$  上  $\text{Li}_k^p(z) - \frac{1}{p^k} \text{Li}_k^p(z^p) = \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$  と一致するものが唯一つ存在する。関数  $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  を 過収束  $p$  進ポリログ関数 *overconvergent  $p$ -adic multiple polylogarithm* と呼ぶ。

**注意 3.27** ( $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  について).

- (1) コールマンの論文 [Col82] では  $\ell_k^{(p)}(z)$  という記号が用いられています。 かよう 斯様な関数の一意性は、リジッド解析的関数に対する一致の定理から従います。
- (2) 過収束  $p$  進ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  は、第 A.2.3 節の意味で  $(\{0, 1, \infty\})$  に沿った過収束関数 *overconvergent function* となっています。
- (3) [Fur07, Definicion 2.13] では、KZ 方程式の基本解  $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$  を “淡中解釈” を介して適切に修正し、その係数を取ることで過収束  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  も定義しています。

\*64  $f_{\omega_p} = p$  であることと  $\mathcal{G}_p = \mathbb{Z}_p$  であることに注意しましょう。

**【証明の概略】** 先ず  $a \in \mathbb{C}_p$  を任意に選んで  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger}(z) = \overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger,(a)}(z) = \frac{z}{1-z} - \frac{z^p}{1-z^p}$ ,  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger,(a)}(z) = \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \frac{1}{t} \overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(t) dt \right]_0^z$  ( $k \geq 1$ ) と定めます\*65. 以下,  $k$  に関する数学的帰納法によって  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger,(a)}(z)$  が定理の主張を満たすことを示します (このとき, リジッド解析的関数の一致の定理より  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger}(z) := \overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger,(a)}(z)|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}^+(p^{-\frac{1}{p-1}})}$  が  $a$  に依らない関数となることが従います). 先ず  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger}(z)$  は明らかに  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger}(0) = 0$  を満たし,  $w = \frac{1}{z-1}$  と変数変換すると  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger}(z) = -(w+1) + \frac{(w+1)^p}{(w+1)^p - w^p}$  となるため,  $w = 0$  を代入して  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger}(\infty) = 0$  が従います. さらに  $(w+1)^p - w^p = 1 - p\tilde{w}$ ,  $|\tilde{w}|_p \leq \max_{1 \leq j \leq p-1} \{|w|_p^j\}$  と書けるため,  $|w|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$ , 即ち  $|z-1|_p > p^{-\frac{1}{p-1}}$  であれば  $\{(w+1)^p - w^p\}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (p\tilde{w})^k$  は確かに収束します; つまり  $\overset{\ast}{\text{Li}}_0^{p,\dagger}(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}}))$  が成り立つことが示されました. 次に  $\overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(z)$  が  $\overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(0) = \overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(\infty) = 0$  を満たす  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上のリジッド解析的関数である仮定しましょう. このとき  $\overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(z) \frac{dz}{z}$  は  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上のリジッド解析的な微分形式となります. また  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}}) = \mathbb{D}_{\infty}^-(p^{\frac{1}{p-1}})$  は“開円盤”なので, “ポアンカレの補題” (この後の注意 3.28 を参照) によって  $dF(z) = \overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(z) \frac{dz}{z}$  を満たす  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上のリジッド解析的関数  $F(z)$  が存在します. 一方で定義から  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger,(a)}(z)$  もまったく同じ形の微分方程式  $d\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger,(a)}(z) = \overset{\ast}{\text{Li}}_{k-1}^{p,\dagger,(a)} \frac{dz}{z}$  を満たします. 特に  $d(\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger,(a)}(z) - F(z)) = 0$  が  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上で成り立つので, コールマン積分の性質 (定理 1.18 を参照) から  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger}(z) - F(z)$  は大域的な定数関数となり, 特に  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger}(z) = F(z) + (\text{大域的定数})$  が  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上のリジッド解析的関数となることが従います. 最後に,  $\mathbb{D}_0^-(1)$  に制限したときの級数表示から  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger}(0) = 0$  となることは明らかです. また, 任意の自然数  $c$  に対して等式  $(\text{Li}_{\xi}^c)_c$  の“†版” (この後の定理 3.24 の証明で登場する式です) の両辺に  $z = \infty$  を代入することで  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger}(\infty) = 0$  も従います.  $\square$

**雑談 3.28** (“開円板”に対する“ポアンカレの補題”). 中心  $a \in \mathbb{C}_p$ , 半径  $r > 0$  の“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a|_p < r\}$  上のリジッド解析的関数は,  $\mathbb{C}_p$  係数の<sup>べき</sup>冪級数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,n}(z-a)^n$  であって, 任意の正の実数  $0 < \rho < r$  に対して  $|a_{f,n}|_p \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  を満たすものことでした (定義 A.8 (2) を参照). <sup>かよう</sup>斯様な  $f(z)$  に対して定義される (形式的な) “原始関数”  $F_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n+1} (z-a)^{n+1}$  (+“積分定数”) もまた, “開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  上

\*65 この定義は  $\overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,\dagger,(a)}(z) = \overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,(a)}(z) - \frac{1}{p^k} \overset{\ast}{\text{Li}}_k^{p,(a)}(z^p)$  と定めているのと等価です.

のリジッド解析的関数となります。実際、任意の  $0 < \forall \rho < r$  に対して

$$\begin{aligned} |a_{F_f, n}|_p \rho^n &= |a_{f, n-1}|_p |n^{-1}|_p \rho^n \leq |a_{f, n-1}|_p p^{\lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor} \rho^n \\ &\leq |a_{f, n-1}|_p \left( \rho^{\frac{\log p}{\log \rho}} \right)^{\frac{\log n}{\log p}} \rho^n = |a_{f, n-1}|_p \left( \rho^{1 + \frac{1}{\log \rho} \frac{\log n}{n-1}} \right)^{n-1} \cdot \rho \end{aligned}$$

と評価出来ますが ( $|n^{-1}|_p$  の評価については命題 1.14 の証明の議論も参考にしてください),  $\rho < r$  であることと  $n \rightarrow \infty$  としたときに  $\frac{\log n}{n-1} \rightarrow 0$  となることから, 任意の  $\rho < \forall \rho' < r$  に対して或る (十分大きな) 自然数  $N$  が存在して,  $n > N$  のとき  $\rho^{1 + \frac{1}{\log \rho} \frac{\log n}{n-1}}$  は  $\rho'$  で抑えられます. したがって  $|a_{f, n-1}|_p (\rho')^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  であることから,  $F_f(z)$  も同じ収束条件を満たすことが従います. 同様の議論で, “開円環”  $\{z \in \mathbb{C}_p \mid r < |z - a|_p < R\}$  上のリジッド解析関数  $f(z)$  の “ $a$  での留数” (即ち  $a$  に関するローラン展開の  $(z - a)^{-1}$  の係数) が 0 であるならば,  $f$  の形式的な “原始関数” も同じ円環上のリジッド解析的関数を定めることが証明出来ます. この事実は [Col82] でも言及されていますが, その証明は割愛されていたため ここ 補足しておきました. また上記の議論は, はんすう 反芻してみれば直ぐに分かりませんが “閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r)$  (但し  $r \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p$ ) には適用出来ません.

**命題 3.29** ([Col82, Lemma 7.2]). 任意の  $|z - 1|_p \geq 1$  なる  $p$  進数  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  に対して  $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x) = \text{Li}_k^{p, \dagger}(z)$  が成り立つ.

**【証明】** 先ず  $z \in \mathbb{D}_0^-(1) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  に対して,  $\mu_z$  の定義 (命題-定義 3.17) から

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{x \in (\mathbb{Z}_p/p^N \mathbb{Z}_p)^\times} \tilde{x}^{-k} \mu_z(x + p^N \mathbb{Z}_p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=0 \\ p \nmid n}}^{p^N-1} n^{-k} \frac{z^n}{1 - z^{p^N}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z^{p^N}} \left\{ \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{z^n}{n^k} - \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{z^{pn}}{(pn)^k} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z^{p^N}} \left\{ \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{z^n}{n^k} - \frac{1}{p^k} \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{(z^p)^n}{n^k} \right\} \end{aligned}$$

が成り立ちますが,  $|z|_p < 1$  を仮定していたので  $\frac{1}{1 - z^{p^N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$  となり, かつ右辺の中括弧の中身は過収束  $p$  進ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p, \dagger}(z)$  に収束するため (雑談 3.27 (1) を参照), 主張の等式が成り立ちます.

一般の  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  にこの等式を拡張するために クラスナー解析的関数 KRASNER'S analytic function の理論 [Kra74] を用います.  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上のクラスナー解析的関数とは,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  上の有理関数で  $\mathbb{D}_1^-(1)$  にしか極を持たないものの (一様収束位相による) 極限として表される関数です.  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上のクラスナー解析的関数全体の集合は, 定義から

$$\mathbb{C}_p \{(z - 1)^{-1}\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - 1)^{-n} \mid |c_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\},$$

即ちアフィノイド領域  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上のリジッド解析的関数の集合と一致しています (例えば [Rob00, Chapter 6, Section 4.3, Theorem] を参照). 命題-定義 3.26 により  $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  は  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$  上のリジッド解析的関数であるため, 特に  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上クラスナー解析的. また,  $\mu_z$  に関する積分の定義から  $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x)$  は 1 の  $p$  冪根にのみ極を持つ ( $z$  に関する) 有理関数の極限として実現されるため (上記の計算も参考にしてください),  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上のクラスナー解析的関数となります\*66. 主張の等式の両辺に現われる関数は, 各々の定義域の共通部分  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  に集積点を持つような部分集合  $\mathbb{D}_0^-(1) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上で一致しているため, クラスナー解析関数に対する一致の定理 [Kra74, Section 3, Théorème d'unicité] により  $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x) = \text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$  が  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$  上でも成立することが従います ([Ko80, Chapter II, Section 5, Lemma 1] の議論も参考にしてください).  $\square$

**雑談 3.30.** マーク・クラスナー Marc KRASNER の  $p$  進解析的関数の理論は, ジョン・テイト John TATE による所謂 いわゆる リジッド解析幾何学 *rigid analytic geometry* の創設前に展開されていた理論で, 複素関数論に於ける ルンゲの近似定理 RUNGE'S approximation theorem [Con78, Chapter VIII, 1.7 Runge's Theorem] に触発されて構築されたものです. ルンゲの近似定理は,  $\mathbb{C}$  のコンパクト集合  $K$  上 (正確には  $K$  を含む或る開集合上) 定義された正則関数が,  $K$  の外にのみ極を持つような有理関数によって (幾らでも良い精度で) 近似出来ることを主張する定理で, この定理に着想を得たクラスナーは 擬連結的部分集合 *sous-ensemble quasi-connexe* という  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  の部分集合のクラスを定義した上で, 擬連結集合の補集合にのみ極を持つ有理関数の一様収束極限で表される関数として 解析的元 *élément analytique* の概念を導入しました. 「有理関数で近似される」という非常に強い性質により, クラスナーの解析的元は一致の定理を満たすことが証明出来ます. クラスナーの理論とリジッド解析幾何学は見た目から大きく異なっており, 両者の関係は気になるところです. 森田康夫 [Mor78] によると, 係数体が代数的閉体かつ “極大完備 *maximally complete*” で, 考えている部分集合が “完備正則擬連結集合 *completely regular quasi-connected set*” であるという条件の下では両者は一致しますが, これらの仮定が満たされない場合には実際に理論に両者の間にはずれが生じるようです. クラスナーの理論は多変数化が困難であるなどの問題点 はらを孕んでいたことも手伝って, 現在では「 $p$  進」世界の幾何はテイトのリジッド解析幾何学 (或いはその拡張) に基づいて議論することが主流となっていますが, “複素関数論的な” 視点に基づくクラスナーの理論も直観的に受け入れやすいですし, 何より扱いやすいため, 今回のように何かと援用されることがあります.

\*66 1 の  $p^N$  乗根 ( $N \geq 1$ )  $\zeta$  に対して  $0 = \zeta^{p^N} - 1 \equiv (\zeta - 1)^{p^N} \pmod{p}$  が成り立つため, 任意の 1 の  $p$  冪根は  $\mathbb{D}_1^-(1)$  の元となることに注意しましょう.

【定理 3.24 の証明の概略】 命題 3.29 により

$$L_p(k, \omega_p^{1-k}) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} \underbrace{d\tilde{\mu}_c(x)}_{=\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} d\mu_\xi(x)} = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,\dagger}(\xi)$$

$$\stackrel{\text{命題-定義 3.26}}{=} \frac{1}{c^{1-k} - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \left( \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi) - \frac{1}{p^k} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi^p) \right) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \left( 1 - \frac{1}{p^k} \right) \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi)$$

が成り立ちます ( $c$  が  $p$  と素であることから,  $\xi$  が  $1$  でない  $1$  の  $c$  乗根を動くときに  $\xi^p$  も同じ集合の元を動くため,  $\xi^p \mapsto \xi$  とおき直しました). 此処で  $|z|_p < 1$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^p(\xi z) &= \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi z)^n}{n^k} = \sum_{\xi^c=1} \xi^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} = c \sum_{\substack{n=1 \\ c|n}}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{cn}}{(cn)^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} = c^{1-k} \text{Li}_k^p(z^c) - \text{Li}_k^p(z) \end{aligned}$$

と計算出来ます. コールマン関数の一致の定理 (命題 1.19) により, 上記の等式はコールマン関数の等式  $\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi z) = c^{1-k} \text{Li}_k^{p,(a)}(z^c) - \text{Li}_k^{p,(a)}(z) \cdots (\text{Li}_\xi)_c$  に拡張されるので, 特

に両辺の  $\lim_{z \rightarrow 1}$  での極限をとると, コールマン関数の連続性 ([Col82, Corollary 7.1 (a)] を参照) から等式

$$\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi) = \lim_{z \rightarrow 1}' \left\{ c^{1-k} \text{Li}_k^{p,(a)}(z^c) - \text{Li}_k^{p,(a)}(z) \right\} = (c^{1-k} - 1) \zeta_p^{\text{KZ}}(k)$$

を得ます. これらを併せて, 所望の等式

$$L_p(k, \omega_p^{1-k}) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \left( 1 - \frac{1}{p^k} \right) \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \left( 1 - \frac{1}{p^k} \right) \cancel{(c^{1-k} - 1)} \zeta_p^{\text{KZ}}(k)$$

が従います. □

**雑談 3.31** ( $p$  進  $L$  関数の正の整数点での特殊値). 本節では KZ 型  $p$  進ゼータ値との関係性を重視して, 自明指標  $\mathbb{1}$  に対するコールマンの公式 (定理 3.24) のみを紹介しましたが, コールマン自身は一般のディリクレ指標  $\chi$  に対して

$$L_p(k, \chi \omega_p^{1-k}) = \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p^k} \right) g(\chi, \zeta_{f_\chi}) f_\chi^{-1} \sum_{\alpha=1}^{f_\chi-1} \bar{\chi}(\alpha) \text{Li}_k^{p,(a)}(\zeta_{f_\chi}^{-\alpha})$$

という形の公式を導き出しています ([Col82, Section I (3), Section VII] を参照). <sup>ただ</sup> 但し  $\zeta_{f_\chi}$  は (固定された)  $1$  の原始  $f_\chi$  乗根で  $g(\chi, \zeta_{f_\chi}) = \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \chi(\alpha) \zeta_{f_\chi}^{-\alpha}$  はガウス和です. 証明

の方針は、コブリッツ測度に関するフーリエ反転公式 [Ko79, Section 2. Lemma 2.] を用いて  $\mu_\xi$  での  $p$  進積分から  $\chi$  の部分を“括り出し”て、残った  $p$  進積分を  $p$  進ポリログ関数を用いて表すというものです。定理 3.24 の証明を理解出来る方であれば原論文の証明を追うのも難しくはないと思いますので、是非挑戦してみてください。特に  $k = 1$  での式

$$L_p(1, \chi) = - \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p} \right) \frac{g(\chi, \zeta_{f_\chi})}{f_\chi} \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \bar{\chi}(\alpha) \log_p(1 - \zeta_{f_\chi}^{-\alpha})$$

はレオポルトの公式 LEOPOLDT formula [Leo75] と呼ばれ、既にレオポルトによって ( $p$  進解析的な手法で) 導出されていました。コブリッツの論文 [Ko79] の主目的の 1 つは、 $p$  進測度  $\mu_\xi$  を用いてレオポルトの公式の簡明な別証明を与えることだったのです。

尚、本節では  $p$  進  $L$  関数の正の整数点での特殊値を  $p$  進ポリログ関数を用いて表す方法について解説しましたが、 $p$  進ポリログ関数ではなく  $p$  進対数的ガンマ関数  $p$ -adic log gamma function を用いて表す研究もあります。コブリッツの論文 [Ko79] の冒頭部に主要な結果が良く纏められていますので、興味のある方はご参照ください ([Ko80]の方が読み易いかもしれません)。また、既に紹介しましたが、コールマンの公式に関しては坂内健一さんによるコブリッツの  $p$  進測度を用いない証明 [坂内 02] もあります。

### § 3.3 多変数の場合 — 古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文の理論

本小節では、古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文の 4 氏による“ $p$  進多重  $L$  関数”についての最近の結果 [FKMT17b] について紹介します。極めて複雑な式がこれでもかと言わんばかりに続々と登場する論文ではありますが、大筋としては第 3.2 節で紹介したコブリッツとコールマンの理論を非常に丁寧に多変数化したものであるため、予め要点さえ絞り込んでおけば彼等の結果の概要を掴むことは難しいことではありません。本小節では第 3.2 節の流れに沿いつつ、対応する [FKMT17b] の結果をあまり繁雑にならない程度に紹介したいと思います。

尚、この小節では記号を軽くするために 太字の記号  $\mathbf{s}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}$ , etc..... で  $r$  個の成分を持つベクトルを表す記法を用います。

#### § 3.3.1 オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数の“特異点解消”とその特殊値

オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s}) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}}$  の「 $p$  進版」を構成するための準備段階として、まずは  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の“負の整数点での特殊値”を考察しましょう。第 3.2.1 節の  $\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t} = \frac{1}{e^t - 1}$  のメラン変換による解析接続を踏まえるならば、安直に考えると  $\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t}$  の“反復積分”によって  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の解析接続が出来るのではないかと期待されます。より

詳しくは、関数  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t})$  (“ $:= \mathfrak{H}(\mathbf{t}; \mathbb{1})$ ”) を

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}) &:= \prod_{j=1}^r \mathfrak{H}_{\mathbb{1}, \mathbb{1}}(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r) = \prod_{j=1}^r \left( -\frac{\mathfrak{F}^0(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)}{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r} \right) \\ &= \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - e^{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r}} = \frac{1}{1 - e^{t_1 + t_2 + \dots + t_r}} \cdot \frac{1}{1 - e^{t_2 + \dots + t_r}} \cdots \frac{1}{1 - e^{t_r}} \end{aligned}$$

と定めると、形式的には  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t})$  の“多重メルン変換”による  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の解析接続

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^r} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1} dt_1 \cdots dt_r = (-1)^{r+s_1+s_2+\dots+s_r} \left\{ \prod_{j=1}^r \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s_j)} \right\} \zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$$

が得られそうです ([FKMT17a, (2.1)] の式変形も参照; 第 3.2.1 節でメルン変換の際に用いた関数  $\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t}$  ではなく、その  $(-1)$  倍  $\mathfrak{H}_{\mathbb{1}}(t) := -\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t}$  を用いているため、積分表示に  $(-1)^r$  のずれが生じてしまっています). ただ、実際にはこの“積分表示”による解析接続は意味を持ちません; 非積分関数  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1}$  が ( $\mathbf{t}$  の関数として) 原点  $O$  で発散してしまうことから、そのままでは左辺の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限は収束しません. また、 $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の正しい解析接続 ジャオジャンキアン は趙 健強 *Jianqiang ZHAO* の研究や秋山茂樹、江上繁樹、谷川好男の共同研究で得られています; 彼等の結果によると抑々点  $-\mathbf{k}$  は軒並み  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の極に位置してしまうので、解析接続した  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  に安直に  $\mathbf{s} = -\mathbf{k}$  を代入するだけではあまり意味のある値は得られません. オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数の解析接続と極の位置の同定についての詳細は、小野塚さんの記事 [小野塚 SS18, Proposition 2.1] を参照してください.

この状況で“ $\zeta_{\text{EZ}}(-\mathbf{k})$ ”として意味のある値を導出する手法は幾つか考えられますが (本報告集の小野塚さん、小見山さんの解説記事 [小野塚 SS18, 小見山 SS18] も参照してください), [FKMT17a] では先ずオイラー–ザギエ型多重ゼータ関数そのものではなく オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数 *multiple zeta function of EULER–ZAGIER–LERCH function*  $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$  に取り替えることで、そのままでは意味をなさない上記の解析接続の式に意味を持たせることを考察しました. 実際、第 3.3.2 節で導入する関数  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1}$  は  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$  が  $\xi_j \neq 1$  ( $1 \leq \forall j \leq r$ ) を満たすときに ( $\mathbf{t}$  の関数として) 原点  $O$  のまわりで解析的になることを用いると、上記の解析接続の式が  $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$  に対しては意味を持ちます (第 3.3.2 節の (♡) を参照). そして [FKMT17a, Section 3] では、レルヒ型ゼータ関数を用いたリーマンゼータ関数の“極を取り除く”操作  $\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \zeta(s, \xi) = (c^{1-s} - 1)\zeta(s) \cdots (L_\xi)_c$

に触発されて“ $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(\mathbf{s}) := \lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{(c-1)^r} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)'} \zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$ ”という気持ち<sup>\*67</sup>で ([FKMT17a,

<sup>かよう</sup>  
\*67 もちろん斯様な極限を取るためにはパラメータ  $c$  が 実数を動く ように拡張する必要があるため、実際には母関数  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t})$  を“実数パラメータ  $c$  を用いて修正したもの”  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; c)$  [FKMT17a, Definition 1.9] を用いて特異点解消が実行されています. 小見山さんの解説記事 [小見山 SS18, 定義 1.1] も参照してください.

Section 3, 冒頭部] も参照) オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数の 特異点解消 *desingularisation* を実行することを試みました. 彼等が構成した 特異点解消オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 *desingularised multiple zeta function of EULER–ZAGIER type*  $\zeta_{EZ}^{\text{des}}(s)$  (または  $\zeta_{FKMT}(s)$ ) は  $\mathbb{C}^r$  上の 整関数 となるため,  $-\mathbf{k}$  での値も定義可能である, というわけです. そして, 構成から  $\zeta_{EZ}^{\text{des}}(-\mathbf{k})$  の値は各  $\zeta_{EZL}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})$  の値から計算されるはずなので, コブリッツの  $p$  進測度を用いて 各特殊値  $\zeta_{EZL}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})$  を  $p$  進補間するような測度が構成出来る ならば, それらを足し合わせて “極限  $c \rightarrow 1$  を取る” ことで晴れて “ $p$  進多重  $L$  関数” が得られるだろう, と期待されます. この戦略に基づいて “ $p$  進多重  $L$  関数”  $L_p(s, \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  を構成した論文が [FKMT17b] です. なお, (「実 / 複素」の世界で構成された) 特異点解消多重ゼータ関数  $\zeta_{EZ}^{\text{des}}(s)$  の解析的な性質等は, 小見山尚こみやま なおさんの解説記事 [小見山 SS18] に良く纏められていますので, 原論文 [FKMT17a] と併せて是非参考になさってください.

**雑談 3.32.** 論文 [FKMT17a, FKMT17b] では, 多重ゼータ関数の定義式 (EZ) の  $n_j$  をより一般の 線型形式 *linear form*  $\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 + \dots + \gamma_j m_j$  に取り替えることで定義される 一般化オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数  $\zeta_{EZ}(s, \boldsymbol{\gamma})$  *generalised multiple zeta function of EULER–ZAGIER type* (もしくはその “レルヒ型” への拡張) の設定で議論が展開されています.  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$  の場合が本稿で扱われているケースです.

### § 3.3.2 “ $p$ 進多重 $L$ 関数” の定義 — 積測度の積分として

第 3.3.2 節では, オイラー–ザギエ–レルヒ型ゼータ関数  $\zeta_{EZL}(s, \boldsymbol{\xi})$  の復習から始めて, 第 3.2.2 節と並行した議論により “ $p$  進多重  $L$  関数”  $L_p(s, \omega^{\mathbf{a}}; c)$  が構成されることを概観します.

#### 1 の冪根のなす群についての記号の規約

以下では自然数  $c$  に対し  $\mu_c$  で 1 の  $c$  乗根のなす乗法群を表し, 記号

$$\star (\mu_c^r)' := \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \in \mu_c^r \mid \xi_j \neq 1 (1 \leq \forall j \leq r)\}$$

$$\star (\mu_c^r)'' := \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \in \mu_c^r \mid \xi_j \xi_{j+1} \cdots \xi_r \neq 1 (1 \leq \forall j \leq r)\}$$

を断りなく用います.

**定義 3.33** (オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数). 自然数  $c \neq 1$  と  $\boldsymbol{\xi} \in \mu_c^r$  に対し, 多重ディリクレ級数  $\zeta_{EZL}(s; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r} \frac{\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \cdots \xi_r^{m_r}}{m_1^{s_1} (m_1 + m_2)^{s_2} \cdots (m_1 + m_2 + \dots + m_r)^{s_r}}$  で定義される複素関数を オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数 *multiple zeta function of EULER–ZAGIER–LERCH type* と呼ぶ.

オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数  $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi})$  も、通常のオイラー–ザギエ型多重ゼータ関数  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  と同様に領域  $\mathcal{D}_r := \{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r \mid \text{Re}(s_{r-j+1} + \dots + s_r) > j \ (1 \leq \forall j \leq r)\}$  で絶対収束します。また  $\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)'$  のときは、ハンケル経路  $\mathcal{C}_\varepsilon$  の直積  $\mathcal{C}_\varepsilon^r$  上での

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) &:= \prod_{j=1}^r \left( -\frac{\mathfrak{F}_{\mathbf{1}, \boldsymbol{\xi}}^0(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)}{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r} \right) = \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - \xi_j \exp(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)} \\ &= \frac{1}{1 - \xi_1 e^{t_1 + t_2 + \dots + t_r}} \cdot \frac{1}{1 - \xi_2 e^{t_2 + \dots + t_r}} \cdots \frac{1}{1 - \xi_r e^{t_r}} \end{aligned}$$

の“多重メラン変換”による表示

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^r} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}^{-1}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1} dt_1 \cdots dt_r = (-1)^{r+s_1+\dots+s_r} \left\{ \prod_{j=1}^r \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s_j)} \right\} \zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi}) \cdots (\heartsuit)$$

を持ち、特に  $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi})$  は  $\mathbb{C}^r$  上に 整関数 として解析接続されます ([FKMT17a, Theorem 2.1] 参照)。また

$$\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1, k_2, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r} \mathfrak{B}((k_1, k_2, \dots, k_r); \boldsymbol{\xi}) \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} \frac{t_2^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{t_r^{k_r}}{k_r!}$$

により“振れ多重関–ベルヌーイ数” *twisted multiple SEKI–BERNOULLI number*  $\{\mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})\}_{\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r, \boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)' } \subset \mathbb{Q}(\{\xi_j\}_{j=1}^r)$  を定義すると、オイラー–ザギエ–レルヒ型ゼータ関数の負の整数点での特殊値が  $\zeta_{\text{EZL}}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}) = (-1)^{r+\text{wt}(\mathbf{k})} \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}^{-1})$  と表されます (計算の詳細は [FKMT17a, Theorem 2.1] を参照してください)。

ところで関数  $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi})$  は、実質的に第 3.2 節で登場した  $\mathfrak{H}_{\mathbf{1}, \boldsymbol{\xi}}(t)$  の積ですが、一方で  $\mathfrak{H}_{\mathbf{1}, \boldsymbol{\xi}}(z)$  自体を“ $p$  進補間”してしまう測度がコブリッツの  $p$  進測度  $\mu_\xi$  でした。したがってコブリッツ測度の 積測度 が  $\mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})$  を  $p$  進補間するであろうことは容易に想像が付くでしょう。

**命題 3.34** ([FKMT17b, Proposition 1.15]).  $c \neq 1$  を  $p$  と素な自然数とし、 $\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)'$

とする。このとき  $\mathbb{Z}_p^\times$  上の測度  $\mu_\xi := \prod_{j=1}^r \mu_{\xi_j}$  と  $\mathbf{t} \in (\mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}}))^r$  に対して

$$\int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^r e^{(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)x_j} d\mu_\xi(\mathbf{x}) = \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) \quad \left( = \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - \xi_j e^{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r}} \right)$$

が成り立つ。特に両辺を  $\mathbf{t}$  に関して冪級数展開して係数比較することで

$$\int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^r (x_1 + \dots + x_j)^{k_j} d\mu_\xi(\mathbf{x}) = \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}) \quad (= (-1)^{r+\text{wt}(\mathbf{k})} \zeta_{\text{EZL}}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}^{-1}))$$

が成り立つことも従う。

したがって、これらを“足し合わせて”出来る測度  $\tilde{\mu}_c := \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \mu_\xi$  を

$$(\mathbb{Z}_p^r)' := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}_p^r \mid p \nmid (x_1 + \dots + x_j) \ (1 \leq j \leq r)\}$$

上で“ $p$  進多重メラン変換”したものが“ $p$  進多重ゼータ関数”と呼ぶに相応しい対象であると言えるでしょう。

**定理-定義 3.35** ( $p$  進多重  $L$  関数, [FKMT17b, Definition 1.16, Theorem 2.1]).  $c \neq 1$  を  $p$  と互いに素な自然数とし,  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r$  とする.  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_p^r$  に関する  $p$  進正則関数

$$L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c) := \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^r \langle x_1 + x_2 + \dots + x_j \rangle^{-s_j} \omega_p^{a_j}(x_1 + x_2 + \dots + x_j) d\tilde{\mu}_c(\mathbf{x})$$

を  $p$  進多重  $L$  関数  $p$ -adic multiple  $L$ -function と呼ぶ.  $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  は以下の“補間公式”を満たす;  $\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$  に対して

$$L_p(-\mathbf{k}; \omega_p^{\mathbf{k}}; c) = \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \xi) + \sum_{d=1}^r \left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\rho \in \mu_c^r \\ \text{1でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \rho \xi).$$

ただし  $\rho \xi := (\rho_j \rho_{j+1} \cdots \rho_r \xi_j)_{j=1}^r = (\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_r \xi_1, \rho_2 \cdots \rho_r \xi_2, \dots, \rho_r \xi_r)$  とする.

この“補間公式”は、被積分関数にタイヒミュラー指標  $\omega_p$  が残らない“最も簡単な場合”の積分を計算したものです. 積分計算自体は、命題 3.3.2 とほぼ同様なので大したことはないのですが、“ $p$  進多重メラン変換”の際に積分領域を  $(\mathbb{Z}_p^r)'$  に制限していることから

$$\mathbb{Z}_p^r \setminus (\mathbb{Z}_p^r)' = \bigcup_{i=1}^r \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p^r \mid p \mid (x_1 + x_2 + \dots + x_i)\}$$

での積分値を除外する必要があります. そのために公式

$$1 - \frac{1}{p} \sum_{\rho_i=1} \rho^{x_1 + \dots + x_i} = \begin{cases} 1 & (p \nmid (x_1 + \dots + x_i) \text{ のとき}) \\ 0 & (p \mid (x_1 + \dots + x_i) \text{ のとき}) \end{cases}$$

を利用しているのですが、これらの積を展開して整理する計算が非常に鬱陶しく、“補間公式”を徒らに複雑にするのに一役買ってしまっています. 計算の詳細は原論文をご参照ください. 本来ならば、固定した  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r$  と任意の  $\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$  に対して  $L_p(-\mathbf{k}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  を計算したいところですが、その場合  $\omega_p^{a_j}$  で“捻った”タイプの“一般化捩れ多重ベルヌーイ数(?)”も考察する必要が生じ、計算がさらに繁雑になることは疑いようがありません.

**雑談 3.36.**  $p$  進多重  $L$  関数  $L_p(\mathbf{s}, \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  が構成された恩恵として 多重クンマー合同式 *multiple KUMMER congruence* が導かれます; 即ち  $1 \leq j \leq r$  および  $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$  に対して  $k_j \equiv l_j \pmod{(p-1)p^{N_j-1}\mathbb{Z}}$  ( $1 \leq j \leq r$ ) が成り立っているならば、合同式  $L_p(-\mathbf{k}; \omega_p^{\mathbf{k}}; c) \equiv L_p(-\mathbf{l}; \omega_p^{\mathbf{l}}; c) \pmod{p^{\min\{N_j \mid 1 \leq j \leq r\}}}$  が従います ([FKMT17b, Theorem 2.1]). この合同式自体は  $p$  進多重  $L$  関数  $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  の  $\mathbf{s}$  に関する連続性の帰結に

過ぎませんが、両辺が定理-定義 3.35 のような“あられもない姿”をしているため、結果として一般化多重ベルヌーイ数  $\mathfrak{B}(\mathbf{k}; \xi)$  の極めて複雑な線型和の間の合同式が得られたこととなります。[FKMT17b] の Example 2.12, 2.13, 2.14 に 2 変数および 3 変数の場合の多重クンマー合同式の例が明示的に示されていますので、興味のある方はご参照ください。

### § 3.3.3 コールマン型公式 — $p$ 進多重星付ポリログ関数の特殊値との関係

コールマンの公式 (定理 3.24) の証明を思い返せば、 $\prod_{j=1}^r (x_1 + \dots + x_j)^{-k_j}$  を  $\tilde{\mu}_c$  で積分すれば“ $p$  進多重  $L$  関数の 正の整数点”での特殊値を (捻られた) “ $p$  進多重ポリログ関数”の特殊値として表すことが出来るのではないかと誰もが期待されることでしょう。実際その通りの方針で多重  $p$  進  $L$  関数のコールマン型の公式が得られますが、多重化された文脈では単なる  $p$  進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$  ではなく  $p$  進捩れ多重星付ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$  が登場するのは非常に興味深い現象のように思えます。

**定義 3.37** ( $p$  進捩れ多重星付ポリログ関数. [FKMT17b, Theorem-Definition 3.32]).  $c$  を自然数とし、 $\xi \in \mu_c^r$  とする。冪級数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(\xi; z) := \sum_{0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} z^{n_r}$  は  $|z|_p < 1$  で絶対収束する。関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(\xi; z)$  は (分枝  $a$  の) コールマン反復積分により  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j)^{-1} \mid 1 \leq j \leq r\}$  上のコールマン関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$  に“解析接続”される (後述)。関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$  を  $p$  進捩れ多重星付ポリログ関数  $p$ -adic twisted multiple star-polylogarithm と呼ぶ。

実際、 $|z|_p < 1$  で  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(z)$  は微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{p,*}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, \xi_r; z) &= \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{p,*}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, \xi_r; z) & (k_r \geq 2 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{z(1 - \xi_r z)} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{p,*}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-2}, \xi_{r-1} \xi_r; z) & (k_r = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \\ \frac{d}{dz} \text{Li}_1^{p,*}(\xi; z) &= \frac{\xi}{1 - \xi z} \end{aligned}$$

を満たすため、 $X_{\xi}(\mathbb{C}_p) := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\{0, \infty\} \cup \{(\xi_j \dots \xi_r)^{-1}\}_{j=1}^r)$  上で定義された有理微分形式  $\omega_0(t) = \frac{dt}{t}$ ,  $\omega_{[1]}(t) = \frac{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r}{1 - \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r t} dt$ ,  $\omega_{[j]}(t) = \frac{1}{t(1 - \xi_j \dots \xi_r t)} dt$  ( $2 \leq j \leq r$ ) の

コールマン反復積分  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z) = \left[ \int_{\text{Col}}^{(a)} \underbrace{\omega_{[1]} \omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \omega_{[2]} \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots \omega_{[r]} \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z$  に

より、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(\xi; z)$  は  $X_{\xi}(\mathbb{C}_p)$  のコールマン関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$  へと“解析接続”されます ([FKMT17b, Lemma 3.31] も参照)。

命題 3.29 と対応して、コブリッツ測度の適切な積測度での  $\prod_{j=1}^r \langle x_1 + \dots + x_j \rangle^{-k_j}$  の積分と  $p$  進捩れ多重星付ポリログ関数が結び付きます.

**定理 3.38** ([FKMT17b, Theorem 3.5, Theorem 3.35, Theorem 3.36]).  $c$  を  $p$  と素な

自然数,  $\xi \in \mu_c^r$  とし,  $\hat{\mu}_\xi := \prod_{j=1}^r \mu_{\xi_j \dots \xi_r, z}$  とおく. このとき次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^r (x_1 + x_2 + \dots + x_j)^{-k_j} d\hat{\mu}_\xi z &= \frac{1}{p^r} \sum_{\substack{\alpha \in \{1, \dots, p-1\}^r \\ \rho \in \mu_c^r}} \rho^{-\alpha} \text{Li}_k^{p, *, (a)}(\rho \xi; z) \\ &= \text{Li}_k^{p, *, (a)}(\xi; z) + \sum_{d=1}^r \left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\rho \in \mu_c^r \\ 1 \text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \text{Li}_k^{p, *, (a)}(\rho \xi; z). \end{aligned}$$

ただ  
但し  $\rho^{-\alpha} = \prod_{j=1}^r \rho_j^{-\alpha_j}$ ,  $\rho \xi = (\rho_1 \xi_1, \rho_2 \xi_2, \dots, \rho_r \xi_r)$  とする.

**注意 3.39.** 定理 3.38 の等式で表される  $z$  の関数を  $\text{Li}_k^{p, *, \dagger}(\xi; z)$  と表すことにしますと ([FKMT17b] の記号では  $\ell_k^{p, *}$  と表記されています), 関数  $\text{Li}_k^{p, *, \dagger}(\xi; z)$  はアフィノイド領域  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \bigcup_{j=1}^r \mathbb{D}_{(\xi_j \xi_{j+1} \dots \xi_r)^{-1}}(1)$  よりも少し“広い”領域でのリジッド解析的関数 (つ

まり 過収束なりジッド解析的関数) となることが [FKMT17b, Theorem 3.22] で示されています. また  $|z|_p < 1$  では冪級数  $\text{Li}_k^{p, *, \dagger}(\xi; z) = \sum_{\substack{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r \\ p \nmid n_1, \dots, p \nmid n_r}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} z^{n_r}$  で表され

ます ([FKMT17b, Definition 3.4] も参照).  $\text{Li}_k^{p, *, \dagger}(\xi; z)$  を 過収束  $p$  進捩れ多重星付ポリログ関数 *overconvergent  $p$ -adic twisted multiple star-polylogarithm* ([FKMT17b] では  $p$  進リジッド捩れ多重星付ポリログ関数  *$p$ -adic rigid twisted multiple star-polylogarithm*) と呼びましょう.  $\mathbf{k}$  の深さが 1 の場合は  $\text{Li}_k^{p, *, \dagger}(z)$  は命題-定義 3.26 の過収束  $p$  進ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p, \dagger}(z)$  と同じものとなります.

なお, 定理 3.38 の証明の流れは命題 3.29 と同様です; 先ず第一段階として“開円盤”  $\mathbb{D}_0^-(1) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$  で, 冪級数表示を介して主張の等式が成立することを示します. また, 等式のどの辺の関数もクラスナー解析的関数であることは簡単に確認出来るので, クラスナー解析関数の一致の定理 [Kra74, Section 3, Théorème d’unicité] により主張の等式が  $(\{\xi_j \dots \xi_r\}^{-1})_{j=1}^r$  を中心とする“小さい開円盤”を除いた領域上の) リジッド解析的関数の等式として成立することが従います.

**注意 3.40** ( $p$  進多重星付ポリログ関数が登場する理由). 例えば  $r = 2$  かつ  $|z|_p < 1$  のときに定理 3.38 の  $p$  進積分を計算すると,  $\mu_{\xi_1 \xi_2 z}, \mu_{\xi_2 z}$  の定義 (命題-定義 3.17) から

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} x_1^{-k_1} (x_1 + x_2)^{-k_2} d\mu_{\xi_1 \xi_2 z}(x_1) d\mu_{\xi_2 z}(x_2) \\ &= \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{m_1=0 \\ p \nmid m_1}}^{p^{N_1}-1} \sum_{\substack{m_2=0 \\ p \nmid (m_1+m_2)}}^{p^{N_2}-1} \frac{1}{m_1^{k_1} (m_1 + m_2)^{k_2}} \frac{(\xi_1 \xi_2 z)^{m_1}}{1 - (\xi_1 \xi_2 z)^{p^{N_1}-1}} \frac{(\xi_2 z)^{m_2}}{1 - (\xi_2 z)^{p^{N_2}-1}} \end{aligned}$$

となり, いかにも “ $\text{Li}_{k_1, k_2}(\xi_1, \xi_2; z)$ ” に似た形の式が現れます. ところが, 2 番目の総和記号の和に課せられた条件  $p \nmid (m_1 + m_2)$  は  $m_1$  が  $p$  と素な数であれば  $m_2 = 0$  でも成り立ちます. したがって  $n_1 = m_1, n_2 = m_1 + m_2$  とすると, 右辺は “ $n_1 \leq n_2$  かつ  $p \nmid n_1, p \nmid n_2$ ” なる組  $(n_1, n_2)$  を渡る和になります. したがって, 最終的な計算結果として  $\text{Li}_{k_1, k_2}^{p, \dagger}(\xi_1, \xi_2; z) = \sum_{\substack{0 < n_1 < n_2 \\ p \nmid n_1, p \nmid n_2}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} z^{n_2}$  ではなく星付の  $p$  進多重ポリログ関数

$$\text{Li}_{k_1, k_2}^{p, *, \dagger}(\xi_1, \xi_2; z) = \sum_{\substack{0 < n_1 \leq n_2 \\ p \nmid n_1, p \nmid n_2}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} z^{n_2} \text{ が出来て来ってしまうのです.}$$

ただ, この説明はあくまで「積分の計算をしてみたら星付になった」という結果論を述べただけです. この後の定理 3.41 で,  $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  の正の整数点での特殊値が  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, *, (a)}(z; \xi)$  の特殊値で表されることを概観しますが, 元々は 星付でない 多重ゼータ関数  $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{k}; \xi)$  の特殊値を “補間する”  $p$  進多重  $L$  関数  $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  の “正の整数点での特殊値” に何故 星付の  $p$  進多重ポリログ関数の特殊値が現れるのか, という理論的・哲学的な背景はまだ解き明かされていません.

これを用いて  $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$  に対するコールマン型公式は導かれます.

**定理 3.41** ( $p$  進多重  $L$  関数に対するコールマン型公式, [FKMT17b, Theorem 3.40, Theorem 3.41]).  $c \neq 1$  が  $p$  と素な自然数ならば  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$  に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} L_p(\mathbf{k}; \omega_p^{-\mathbf{k}}; c) &= \frac{1}{p^r} \sum_{\substack{\alpha \in \{1, \dots, p-1\}^r \\ \rho \in \mu_c^r, \xi \in (\mu_c^r)''}} \rho^{-\alpha} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, *, (a)}(\rho \xi; 1) \\ &= \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, *, (a)}(\tilde{\xi}; 1) + \sum_{d=1}^r \left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\rho \in \mu_c^r \\ 1 \text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, *, (a)}(\rho \tilde{\xi}; 1) \end{aligned}$$

ただ 但し  $\tilde{\xi} = \left(\frac{\xi_j}{\xi_{j+1}}\right)_{j=1}^r$ ,  $\rho \tilde{\xi} = \left(\frac{\rho_j \xi_j}{\xi_{j+1}}\right)_{j=1}^r$  ( $\xi_{r+1} = 1$  とする) とし,  $\rho^{-\alpha}, \rho \xi$  は定理 3.38 と同じものであるとする.

なお、 $\xi \in (\mu_c^r)''$  であるときには、 $z = 1$  は右辺に現われるすべての  $p$  進捩れ多重星付ポリログ関数  $\text{Li}_k^{p,*(a)}(\xi; z)$  の“リジッド解析的な部分”に位置するため、コールマン関数の性質から右辺の値はコールマン関数の分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  には依存しないことを最後に注意しておきます。

**注意 3.42** ( $p$  進多重  $L$  関数の理論の今後の課題について). 論文 [FKMT17b] の最大の課題は“非特異化”のために補助的に用いられた  $c$  の情報が  $p$  進多重  $L$  関数  $L_p(\mathbf{s}, \omega_p^a; c)$  の中に残ってしまっていることです. 1 変数の場合は“ $c$  に依存する部分を分離する公式”  $(L_\xi)_c, (\text{Li}_\xi)_c$  が存在していたため、割合簡単に“ $c$  の情報に依存する部分”を切り出すことが出来ましたが、多変数の場合は多種多様なコブリッツ測度  $\mu_\xi$  の積測度で複雑な多重積分を実行しているため、“ $c$  (或いは  $\mu_c^r$ ) の影響する部分”を分離することは到底期待出来ません (多重  $L$  関数がオイラー積を持たないこととも関係しているはずです). そこで、[FKMT17b] では「実 / 複素」の世界での特異点解消 [FKMT17a] の戦略を真似て  $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^a; c) = \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} L_p(\mathbf{s}; \omega_p^a; \xi)$  のパラメータ  $c$  を  $\mathbb{Z}_p$  に拡張し (このこと自体は、測

度  $\tilde{\mu}_c$  のアミース変換で得られる冪級数  $g_c(T)$  のパラメータ  $c$  が“ $p$  進補間可能”なことを用いて実現されています; [FKMT17b, Theorem 1.24] を参照してください), その上で“ $L_p^{\text{des}}(\mathbf{s}; \omega_p^a) = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{(c-1)^r} L_p(\mathbf{s}; \omega_p^a; c)$ ”なる極限を取ることを考えようとしています. ところが、一般にこのような極限操作を実行すると  $p$  進測度論の範疇から完全に逸脱してしまいますので、抑々所望の極限が存在するかどうかは明らかではなくなってしまいます [FKMT17b, Problem 1.31]. また、仮にこの極限が (奇跡的にリジッド解析的な関数に) 収束したとしても、“ $L_p^{\text{des}}(\mathbf{s}; \omega_p^a)$ ”は  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  に適当な因子を掛けて特異点解消したもの (或いは  $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$  の適当な線型和を取って極を消したもの) である  $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(\mathbf{s})$  の負の整数点での特殊値を補間したもの、という位置付けになってしまいますので、それがどのような幾何的意味 (或いは 岩澤理論的意味<sup>\*68</sup>) を持つかは未知数と言わざるを得ません.

とは言え、 $p$  進多重  $L$  関数と呼ぶに相応しい対象を構成する道筋を開拓した [FKMT17b] の意義は測り知れません. 今後は [FKMT17b] の手法のさらなる改良 (特にパラメータ  $c$  を取り去る方向への改良) や、或いは別のアプローチからの“より良い”  $p$  進多重  $L$  関数の構成 (または“定義”) などの研究が待たれます. [FKMT17b] という革新的な結果が出て来たことで、 $p$  進多重  $L$  関数の研究は漸く黎明期にさしかかったと言っても過言ではないでしょう. まだまだやるべき課題は山のように残されていると思いますので、我こそはと思われる方には是非とも積極的に  $p$  進多重  $L$  関数の研究に参戦してこの地平を切り開いていっていただきたいと願いつつ、筆をおくことにしたいと思います.

\*68 岩澤理論と言えば“代数的対象”と“解析的对象”の結び付きを探求する分野です. もし“解析的对象”として“ $p$  進多重  $L$  関数”が活躍するような岩澤理論が考えられるとするならば、対応する“代数的対象”は何で

## 付録 A $p$ 進解析に関する補遺

この付録 A は、本稿を読む上で躓きやすい「 $p$  進」世界ならではの現象 (特に「実 / 複素」世界での直観を裏切る現象) について簡単に纏めたものです。本稿を読み進めている中で適宜参照していただければと思います。此処では本稿を読むために必要とされる最小限の事項を紹介するに留め、アフィノイド空間の定義など (リジッド解析幾何学の) 進んだ内容には一切踏み込んでいません。「 $p$  進」世界の解析, 幾何学に興味を持たれた方は [BGR84, Rob00, 加藤 13] などの文献を当たってください。第 A.1 節では, 距離空間の一種である 超距離空間 *ultra metric space* の位相的性質 (特に「円盤が開かつ閉集合であること」や「完全不連結性」など) について纏めています。第 A.2 節では, 本稿で登場する様々な “ $p$  進関数” の概念を, 定義を中心に簡単に纏めました。

### § A.1 超距離空間の位相的特徴

「 $p$  進」世界  $\mathbb{C}_p$  の構成に用いられる  $p$  進付値  $|\cdot|_p$  は,  $\mathbb{C}_p$  に 超距離空間 の構造を与えます。まずは一般に超距離空間の定義を紹介しましょう。

**定義 A.1** (超距離と超距離空間). 集合  $X$  上の関数  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が以下の (M1), (M2), (UM3) を満たすとき,  $d$  を  $X$  上の 超距離 *ultra metric* (または 非アルキメデスの距離 *nonarchimedean metric*) と呼ぶ;

(M1)  $x, y \in X$  に対し  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,

(M2) (対称性)  $\forall x, y \in X$  に対し  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

(UM3) (強三角不等式 *strong triangle inequality*)

$$\forall x, y, z \in X \text{ に対し } d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

集合  $X$  と超距離  $d$  の組  $(X, d)$  を 超距離空間 *ultra metric space* と呼ぶ。

**注意 A.2.** 定義 A.1 の条件 (M1), (M2) と

(M3) (三角不等式 *triangle inequality*)  $\forall x, y, z \in X$  に対し  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  を満たす関数  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が (通常の意味での) 距離関数 *distance function* でした。条件 (UM3) から明らかに (M3) が従いますので, 超距離は距離関数の一種であり, 超距離空間は距離空間の一種となります。したがって, 超距離空間は距離空間の満たす性質は

---

しょうか? 実際, そんな “代数的対象” の候補と目されるものとして, 代数的  $K$  理論や代数的基本群の理論といった分野からのアイデアも反映しつつ “円単数の高次版” と表現すべき対象が幾つか構成されています (スーレ元 *SOULÉ element* [Sou81] やアンダーソン・伊原の高次円単数 *higher cyclotomic element* [AI90, Section 2.6, Definition] など). こういった “高次の” 代数的な元と多重ゼータ値が交錯する “岩澤理論” が展開出来たら—— そんなことを想像するだけでもワクワクしてきませんか?

すべて満たしますが、以下でも観察するように、強三角不等式 (UM3) が我々の (「実 / 複素」の世界  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  で培<sup>つちか</sup>ってきた) 直観を裏切る現象を次々と引き起こすのです (!!)

**例 A.3.**  $X = \mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p$  (またはその中間体) とし,  $d_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を  $d_p(x, y) := |x - y|_p$  によって定義すると,  $(X, d_p)$  は超距離空間となります ( $d_p$  が超距離の公理を満たすことは [Ko77, Chapter 1, Section 2] を参照).

注意 A.2 で見たように, 超距離空間  $(X, d)$  は距離空間ですので, 中心が  $a \in X$  で半径が  $r$  の“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$  や“閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$  が定義され, 『任意の点  $x \in U$  に対して  $x$  を中心とした“開円盤”  $\mathbb{D}_x^-(\varepsilon)$  が  $U$  に含まれるような正の整数  $\varepsilon > 0$  が存在する』を満たす部分集合として  $X$  の開集合  $U$  が定義されます (勿論閉集合は「開集合の補集合」として定義します). この様に, 超距離空間には自然に距離空間としての位相が入りますが, その位相的な性質は, 我々が慣れ親しんできた「実 / 複素」世界の距離空間のイメージをとかけ離れたものとなっています.

**補題 A.4.** 超距離空間  $(X, d)$  に於いて以下が成り立つ;

- (1)  $r > 0$  のとき “閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$  は距離位相に関して閉かつ開集合である;
- (2) “開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$  は距離位相に関して閉かつ開集合である;
- (3) “(閉または開) 円盤”  $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  の点  $b$  に対して  $\mathbb{D}_a^\pm(r) = \mathbb{D}_b^\pm(r)$  が成り立つ (複号同順), 即ち “円盤の点はすべて中心” である;

証明は何れも 強三角不等式の練習問題 程度のものなので, 「 $p$  進」世界に慣れるためにも先ずは自分で証明を付けてみることをお勧めします.

**【証明】** 距離空間の位相の定義および一般論により,  $\mathbb{D}_a^-(r)$  が  $X$  の開集合であり,  $\mathbb{D}_a^+(r)$  が  $X$  の閉集合であることは直ちに従います.

- (1) “閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r)$  の任意の元  $b$  に対し,  $b$  を中心とする “開円盤”  $\mathbb{D}_b^-(r)$  を考えましょう. このとき任意の  $x \in \mathbb{D}_b^-(r)$  に対して

$$d(x, a) \stackrel{\text{(UM3)}}{\leq} \max\{\underbrace{d(x, b)}_{< r}, \underbrace{d(b, a)}_{\leq r}\} \leq r$$

より  $x \in \mathbb{D}_a^+(r)$  が従います. 即ち  $\mathbb{D}_b^-(r) \subset \mathbb{D}_a^+(r)$  より  $\mathbb{D}_a^+(r)$  は開集合となります.

- (2) “開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  の境界の元  $x \in \partial \mathbb{D}_a^-(r)$  を任意に選びましょう. 部分集合の境界の定義から, 特に  $\mathbb{D}_a^-(r)$  と  $x$  を中心とする半径  $r$  の “開円盤”  $\mathbb{D}_x^-(r)$  の共通部分は空集合

ではありません. そこで  $\mathbb{D}_a^-(r) \cap \mathbb{D}_x^-(r)$  の元  $z$  を 1 つ選ぶと

$$d(x, a) \stackrel{\text{(UM3)}}{\leq} \max\{\underbrace{d(x, z)}_{< r}, \underbrace{d(z, a)}_{< r}\} < r$$

より  $x \in \mathbb{D}_a^-(r)$  が従います. 即ち  $\partial \mathbb{D}_a^-(r) \subset \mathbb{D}_a^-(r)$  が成り立っているため, 位相空間の一般論により  $\mathbb{D}_a^-(r)$  は閉集合となります.

- (3) “閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r)$  の場合を示します (“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  の場合も同様です). 点  $b \in \mathbb{D}_a^-(r)$  を中心とする半径  $r$  の閉円盤  $\mathbb{D}_b^+(r)$  の任意の元  $x$  に対して

$$d(x, a) \stackrel{\text{(UM3)}}{\leq} \max\{\underbrace{d(x, b)}_{\leq r}, \underbrace{d(b, a)}_{\leq r}\} \leq r$$

より  $x \in \mathbb{D}_a^+(r)$ , 即ち  $\mathbb{D}_b^+(r) \subseteq \mathbb{D}_a^+(r)$  を得ます. 点  $a$  と点  $b$  を入れ替えて, まったく同じ議論を展開することにより  $\mathbb{D}_a^+(r) \subseteq \mathbb{D}_b^+(r)$  も従います.  $\square$

**注意 A.5.** 通常の距離空間での開円盤, 閉円盤の定義を踏襲していることから, 便宜上  $\mathbb{D}_a^-(r), \mathbb{D}_a^+(r)$  もそれぞれ “開円盤” “閉円盤” と呼んでしまうことが少なくありませんが, 超距離空間では何れも閉かつ開集合であるため, この呼称が位相的な実態をあまり良く反映していないという点には注意が必要です. また補題 A.4 (1), (2) を組み合わせることで, 例えば 円環領域  $A_a[r, R] := \{x \in X \mid r \leq d(x, a) < R\}$  なども閉かつ開集合となることが分かります. このように超距離空間に於いては非常に沢山の部分集合が “閉 closed” かつ “開 open” 集合となるため, 頻繁に登場する “閉かつ開集合” のことを屢々 *clopen set* などと呼称したりもします. この点だけを見ても, 超距離空間が (ユークリッド距離空間に慣れ親しんだ) 我々の直観を大いに裏切る存在であると実感出来るでしょう.

次の命題は, 超距離空間の極めて特徴的かつ “様々な問題を誘発する” 性質を表しています.

**命題 A.6.** 超距離空間  $(X, d)$  は 完全不連結 *totally disconnected* である; 即ち 2 点以上を含む  $X$  の部分集合で連結なものは存在しない.

**【証明】** 超距離空間  $X$  の部分集合  $M$  で, 相異なる 2 点  $x, y$  を含むものを考えましょう ( $M$  には  $X$  の相対位相を入れておきます). このとき (超) 距離の性質 (M1) により  $r := d(x, y) > 0$  は (0 ではない) 正の数となります. そこで  $U := M \cap \mathbb{D}_x^-(\frac{r}{2}), V = M \setminus U$  とおくと, 定義から  $x \in U, y \notin U$  (つまり  $y \in V$ ) であり, かつ補題 A.4 (1) により  $U$  は  $M$  の (相対位相に関する) 閉かつ開集合であるため, 特に  $V := M \setminus U$  も開集合となります. したがって  $M$  は空でない開集合  $U, V$  の非交和  $M = U \sqcup V$  として表されてしまうため, 連結ではありません.  $\square$

**雑談 A.7.** 命題 A.6 は「超距離空間  $X$  の点  $x$  を含む連結成分は 1 点集合  $\{x\}$  である」ことを主張しています。ただ、一般には 1 点集合  $\{x\}$  は開集合とは限りません; 寧ろ (任意の) 1 点集合  $\{x\}$  が開集合となる場合は,  $X$  の位相が 離散位相 *discrete topology* になってしまうため, 位相空間としてはあまり面白くないものとなってしまいます。例 A.3 の位相空間  $(X, d_p)$  は 1 点集合が開集合ではないような超距離空間の典型例を与えています。

## § A.2 $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の関数について

本節では, 本稿第 1.2 節に登場する  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  (或いはその部分集合) 上の様々な関数について解説します。第 A.2.1 節では円盤  $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  上のリジッド解析的関数について簡単に纏めています。第 A.2.2 節では,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  の剰余円盤による非交和としての表示を用いて, 点  $0, 1, \infty$  で対数的極を持つ  $X(\mathbb{C}_p)$  上の局所解析的関数を定義します。第 A.2.3 節では  $X(\mathbb{C}_p)$  上の (より正確には  $X(\mathbb{C}_p)$  の還元  $X_{\overline{\mathbb{F}}_p} = \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  の管  $]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[$  に対する  $\{0, 1, \infty\}$  に沿った) 過収束リジッド解析的関数を, ピエール・ベルテロ *Pierre BERTHELOT* [Ber96] にしたがって定義します。

### § A.2.1 円盤上のリジッド解析的関数

以下では, 超距離空間  $(\mathbb{C}_p, d_p)$  上の円盤  $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  上の“解析的関数”について, 簡単に考察します。  $p$  進付値の値群が  $|\mathbb{C}_p^\times|_p = p^{\mathbb{Q}}$  であったことを思い出しておきましょう。

**定義 A.8.** 点  $a \in \mathbb{C}_p$  を中心とする円盤  $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  を考えよう。

(1)  $r \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p$  に対して  $|\xi|_p = r$  を満たす  $\xi \in \mathbb{C}_p^\times$  を 1 つ選ぶ。このとき,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\} &:= \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{\xi^{-1}(z-a)\}^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid |c_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\} \\ &= \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid |a_n|_p r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\} \end{aligned}$$

とおくと, 任意の  $x \in \mathbb{D}_a^+(r)$  に対して  $f(x)$  は収束する ( $\mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\}$  は  $|\xi|_p = r$  を満たす元  $\xi$  の取り方に依らない)。そこで“閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r)$  上のリジッド解析的関数 *rigid analytic function* を  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(r)) \stackrel{\text{定義}}{=} \mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\}$  の元として定める。

(2)  $r > 0$  に対して

$$\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^-(r)) := \varprojlim_{\substack{(0 <) \rho < r \\ \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p}} \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(\rho))$$

$$= \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid \begin{array}{l} |a_n|_p \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ (\forall \rho < r, \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p) \end{array} \right\}$$

の元を“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  上のリジッド解析的関数と定める。但し、1行目では制限写像  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(\rho')) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(\rho)); f \mapsto f|_{\mathbb{D}_a^+(\rho)}$  ( $\rho < \rho' < 1$  かつ  $\rho, \rho' \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p$ ) に関する射影極限を考えている。

定義 A.8 (1) の収束べき級数環  $\mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\}$  に於いて、 $a=0$  かつ  $\xi=1$  としたもの

$$\mathbb{C}_p\{z\} := \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid |c_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

は特に テイト代数 TATE algebra と呼ばれています\*69。テイト代数は“単位閉円盤”  $\mathbb{D}_0^+(1)$  上のリジッド解析的関数のなす関数環と解釈されるべき対象ですが、位相環\*70として見ても非常に素性の良い環になっています (ネーター性、すべてのイデアルが閉集合であることなど)。

**注意 A.9** (リジッド解析的関数について)。

- (a)  $r \notin p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p$  のときも、定義 A.8 (1) の1行目の流儀で  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(r))$  を定義することが可能ですが、一方でこの場合は“閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r)$  の“縁”  $\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a|_p = r\}$  が空集合となっているため、集合としては  $\mathbb{D}_a^+(r)$  は“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  と一致します。したがって  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(r)) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^-(r))$  が成り立つ筈です。実際、値群  $|\mathbb{C}_p^\times|_p = p^{\mathbb{Q}}$  が  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  で稠密であることを用いて、両者の定義が一致していることが確認出来ます。
- (b) 定義 A.8 (2) の定義は一見分かりにくいですが、“開円盤”が“閉円盤の増大列”  $\mathbb{D}_a^-(r) = \bigcup_{\substack{\rho < r \\ \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p}} \mathbb{D}_a^+(\rho)$  として表されることに着目し、「 $\mathbb{D}_a^-(r)$  に含まれるどの“閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(\rho)$  に制限しても  $\mathbb{D}_a^+(\rho)$  上のリジッド解析的関数になるような関数」として“開円盤”  $\mathbb{D}_a^-(r)$  上のリジッド解析的関数を特徴付けようとしているのです。
- (c) 非常に粗っぽいイメージを述べるのであれば、我々は円盤上の解析的関数を“収束するテイラー展開を持つ関数”として定義しようとしているわけです。定義 A.8 ではまさに“ $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  上で収束するテイラー展開を集めたもの”として  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^\pm(r))$  を構成しており、「実 / 複素」世界での解析的関数の定義と照らし合わせてみても受け入れ易い

\*69 最近ではテイト代数の記号として  $\mathbb{C}_p\langle T \rangle$  や  $\mathbb{C}_p\langle\langle T \rangle\rangle$  を用いることが多いですが ([BGR84] では  $\mathbb{C}_p\langle T \rangle$  が、[加藤 13] では  $\mathbb{C}_p\langle\langle T \rangle\rangle$  が用いられています)、本稿ではこれらの記号は非可換多項式環や非可換べき級数環に用いているため、テイト代数には異なる記号  $\mathbb{C}_p\{z\}$  を用いて区別することにしました。

\*70 テイト代数には通常ガウスノルム  $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right\|_{\text{Gauss}} := \sup_{n \geq 0} |c_n|_p$  で位相を入れますが、最大値の原理 *maximum modulus principle* [BGR84, Section 5.1.4, Proposition 3] によりガウスノルムは上限ノルム  $\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{z \in \mathbb{D}_0^+(1)} |f(z)|_p$  と一致しますので、どちらのノルムで考えても等価となります。

定義であると言えるでしょう。唯、<sup>ただ</sup>「実 / 複素」の世界では“解析的関数”と言え単に“(定義域の) 各点でテイラー展開が可能である関数”のことを指すのが一般的ですが、リジッド解析的関数は“各点でテイラー展開可能な関数”の中でも特別なものであることは意識しておくべきでしょう; 例えば、補題 A.4 の証明からも明らかなように任意の  $(0 <) \rho < r$  に対して“閉円盤”  $\mathbb{D}_a^+(r)$  は非交和  $\mathbb{D}_a^+(r) = \mathbb{D}_a^-(\rho) \sqcup A_a[\rho, r]$  に分割することが可能です (但し  $A_a[\rho, r] := \{z \in \mathbb{C}_p \mid \rho \leq |z - a|_p \leq r\}$ )。したがって、例えば関数  $f(z) := \begin{cases} 0 & (z \in \mathbb{D}_a^+(\rho) \text{ のとき}), \\ 1 & (z \in A_a[\rho, r] \text{ のとき}) \end{cases}$  なども  $\mathbb{D}_a^+(r)$  上の各点で

テイラー展開可能な関数となります。円盤を開集合の非交和に分割する方法は幾らでも考えられますし、各成分上毎に“テイラー展開可能な関数”も (定数関数を含め) 無数に存在しますので、上記のような構成を考えただけでも“ $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  の各点でテイラー展開可能な関数”が <sup>たくさん</sup>あまりにも沢山存在することが観察されます。こんなものをすべて考えてしまうと収拾がつかみませんので、円盤上の“解析的関数”として 円盤全体で収束する冪級数関数 のみを採用する という立場で導入されたのが“リジッド”解析的関数の概念と言えます。尚、<sup>なお</sup>「実 / 複素」世界で“解析的関数”とされていた“(考えている集合の) 各点でテイラー展開可能な関数”は、「 $p$  進」世界では (リジッド解析的関数と区別して) 局所解析的関数 *locally analytic function* と呼ばれています。

**雑談 A.10** (テイト代数の極大スペクトルとしての“閉円盤”とリジッド幾何学). テイト代数  $\mathbb{C}_p\{z\}$  に対してヒルベルトの弱零点定理 HILBERT's *weak Nullstellensatz* の類似が成り立ちます ([BGR84, Section 7.1.1, Proposition 3] 参照); 即ち  $\mathbb{C}_p\{z\}$  の極大イデアルは、すべて  $z - x$  (<sup>ただ</sup>但し  $x \in \mathbb{D}_0^+(1)$ ) の形の 1 次式で生成される単項イデアルとして表されます。したがって、 $\mathbb{C}_p\{z\}$  のすべての極大イデアルを集めた集合を  $\text{Spm } \mathbb{C}_p\{z\}$  と表すことにすると (極大スペクトル *maximum spectral*), (集合としての) 全単射

$$\text{Spm } \mathbb{C}_p\{z\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_0^+(1); \mathfrak{m}_x = (z - x) \mapsto x$$

を得ます (極大スペクトル  $\text{Spm } \mathbb{C}_p\{z\}$  に適切に位相を入れることで同相写像にもなります)。つまり (リジッド解析的な) 関数環から“単位閉円盤”という空間が「復元」出来るわけですが、これは代数幾何学に於いてアファイン空間  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  が  $n$  変数多項式環  $\mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_n]$  のスペクトルとして構成されたこと

$$\text{Spec } \mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n; \mathfrak{m}_x := (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \mapsto x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と酷似しています。代数幾何学 (スキーム論) では、多項式環の商環のスペクトル  $\text{Spec } \mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_n]/I$  (或いは一般の可換環のスペクトル  $\text{Spec } R$ ) である アファイ

ンスキーム *affine scheme* を“空間”の構成要素とし、これらの“貼り合わせる”としてより一般的な“空間”(スキーム)を実現していましたが、リジッド幾何学でも(多変数)テイト代数の商環の極大スペクトル  $X = \text{Spm } \mathbb{C}_p\{z_1, z_2, \dots, z_n\}/I$  (とその上の構造層  $\mathcal{O}_X$  の組)であるアフィノイド<sup>\*71</sup>空間 *affinoid space* の“貼り合わせ”としてリジッド解析空間 *rigid analytic space* が構成されます。このように、テイトのリジッド幾何学はアレキサンデル・グロタンディーク Alexander GROTHENDIECK によるスキーム論の影響を色濃く反映したものとなっています。

ちなみにリジッド幾何学では、これまでも何度も登場してきた「 $p$ 進」位相の引き起こす弊害によって構造層  $\mathcal{O}_X$  が素朴な方法では構成出来ないという問題が生じます(関数の“貼り合わせ”構造を抽象化した概念が層でしたから、関数が容易には“貼り合わない”「 $p$ 進」世界で層を考えるのが難しいのもむべなるかな、といったところでしょうか)。そんなスキーム論では現れなかった問題を解消するために、テイトの  $h$  構造 *h-structure* やらグロタンディーク位相 GROTHENDIECK *topology* やらを用いて“開集合を制限する”必要があります。その辺りも非常に面白い話題なのですが……完全に話題が逸れてしまいますので、これ以上深入りするのは止めましょう。興味を持たれた方は [加藤 13, 第 3,4 章] や [BGR84, Chapter 8,9] をご参照ください。

以下では  $\frac{d}{dz}z = 1$  と正規化された導分に関する冪級数の(形式的な)項別微分を考えます。冪級数  $f(z)$  に対して  $f^{(n)}(z) := \frac{d^n f}{dz^n}(z)$  と表すことにしましょう。次の命題は、円盤上のリジッド解析関数が各点のまわりでテイラー展開可能であること(つまり局所解析的関数であること)を保障するものです。

**命題 A.11** (円盤上のリジッド解析的関数の局所解析性). 円盤  $\mathbb{D}_a^\pm(r)$  上定義されたりジッド解析的関数  $f(z)$  と  $b \in \mathbb{D}_a^\pm(r)$  に対して、冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = f(b) + f'(b)(z-b) + \frac{f''(b)}{2!} (z-b)^2 + \dots$$

は  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^\pm(r))$  の元を定め、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$  が成り立つ(複号は同順とする). 特に  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^\pm(r)) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_b^\pm(r))$  が成り立つ。

<sup>\*71</sup> 接尾辞 *-oid* はギリシア語の  $-\text{οειδής}$  「...の形  $\text{εἶδος}$  をしている」に由来し、「...のような」「...に似ている」という意味になります。つまりアフィノイド空間とは「アフアイン(アフィン)っぽい空間」というニュアンスで付けられた名称です。

【証明】 以下複号は同順とします. 先ず  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-a)^j \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r))$  の  $n$  階導分

$f^{(n)}(z) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j!}{(j-n)!} a_j(z-a)^{j-n}$  も  $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  上のリジッド解析的関数となることが確認出

来ます; 実際  $\rho \leq r, \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^{\times}|_p$  なる実数  $\rho$  に対して  $|a_j|_p \rho^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  が成り立つならば,

$\underbrace{\left| \frac{j!}{(j-n)!} \right|_p}_{\leq 1} |a_j|_p \rho^{j-n} \leq \rho^{-n} \cdot |a_j|_p \rho^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  より  $f^{(n)}(z)$  も  $f(z)$  と同じ収束条件を満たし

ます. したがって  $b \in \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$  に対して  $f^{(n)}(b)$  は収束し,  $\tilde{\rho} := \max\{|b-a|_p, \rho\}$  とおくと

$$\left| \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \right|_p \rho^n \stackrel{\text{(UM3)}}{\leq} \rho^n \sup_{j \geq n} \left\{ \underbrace{\left| \binom{j}{n} \right|_p}_{\leq 1} |a_j(b-a)^{j-n}|_p \right\} \leq \tilde{\rho}^n \sup_{j \geq n} \{ |a_j|_p \tilde{\rho}^{j-n} \} = \sup_{j \geq n} \{ |a_j|_p \tilde{\rho}^j \}$$

が成り立ちます. この不等式の右辺は  $n \rightarrow \infty$  とすると  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p \tilde{\rho}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p \tilde{\rho}^n = 0$

となるので, 結局  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$  が  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$  の元となることが分かります. 形式的冪

級数として等式  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$  が成り立つので,  $f$  も  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$  の元となるこ

とが従います. 最後に  $a$  と  $b$  の役割を入れ替えて議論することで,  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$  の任意の元が  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r))$  の元となることも証明出来るので,  $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r)) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$  が成り立ちます.  $\square$

### § A.2.2 $X(\mathbb{C}_p)$ 上の (対数的極を持つ) 局所定数関数

本小節では  $p$  進対数写像の分枝  $a \in \mathbb{C}_p$  を固定しておきます (つまり  $p$  進対数関数  $\text{Log}_p^{(a)}: \mathbb{C}_p^{\times} \rightarrow \mathbb{C}_p^{\times}$  として  $\text{Log}_p^{(a)}(p) = a$  を満たす局所解析的関数を考えます). さて, (リジッド解析的) 射影曲線  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$  に対して 還元写像 *reduction map* (または 特殊化写像 *specialisation map*)

$$\text{red}: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p); x \mapsto \begin{cases} x \pmod{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}} = \mathbb{D}_0^-(1) & (x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \mathbb{D}_0^+(1) \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考えましょう (但し  $\overline{\mathbb{F}}_p$  は  $p$  元体  $\mathbb{F}_p$  の代数的閉包とします). 任意の  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p) = \overline{\mathbb{F}}_p \cup \{\infty\}$  の元  $\bar{x}$  の還元写像に関する逆像  $\text{red}^{-1}(\{\bar{x}\})$  が,  $a$  の  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  への任意の持ち上げ  $\tilde{x}$  を中心とする半径 1 の “開円盤”  $\mathbb{D}_{\tilde{x}}^-(1)$  となることは, 還元写像の定義から簡単に確認出来ます. この “開円盤” を  $\bar{x}$  に関する 剰余円盤 *residual disk* と呼び  $]\bar{x}[ := \text{res}^{-1}(\{\bar{x}\})$  と表します. すると  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  は剰余円盤の非交和として表されることが簡単に確認出来ます;  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \bigsqcup_{\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)} ]\bar{x}[$ .

この構造を用いて, 任意の  $a \in \mathbb{C}_p$  に対して  $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  上の (分枝  $a$  の対数的極を持つ) 局所解析的関数の環  $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  を, 各剰余類  $\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$  に対して定ま

る関数環  $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$  の直積  $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) = \prod_{\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)} \mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$  として定めます. 各  $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$

は以下のように定義されます; 実数  $0 < r < 1$  に対し, 点  $x_0 \in \{0, 1, \infty\}$  を中心とする円環

$$A_{x_0}(r, 1) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}_p \mid r < |z - x_0|_p < 1\} & (x_0 \in \{0, 1\} \text{ のとき}) \\ \{z \in \mathbb{C}_p \mid 1 < |z|_p < r^{-1}\} & (x_0 = \infty \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{上のリジッド解析的関数}$$

$\mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1))$  は

$$\mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1)) = \begin{cases} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - x_0)^n \mid \begin{array}{l} |a_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ |a_n|_p r^n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right\} & (x_0 \in \{0, 1\} \text{ のとき}) \\ \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \mid \begin{array}{l} |a_n|_p r^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ |a_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right\} & (x_0 = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表されますので, これを用いて  $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$  を

$$\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x) := \begin{cases} \mathcal{A}([\bar{x}]) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_x^-(1)) & (\bar{x} \neq 0, 1, \infty \text{ のとき}), \\ \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1)) \left[ \text{Log}_p^{(a)}(z - x_0) \right] & (\bar{x} = x_0 \in \{0, 1\} \text{ のとき}), \\ \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{A}(A_{\infty}(r, 1)) \left[ \text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right) \right] & (\bar{x} = \infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

と定めます. <sup>ただ</sup> 但し帰納極限は制限写像  $\mathcal{A}(A_{x_0}(r', 1)) \rightarrow \mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1)); f \mapsto f|_{A_{x_0}(r, 1)}$  ( $r < r'$ ) に関して取っています. 点  $\bar{x} = 0, 1, \infty$  に於ける局所関数環  $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$  は, 剰余円盤  $]\bar{x}[$  上の過収束関数 (次小節 A.2.3 も参照) に, 点  $x_0 = 0, 1, \infty$  で発散する対数関数  $\text{Log}_p^{(a)}(z - x_0)$  (または  $\text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right)$ ) を“発散項”として添加して得られる環です. 第 1.2.3 節で導入したコー

ルマン関数のなす環  $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  は, <sup>おおざっぱ</sup> 大雑把には “ $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  の元の反復コールマン積分によって得られるもの” のなす  $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$  の部分環として定義されます.

なお, 局所解析的な微分 1 形式の加群  $\Omega_{\log}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) = \prod_{\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)} \Omega_{\log}^{(a)}(U_x)$  もまったく同様に

して定義されます (各剰余類では  $\Omega_{\log}^{(a)}(U_x) = \mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x) dz$  と定めます).

### § A.2.3 $X(\mathbb{C}_p)$ 上の過収束関数

本小節では  $X(\mathbb{C}_p)$  上の過収束関数 *overconvergent function* のなす環  $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  を定義します.  $p$  元体の代数的閉包  $\overline{\mathbb{F}}_p$  上定義された射影直線から  $0, 1, \infty$  の 3 点を取り除いた空間  $X_{\overline{\mathbb{F}}_p} := \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$  の還元写像による逆像を  $]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[ := \text{red}^{-1}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \subset X(\mathbb{C}_p)$  と書き,  $X_{\overline{\mathbb{F}}_p}$  の  $X(\mathbb{C}_p)$  に於ける <sup>お</sup> 管 *tube* と呼びます. 集合としては,  $]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[$  は  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  から  $0, 1, \infty$  に於ける剰余円盤を取り除いた空間

$$]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[ = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\mathbb{D}_0^-(1) \cup \mathbb{D}_1^-(1) \cup \mathbb{D}_\infty^-(1)) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p = 1, |z - 1|_p = 1\}$$

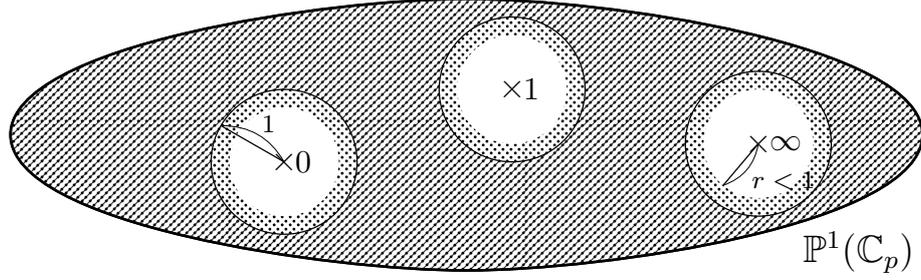


図4 過収束関数の収束域:  $0, 1, \infty$  の剰余円盤の内側まで収束域が入り込んでいる

と一致し, アフィノイド代数

$$\mathbb{C}_p \left\{ z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1} \right\} := \left\{ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=-\infty}^0 b_m (z-1)^m \left| \begin{array}{l} |a_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \\ |b_m|_p \xrightarrow{m \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right. \right\}$$

の極大スペクトルとして表されるアフィノイド空間となります. 実数  $0 < r < 1$  に対して

$$U_r := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\mathbb{D}_0^+(r) \cup \mathbb{D}_1^+(r) \cup \mathbb{D}_\infty^+(r)) = \{z \in \mathbb{D}_0^-(r^{-1}) \mid |z|_p \geq r, |z-1|_p \geq r\}$$

によって  $X(\mathbb{C}_p)$  の部分集合  $U_r$  を定めると,  $\{U_r\}_{0 < r < 1}$  は  $]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[$  の基本厳近傍系 *fundamental system of strict neighborhood* [Ber96, Définition (1.2.1)] を形成しており, 各  $U_r$  上のリジッド解析的関数環は

$$\mathcal{A}(U_r) = \left\{ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=-\infty}^0 b_m (z-1)^m \left| \begin{array}{l} |a_n|_p \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \\ |b_m|_p \rho^m \xrightarrow{m \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right. (0 < \forall \rho < r) \right\}$$

で表されます. そこで,  $X(\mathbb{C}_p)$  上の  $(\{0, 1, \infty\}$  に沿った) 過収束関数 *overconvergent function* を, 環

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p)) &:= \Gamma(]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[ , j^\dagger \mathcal{O}_{]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[}) := \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{A}(U_r) \\ &= \left\{ f(z) \in \mathbb{C}_p \left[ \left[ z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1} \right] \right] \mid \text{或る } 0 < r < 1 \text{ が存在して } f(z) \in \mathcal{A}(U_r) \right\} \end{aligned}$$

によって定めます ( $j^\dagger$  は  $j: ]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[ \hookrightarrow X(\mathbb{C}_p)$  に対して定まるベルテロの過収束切断関手 *overconvergent section functor* [Ber96, (2.1.1.1)] です). 関数環  $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  の元は, 取り除かれた点  $0, 1, \infty$  の剰余円盤の“少し内側”まで収束域が入り込んでいるような関数であるため (図4を参照), 「 $]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[$  上のリジッド解析的関数でより広い範囲で収束するもの」というニュアンスで“過収束”の名が付けられています.

( $\{0, 1, \infty\}$  に沿って) 過収束な微分1形式の加群  $\Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$  もまったく同様に

$$\begin{aligned} \Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p)) &:= \Gamma(]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[ , j^\dagger \Omega_{]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[}^1) := \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} \Omega(U_r) \\ &= \left\{ f(z) dz \in \mathbb{C}_p \left[ \left[ z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1} \right] \right] dz \mid \text{或る } 0 < r < 1 \text{ が存在して } f(z) \in \mathcal{A}(U_r) \right\} \end{aligned}$$

によって定めます.

## 参考文献

- [赤木 17] 赤木和真. The integrality of  $p$ -adic multiple zeta values: joint work with M. Hirose, S. Yasuda (日本語). 数理解析研究所講究録『多重ゼータ値の諸相』, **2015**, 53–64, 2017.
- [荒川金子 10] 荒川恒男, 金子昌信. 多重ゼータ値入門 (MI レクチャーノート), 第 23 卷. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2010.
- [大下 SS14] 大下達也. 非可換岩澤主予想の証明 —解析的な部分について—. 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』報告集, 第 I 巻, 401–482, 2014.
- [落合 14] 落合理. 岩澤理論とその展望 (上) (岩波数学叢書). 岩波書店, 2014.
- [小野塚 SS18] 小野塚友一. 多重ゼータ関数の解析接続と負の整数点での極限值. 本報告集, 2018.
- [小野 SS18] 小野雅隆. 「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ. 本報告集, 2018.
- [金子 SS18] 金子昌信. 多重ゼータ値導入 —定義から正規化まで—. 本報告集, 2018.
- [加藤 13] 加藤文元. リジッド幾何学入門 (岩波数学叢書). 岩波書店, 2013.
- [加藤中井 16] 加藤文元, 中井保行. 天に向かって続く数. 日本評論社, 2016.
- [川崎 SS18] 川崎菜穂. Yamamoto 積分表示と積分級数等式. 本報告集, 2018.
- [栗原 18] 栗原将人.  $p$  進ゼータの世界へ. 数学セミナー, **675 (51–1)**, 8–13, 2018.
- [河野 09] 河野俊丈. 反復積分の幾何学 (シュプリングァー現代数学シリーズ). 丸善出版, 2009.
- [小見山 SS18] 小見山尚. 特異点解消法と繰り込み法. 本報告集, 2018.
- [関 SS18] 関真一郎. 「 $\mathcal{F}$ -有限多重ゼータ値」から「 $\widehat{\mathcal{F}}$ -有限多重ゼータ値」へ: ただし,  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$  or  $\mathcal{S}$ . 本報告集, 2018.
- [田中 07] 田中立志.  $p$  進多重ゼータ値の双対性について. 数理解析研究所講究録『多重ゼータ値の研究』, **1549**, 169–176, 2007.
- [長岡 SS05] 長岡昇勇. Serre’s  $p$ -adic modular forms (日本語). 第 13 回整数論サマースクール『Hilbert 保型形式』報告集, 2005.
- [坂内 02] 坂内健一.  $p$ -進ポリログと  $p$ -進  $L$ -関数. 数理解析研究所講究録『「整数論のこの主題、自分はこう考える」若手発表会』, **1256**, 97–130, 2002.
- [萩原 SS18] 萩原啓. 「多重ゼータ値」から「モチヴィック多重ゼータ値」へ. 本報告集, 2018.
- [原田 SS18] 原田遼太郎. KZ 方程式と KZ 結合子. 本報告集, 2018.
- [原 18] 原隆.  $p$  進数体をめぐる冒険:  $p$  進距離が紡ぎ出す甘美なる世界. 数学セミナー, **684 (57–10)**, 31–37, 2018.
- [古庄 03] 古庄英和. Introduction to  $p$ -adic multiple zeta values (日本語). 数理解析研究所講究録『代数的整数論とその周辺』, **1324**, 33–46, 2003.

- [古庄 16] 古庄英和著 (小谷久寿, 新甫洋史記述). 結び目と Grothendieck–Teichmüller 群 (MI レクチャーノート), 第 68 巻. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2016.
- [森田 81] 森田康夫.  $P$  進  $L$  関数入門 (I): Kummer の合同式と Kubota–Leopoldt の仕事. 数理解析研究所講究録『 $P$  進  $L$  関数と代数体の整数論』, **411**, 2–9, 1981.
- [安田 SS18a] 安田正大. An algorithm for computing  $p$ -adic multiple zeta values, 2018. [http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/ss2018/20140104\\_pMZV\\_ver11-5e\\_for\\_ss2018.pdf](http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/ss2018/20140104_pMZV_ver11-5e_for_ss2018.pdf).
- [安田 SS18b] 安田正大. 「 $p$  進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ. 本報告集, 2018.
- [山本 SS18] 山本修司. 多重ゼータ値と  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  の基本群. 本報告集, 2018.
- [AF72] Yvette AMICE and Jean FRESNEL. *Fonctions zêta  $p$ -adiques des corps de nombres abéliens réels*. Acta Arith., **20**, 353–384, 1972.
- [Ahl78] Lars Valerian AHLFORS. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [AHY] Kazuma AKAGI (赤木 和真), Minoru HIROSE (広瀬 稔), and Seidai YASUDA (安田 正大). *Integrality of  $p$ -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*. preprint, in preparation.
- [AI90] Greg W. ANDERSON, Yasutaka IHARA (伊原康隆). *Pro- $l$  branched coverings of  $\mathbf{P}^1$  and higher circular  $l$ -units. II*. Internat. J. Math., **1**, no. 2, 119–148, 1990.
- [BBK10] Jennifer S. BALAKRISHNAN, Robert W. BRADSHAW, and Kiran S. KEDLAYA. Explicit Coleman integration for hyperelliptic curves. In *Algorithmic number theory*, Vol. 6197 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 16–31. Springer, Berlin, 2010.
- [BdJ03] Amnon BESSER and Rob DE JEU. *The syntomic regulator for the  $K$ -theory of fields*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **36**, no. 6, 867–924 (2004), 2003.
- [Ber96] Pierre BERTHELOT. *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie*. Prépublication of Institute de Reserche Mathématique de Rennes, **96–3**, 91 pages, 1996.
- [Bes00] Amnon BESSER. Syntomic regulators and  $p$ -adic integration. II.  $K_2$  of curves. In *Proceedings of the Conference on  $p$ -adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998)*, Vol. 120, 335–359, 2000.
- [Bes02] Amnon BESSER. *Coleman integration using the Tannakian formalism*. Math. Ann., **322**, no. 1, 19–48, 2002.
- [BF06] Amnon BESSER, and Hidekazu FURUSHO (古庄英和). The double shuffle relations for  $p$ -adic multiple zeta values. In *Primes and knots*, 第 416 巻 of *Contemp. Math.*, 9–29. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

- [BGR84] Siegfried BOSCH, Ulrich GÜNTZER, and Reinhold REMMERT. *Non-Archimedean analysis*, Vol. 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [Car35] Leonard CARLITZ. *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*. *Duke Math. J.*, **1**, no. 2, 137–168, 1935.
- [CdS88] Robert F. COLEMAN and Ehud DE SHALIT.  *$p$ -adic regulators on curves and special values of  $p$ -adic  $L$ -functions*. *Invent. Math.*, **93**, no. 2, 239–266, 1988.
- [Cha14] Chieh-Yu CHANG (張介玉). *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*. *Compos. Math.*, **150**, no. 11, 1789–1808, 2014.
- [ChaM17] Chieh-Yu CHANG, and Yoshinori MISHIBA (三柴善範). *Logarithmic Interpretation of Multiple Zeta Values in Positive Characteristic*. ArXiv e-prints, 2017.
- [Chat17] Andre CHATZISTAMATIOU. *On integrality of  $p$ -adic iterated integrals*. *J. Algebra*, **474**, 240–270, 2017.
- [Che77] Kuo Tsai CHEN (陳國才). *Iterated path integrals*. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**, no. 5, 831–879, 1977.
- [Col82] Robert F. COLEMAN. *Dilogarithms, regulators and  $p$ -adic  $L$ -functions*. *Invent. Math.*, **69**, no. 2, 171–208, 1982.
- [Con78] John B. CONWAY. *Functions of one complex variable*, Vol. 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.
- [De89] Pierre R. DELIGNE. *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*. In *Galois groups over  $\mathbf{Q}$  (Berkeley, CA, 1987)*, Vol. 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 79–297. Springer, New York, 1989.
- [De02] Pierre R. DELIGNE. *Periods for the fundamental group*. a short note on Arizona Winter School, 2002.
- [DR80] Pierre R. DELIGNE and Kenneth Alan RIBET. *Values of abelian  $L$ -functions at negative integers over totally real fields*. *Invent. Math.*, **59**, no. 3, 227–286, 1980.
- [FJ07] Hidekazu FURUSHO and Amir JAFARI. *Regularization and generalized double shuffle relations for  $p$ -adic multiple zeta values*. *Compos. Math.*, **143**, no. 5, 1089–1107, 2007.
- [FKMT17a] Hidekazu FURUSHO, Yasushi KOMORI (小森 靖), Kohji MATSUMOTO (松本 耕二), and Hirofumi TSUMURA (津村博文). *Desingularization of complex multiple zeta-functions*. *Amer. J. Math.*, **139**, no. 1, 147–173, 2017.
- [FKMT17b] Hidekazu FURUSHO, Yasushi KOMORI, Kohji MATSUMOTO, and Hirofumi TSUMURA. *Fundamentals of  $p$ -adic multiple  $L$ -functions and evaluation of their spe-*

- cial values*. *Selecta Math. (N.S.)*, **23**, no. 1, 39–100, 2017.
- [Fur04] Hidekazu FURUSHO. *p-adic multiple zeta values. I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*. *Invent. Math.*, **155**, no. 2, 253–286, 2004.
- [Fur07] Hidekazu FURUSHO. *p-adic multiple zeta values. II. Tannakian interpretations*. *Amer. J. Math.*, **129**, no. 4, 1105–1144, 2007.
- [Fur11] Hidekazu FURUSHO. *Double shuffle relation for associators*. *Ann. of Math. (2)*, **174**, no. 1, 341–360, 2011.
- [GF] José Ignacio Burgos GIL and Javier FRESÁN. *Multiple zeta values: from numbers to motives*. to appear.
- [Iwa72] Kenkichi IWASAWA (岩澤健吉). *Lectures on p-adic L-functions*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972. *Annals of Mathematics Studies*, No. 74.
- [Jar15] David JAROSSAY. *Indirect computation of p-adic cyclotomic multiple zeta values*. ArXiv e-prints, 2015.
- [KL64] Tomio KUBOTA (久保田 富雄), and Heinrich-Wolfgang LEOPOLDT. *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen*. *J. Reine Angew. Math.*, **214/215**, 328–339, 1964.
- [KNQ96] Manfred KOLSTER, Thống NGUYỄN-QUANG-ĐỖ, and Vincent Fleckinger. *Twisted S-units, p-adic class number formulas, and the Lichtenbaum conjectures*. *Duke Math. J.*, **84**, no. 3, 679–717, 1996.
- [KNQ98] Manfred KOLSTER and Thống NGUYỄN-QUANG-ĐỖ. *Syntomic regulators and special values of p-adic L-functions*. *Invent. Math.*, **133**, no. 2, 417–447, 1998.
- [Ko77] Neal KOBLITZ. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 58.
- [Ko79] Neal KOBLITZ. *A new proof of certain formulas for p-adic L-functions*. *Duke Math. J.*, **46**, no. 2, 455–468, 1979.
- [Ko80] Neal KOBLITZ. *p-adic analysis: a short course on recent work*, Vol. 46 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
- [Kra74] Marc KRASNER. *Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes*. *Bull. Soc. Math. France Mém.*, **39–40**, 131–254, 1974.
- [Leo75] Heinrich Wolfgang LEOPOLDT. *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. II Die p-adische  $\Gamma$ -Transformation*. *J. Reine Angew. Math.*, **274/275**, 224–239, 1975. Col-

- lection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, III.
- [Mor78] Yasuo MORITA (森田康夫). Krasner’s analytic functions and rigid analytic spaces. In *Proceedings of the Conference on  $p$ -adic Analysis (Nijmegen, 1978)*, 第 7806 卷 of *Report*, 134–142. Katholieke Univ., Nijmegen, 1978.
- [MSw74] Barry MAZUR and Peter SWINNERTON-DYER. *Arithmetic of Weil curves*. *Invent. Math.*, **25**, 1–61, 1974.
- [MW84] Barry MAZUR and Andrew WILES. *Class fields of abelian extensions of  $\mathbf{Q}$* . *Invent. Math.*, **76**, no. 2, 179–330, 1984.
- [NSW08] Jürgen NEUKIRCH, Alexander SCHMIDT, and Kay WINGBERG. *Cohomology of number fields*, Vol. 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.
- [Rob00] Alain M. ROBERT. *A course in  $p$ -adic analysis*, Vol. 198 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Sch79] Peter SCHNEIDER. *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*. *Math. Z.*, **168**, no. 2, 181–205, 1979.
- [Ser73] Jean-Pierre SERRE. *Formes modulaires et fonctions zêta  $p$ -adiques*. In *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972)*, Vol. 350 of *Lecture Notes in Math.*, 191–268. Springer, Berlin, 1973.
- [Sou81] Christophe SOULÉ. *On higher  $p$ -adic regulators*. In *Algebraic  $K$ -theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980)*, Vol. 854 of *Lecture Notes in Math.*, 372–401. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [Ta04] Tatsushi TANAKA (田中 立志). *A few applications of shuffle products for  $p$ -adic multiple zeta values*. Master’s thesis, Kyushu University, 2004.
- [Tha04] Dinesh S. THAKUR. *Function field arithmetic*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [Ünv13] Sinan ÜNVER. *Drinfel’d–Ihara relations for  $p$ -adic multi-zeta values*. *J. Number Theory*, **133**, no. 5, 1435–1483, 2013.
- [Was97] Lawrence C. WASHINGTON. *Introduction to cyclotomic fields*, Vol. 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [Wil90] Andrew WILES. *The Iwasawa conjecture for totally real fields*. *Ann. of Math. (2)*, **131**, no. 3, 493–540, 1990.
- [Ya10] Go YAMASHITA (山下 剛). *Bounds for the dimensions of  $p$ -adic multiple  $L$ -value spaces*. *Doc. Math.*, no. Extra vol.: Andrei A. Suslin sixtieth birthday, 687–723, 2010.

[Zha16] Jianqiang ZHAO (赵健强). *Multiple zeta functions, multiple polylogarithms and their special values*, 第12卷 of *Series on Number Theory and its Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

# 「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ

小野 雅隆（九州大学多重ゼータ研究センター）\*

## 目次

<b>1</b>	<b>有限多重ゼータ値</b>	<b>2</b>
1.1	定義	2
1.2	次元予想	3
1.3	有限多重ゼータ値の具体的な値と関係式	5
1.3.1	具体的な値	5
1.3.2	線型関係式	7
<b>2</b>	<b>対称多重ゼータ値</b>	<b>14</b>
2.1	Kontsevich が Zagier に宛てた手紙	14
2.2	定義に関する補足	16
2.2.1	正規化多項式を用いた場合とそのシャッフル類似	16
2.2.2	$\zeta_S^*(\mathbf{k})$ と $\zeta_S^{\text{sc}}(\mathbf{k})$ のズレ	17
2.2.3	新たな順序 $\prec$ とその言い換え	18
2.2.4	対称多重ゼータ値の“級数表示”	19
2.3	対称多重ゼータ値の具体的な値と関係式	20
2.3.1	具体的な値	20
2.3.2	線型関係式	21
<b>3</b>	<b>課題</b>	<b>22</b>

## はじめに

本稿は第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」における講演「『多重ゼータ値』から『有限多重ゼータ値』へ」の講演者による報告記事である。近年 Zagier によって「有限多重ゼータ値」と呼ばれる対象が定義されたが、有限多重ゼータ値の織りなす世界が通常多重ゼータ値の世界に負けず劣らず豊かな世界であることが Kaneko と Zagier によって予想され

---

\*講演時の所属：慶應義塾大学

ている。この予想によると通常の多重ゼータ値の世界における有限多重ゼータ値の対応物は「対称多重ゼータ値」と呼ばれる対象である。対称多重ゼータ値は通常の多重ゼータ値の情報のみを用いて定義される。全く違う世界の2つの対象を関係付ける Kaneko–Zagier 予想は非常に興味深く、多くの数学者の注目を集めている。

本稿の目的は、第一に有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値を定義し、Kaneko–Zagier 予想を定式化することである。第二に、有限・対称多重ゼータ値の知られている関係式を、講演では紹介できなかったものも合わせて紹介することである。これらの関係式は Kaneko–Zagier 予想を支持する状況証拠とみなせるものである。証明はそれぞれの文献を参照してほしい。ここで紹介する関係式のうち有限・対称特有の関係式とみなせるものもあるが、多くは多重ゼータ値の間で成立する線型関係式の有限・対称類似とみなせるものである。そのため多重ゼータ値間の対応する線型関係式に関する文献もわかる形で紹介している。第三に、考えられる課題を提示することである。有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値は比較的新しく定義された対象である。それゆえ近年めざましく発展しているものの、まだまだ多くの課題が考えられる。この節では筆者の思いつくままに考えられる課題を掲載した。すぐに取り組めると思われる課題もあるので、興味のある方は是非取り組んでいただきたい。

有限多重ゼータ値の織りなす不思議で魅力的な世界の一端を感じていただければ幸いである。

## 1 有限多重ゼータ値

### 1.1 定義

$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  をインデックスとする。素数  $p$  に対し

$$\zeta_{<p}(\mathbf{k}) = \zeta_{<p}(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r < p} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \in \mathbb{Z}_{(p)},$$

$$\zeta_{<p}^*(\mathbf{k}) = \zeta_{<p}^*(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 \leq \dots \leq m_r < p} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

とおく。空インデックス  $\emptyset$  に対しては  $\zeta_{<p}(\emptyset) = \zeta_{<p}^*(\emptyset) := 1$  とおく。Hoffman [18] と Zhao [67] は独立に  $\zeta_{<p}^\bullet(\mathbf{k}) \pmod p$  ( $\bullet \in \{\emptyset, *\}$ ) を考察し、具体的な値の決定や、これらの間の関係式について先駆的な研究を行い、現在では多くの数学者による研究が知られている。

Zagier は 2011 年ごろ、 $\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \pmod p$  を素数  $p$  ごとに考えるのではなく全ての素数について同時に考える新たな枠組みを考案した。それは  $\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \pmod p$  を次の環  $\mathcal{A}$  の中で考えようというものである。

定義 1.1.1.

$$\mathcal{A} := \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

とおく。

**注意 1.1.2.** 1.  $\mathcal{A}$  の元を  $(a_p)_p (a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  と表す.  $\mathcal{A}$  において,  $(a_p)_p = (b_p)_p$  であることと有限個を除く全ての素数  $p$  について  $a_p = b_p$  であることが同値である.

2.  $\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = (\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\text{tors}}$  であるので,  $\mathcal{A} = (\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  が成り立つ. これより  $\mathcal{A}$  は  $\mathbb{Q}$  代数となる.  $\mathcal{A}$  が  $\mathbb{Q}$  代数であることは, 単射  $\mathbb{Q} \ni r \mapsto (r_p)_p \in \mathcal{A}$  が存在することからもわかる. ただし素数  $p$  に対し

$$r_p := \begin{cases} r \bmod p & (r \text{ の分母}, p) = 1 \text{ のとき,} \\ 0 & (r \text{ の分母}, p) \neq 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

**定義 1.1.3.** インデックス  $\mathbf{k}$  と  $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$  に対し,  $\mathcal{A}$  の元  $\zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathbf{k})$  を

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathbf{k}) := (\zeta_{<p}^{\bullet}(\mathbf{k}) \bmod p)_p \in \mathcal{A}$$

と定義し,  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$  を有限多重ゼータ値,  $\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k})$  を有限多重ゼータスター値と呼ぶ.

**注意 1.1.4.** 有限多重ゼータ値と有限多重ゼータスター値は, 通常 of 多重ゼータ値の場合と同様に, お互いがお互いの有限和で書き下すことができる. 具体的には

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}'), \quad \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{k}'} (-1)^{\sigma(\mathbf{k}')} \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k})$$

が成り立つ. ただし  $\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}$  とは, インデックス  $\mathbf{k}'$  が  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に現れる ‘,’ のいくつかを ‘+’ に置き換えて得られることを意味する. 例えば

$$(5) \preceq (2, 3) \preceq (1, 1, 3) \preceq (1, 1, 2, 1) \preceq (1, 1, 1, 1, 1)$$

である. また  $\sigma(\mathbf{k}')$  は  $\mathbf{k}$  から  $\mathbf{k}'$  を作る際に置き換えた ‘+’ の数である. 例えば

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1, k_2, k_3) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2, k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_1 + k_2, k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2 + k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_1 + k_2 + k_3),$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2, k_3) = \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1, k_2, k_3) - \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1 + k_2, k_3) - \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1, k_2 + k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1 + k_2 + k_3)$$

である.

## 1.2 次元予想

多重ゼータ値の場合と同様に, 非負整数  $k$  に対し重さが  $k$  である有限多重ゼータ値全体が生成する  $\mathcal{A}$  の  $\mathbb{Q}$ -部分空間を  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$  とおく.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \langle \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \text{ はインデックス, } \text{wt}(\mathbf{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{A}$$

( $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbb{Q}$  である.) また

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subset \mathcal{A}$$

とおく.  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$  は次の調和関係式によって  $\mathcal{A}$  の部分  $\mathbb{Q}$  代数になる.

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l})$$

ただし  $\mathbf{k}, \mathbf{l}$  はインデックスで,  $\mathbf{k} * \mathbf{l}$  は  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{l}$  の調和積である (金子氏の報告記事 [28, 命題 2.4] の証明の直後を参照). これは  $\zeta_{<p}(\mathbf{k})$  が調和関係式を満たすことから従う.

次の予想は多重ゼータ値の次元予想の  $\mathcal{A}$ -類似である.

**予想 1.2.1** (Zagier). 全ての非負整数  $k$  に対し,  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d_k - d_{k-2} = d_{k-3}$  が成り立つ. ただし  $\{d_k\}_{k \geq -3}$  は

$$\begin{cases} d_{-3} := 1, d_{-2} := 0, d_{-1} := 0, \\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \ (k \geq 0) \end{cases}$$

で定まる数列である.

**注意 1.2.2.** 上の数列  $\{d_k\}_{k \geq -3}$  は通常の多重ゼータ値の次元予想に現れる数列を  $k$  が  $-3$  まですで拡張したものである. 実際初期値と漸化式から  $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1$  が得られる.

各  $k$  について  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$  と  $\mathcal{Z}_k$  の予想次元を表にまとめると以下の通り.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の予想次元	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7
$\mathcal{Z}_k$ の予想次元	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16

この予想については次の結果が知られている. これは多重ゼータ値における Terasoma [60] や Deligne–Goncharov [8] の結果の  $\mathcal{A}$ -類似に当たる.

**定理 1.2.3** (Akagi–Hirose–Yasuda[1]+Jarossay[21]). 全ての非負整数  $k$  に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \leq d_{k-3}$$

が成り立つ.

**注意 1.2.4.** 逆向きの不等式が示されれば予想は示されたことになるが, これは有限多重ゼータ値たちの  $\mathbb{Q}$  上の代数的独立性などの  $\mathcal{A}$  における超越数論的な困難があり, 非常に難しい問題であると思われる.

この定理により, 有限多重ゼータ値の間にも多くの  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式が存在することがわかる. 証明については安田氏の報告記事 [65] を参照.

**注意 1.2.5.** 通常の多重ゼータ値の場合と異なり,  $k_1, \dots, k_r$  が非正整数でも  $\zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}$  を同様に定義することができる. しかしインデックスの成分が負である場合は, Faulhaber の公

式 (いわゆるべき和の公式) を用いて全て正の整数を成分にもつインデックスの有限多重ゼータ値の有限和で書き直すことができる. 例えば

$$\zeta_{\mathcal{A}}(-1, 3, 2) = \frac{1}{2}\zeta_{\mathcal{A}}(1, 2) - \frac{1}{2}\zeta_{\mathcal{A}}(2, 2)$$

が成り立つ. この例からもわかるように, インデックスの成分が非正である場合は, 重さの異なる有限多重ゼータ値の間にも  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式が存在しうる. インデックスが非正整数である場合の有限多重ゼータ値の研究は, 例えば [32] や [63] がある. 本稿では成分が非正整数を含む場合の有限多重ゼータ値はこれ以上扱わず, 成分が全て正整数の有限多重ゼータ値のみを扱うこととする.

### 1.3 有限多重ゼータ値の具体的な値と関係式

この小節では知られている有限多重ゼータ値の具体的な値と  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式をいくつか紹介する.

#### 1.3.1 具体的な値

まず有限多重ゼータ値が具体的に表示される場合を紹介しよう. はじめに深さが 1 の場合である. この場合は常に 0 になる.

**定理 1.3.1** ([18, THEOREM 4.3], [67, Lemma 2.2]). 正整数  $k$  に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k) = 0$$

が成り立つ.

これは  $p-1 \nmid k$  の時  $\zeta_{<p}(k) \equiv 0 \pmod{p}$  であることからわかる ( $p-1 \mid k$  となる  $p$  は有限個しかないことに注意する). 次に深さが 2 の場合であるが, この場合は Seki-Bernoulli 数で書けることが知られている.

**定理 1.3.2** ([18, THEOREM 6.1], [67, Theorem 1.7]). 正整数  $k_1, k_2$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2) = (-1)^{k_2} \binom{k_1 + k_2}{k_1} Z(k_1 + k_2)$$

が成り立つ. ただし, 正整数  $k$  に対し

$$Z(k) := \left( \frac{B_{p-k}}{k} \pmod{p} \right)_p \in \mathcal{A}$$

であり,  $B_n$  は  $n$  番目の Seki-Bernoulli 数で,

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

で定義される有理数である.

これは Faulhaber の公式 (べき和の公式) を用いるとすぐに示すことができる。

深さが3の場合もインデックスの重さが奇数の場合は、深さが2の場合のように Seki-Bernoulli 数を用いて具体的に記述することができる ([18, Theorem 6.2]).

**注意 1.3.3.** 1. 上述のように Riemann ゼータ値の素朴な  $\mathcal{A}$ -類似  $\zeta_{\mathcal{A}}(k)$  は0になってしまっ  
たが、以下の heuristic により  $Z(k)$  が Riemann ゼータ値の“正しい”  $\mathcal{A}$ -類似だと信じら  
れている (ただし、最初の合同関係は  $k$  が負の場合に Kummer 合同式から得られるもの  
だが、 $k$  が正の場合には意味がない)。

$$\zeta(k) \equiv_{\text{mod } p} \zeta(k - (p-1)) = -\frac{B_{p-k}}{p-k} \equiv Z(k)_p$$

2.  $k$  が偶数ならば、奇素数  $p$  に対し  $B_{p-k} = 0$  になるので  $Z(k) = 0$  がわかる。一方で3以  
上の奇数  $k$  で  $Z(k) \neq 0$  となる例は未だ知られていない。これは非常に難しい問題のよ  
うである。例えば正則素数が無限個存在すれば、3以上の全ての奇数  $k$  に対し  $Z(k) \neq 0$   
を示すことができる。正則素数の無限性は非常に難しい問題として知られているが、こ  
れに比べると、各奇数  $k \geq 3$  に対して  $Z(k) \neq 0$  であるというのはかなり弱い主張であ  
る。証明する手立ては何か無いのだろうか。

3. さらに言うと  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \neq 0$  となる空でないインデックス  $\mathbf{k}$  の例は未だ知られていない。つ  
まり我々は「空でない任意のインデックス  $\mathbf{k}$  に対して常に  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 0$  である」という可  
能性を未だ排除できていないのである。これは喫緊の課題である。

これら以外にも明示的に計算されている有限多重ゼータ値があるので、証明なしで紹介する。

**定理 1.3.4** ([51, Theorem 4.2]). 非負整数  $k_1, k_2$  に対し

$$\begin{aligned} & \zeta_{\mathcal{A}}(\{2\}^{k_1}, 1, \{2\}^{k_2}) \\ &= 2(-1)^{k_1+k_2} (1 - 4^{-k_1-k_2}) \left( \binom{2k_1+2k_2+1}{2k_1+1} - \binom{2k_1+2k_2+1}{2k_2+1} \right) Z(2k_1+2k_2+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \zeta_{\mathcal{A}}^*(\{2\}^{k_1}, 1, \{2\}^{k_2}) \\ &= 2(1 - 4^{-k_1-k_2}) \left( \binom{2k_1+2k_2+1}{2k_1+1} - \binom{2k_1+2k_2+1}{2k_2+1} \right) Z(2k_1+2k_2+1) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし正整数  $k$  と非負整数  $r$  に対し  $\{k\}^r := \underbrace{k, \dots, k}_{r \text{ 個}}$  である。

**定理 1.3.5** ([51, Theorem 4.1]). 非負整数  $k_1, k_2$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{2\}^{k_1}, 3, \{2\}^{k_2}) = 2(-1)^{k_1+k_2} \left( \binom{2k_1+2k_2+3}{2k_1+2} - \binom{2k_1+2k_2+3}{2k_2+2} \right) Z(2k_1+2k_2+3),$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\{2\}^{k_1}, 3, \{2\}^{k_2}) = 2 \left( \binom{2k_1+2k_2+3}{2k_1+2} - \binom{2k_1+2k_2+3}{2k_2+2} \right) Z(2k_1+2k_2+3)$$

が成り立つ。

値が0になる例としては, 例えば次が知られている.

**定理 1.3.6** ([18, (15)], [25, p29], [67, Theorem 2.13]). 正整数  $k, n$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{k\}^n) = \zeta_{\mathcal{A}}^*(\{k\}^n) = 0$$

が成り立つ.

$\zeta(2) = \pi^2/6, \zeta_{\mathcal{A}}(2) = 0$  であるので,  $\mathcal{A}$  の世界では “ $\pi^2 = 0$ ” と思うことができる. 通常 of 多重ゼータ値の場合, 2以上の偶数  $k$  と正整数  $n$  に対し  $\zeta(\{k\}^n) \in \mathbb{Q}\pi^{kn}$  が知られており, 上の定理はこの結果の  $\mathcal{A}$ -類似とみなすことができる.

他にも例えば次が知られている.

**定理 1.3.7** ([67, Theorem 3.18 (ii)]). 正整数  $n$  と正の奇数  $k_1, k_2$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{k_1, k_2\}^n) = \zeta_{\mathcal{A}}^*(\{k_1, k_2\}^n) = 0$$

が成り立つ. ただし  $\{k_1, k_2\}^n := \underbrace{k_1, k_2, \dots, k_1, k_2}_{2n}$  である.

この定理は  $\zeta^*(\{1, 3\}^n) \in \mathbb{Q}\pi^{4n}$  ( $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$ ) ([6, Theorem 1], [34, 2.5], [37, Theorem B] など) の  $\mathcal{A}$ -類似 (およびその一般化) とみなすことができる.

### 1.3.2 線型関係式

続いて  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式を紹介する. ここでは通常 of 多重ゼータ値の  $\mathcal{A}$ -類似と考えられる関係式を紹介する.

**シャッフル関係式** まず紹介するのは線型関係式の中でも基本的なものと思われるシャッフル関係式である. 通常 of 多重ゼータ値の場合は多重ゼータ値の積を和で書く代数関係式であったが, 有限多重ゼータ値の場合は線型関係式になる.

**定理 1.3.8** ([26, (2.3)], [30], [47, Corollary 4.1]). インデックス  $\mathbf{k}, \mathbf{l}$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \# \mathbf{l}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}})$$

が成り立つ. ただし  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$  のとき  $\bar{\mathbf{l}} = (l_s, \dots, l_1)$  であり,  $\mathbf{k} \# \mathbf{l}$  は  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{l}$  のシャッフル積である (金子氏の報告記事 [28, 3 積分表示] を参照).

**注意 1.3.9.** シャッフル関係式において  $\mathbf{k} = \emptyset$  とおくと

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\bar{\mathbf{l}})$$

が得られる (反転公式). 通常 of 多重ゼータ値の場合は  $\zeta(\mathbf{k})$  と  $\zeta(\bar{\mathbf{k}})$  の間には一般には  $\mathbb{Q}$  上の線型関係は期待できないので, 反転公式は有限多重ゼータ値特有の線型関係式と言える.

シャッフル関係式の証明の概略. [47] の部分分数分解を用いるアイディアに沿って  $\mathbf{k} = (1), \mathbf{l} = (1, 2)$  の場合に証明をスケッチする.  $\mathcal{A}$  の元

$$X := \left( \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 > 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 < p}} \frac{1}{m_1 m_2 (m_2 + m_3)^2} \bmod p \right)_p$$

を考える.  $X$  を 2 通りに式変形する. まず部分分数分解

$$\frac{1}{ab^2} = \frac{1}{a(a+b)^2} + \frac{1}{b^2(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)^2}$$

を  $a = m_1, b = m_2 + m_3$  に用いて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_1 m_2 (m_2 + m_3)^2} \\ &= \frac{1}{m_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3)^2} + \frac{1}{m_2 (m_2 + m_3)^2 (m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{1}{m_2 (m_2 + m_3) (m_1 + m_2 + m_3)^2} \end{aligned}$$

を得る. したがってこの式の第 2 項から  $\zeta_{\mathcal{A}}(1, 2, 1)$  が, 第 3 項から  $\zeta_{\mathcal{A}}(1, 1, 2)$  が出てくる. また部分分数分解

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$$

を第 1 項の  $(m_1, m_2)$  に用いることで  $\zeta_{\mathcal{A}}(1, 1, 2)$  が 2 つ現れ,  $X = 3\zeta_{\mathcal{A}}(1, 1, 2) + \zeta_{\mathcal{A}}(1, 2, 1)$  となる.  $(1) \boxplus (1, 2) = 3(1, 1, 2) + (1, 2, 1)$  であるので, 結局  $X = \zeta_{\mathcal{A}}((1) \boxplus (1, 2))$  を得る.

一方  $n_1 = m_1, n_2 = p - m_2, n_3 = p - m_2 - m_3$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} X &= \left( \sum_{0 < n_1 < n_3 < n_2 < p} \frac{1}{n_1 (p - n_2) (p - n_3)^2} \bmod p \right)_p \\ &= (-1)^3 \zeta_{\mathcal{A}}(1, 2, 1) = (-1)^{\text{wt}((1, 2))} \zeta_{\mathcal{A}}((1), \overline{(1, 2)}) \end{aligned}$$

となり,  $\mathbf{k} = (1), \mathbf{l} = (1, 2)$  の場合のシャッフル関係式が得られた.  $\square$

一般の  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r), \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$  の場合は,

$$X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) := \left( \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s > 0 \\ m_1 + \dots + m_r + n_1 + \dots + n_s < p}} \frac{1}{M_1^{k_1} M_2^{k_2} \dots M_r^{k_r} N_1^{l_1} N_2^{l_2} \dots N_s^{l_s}} \bmod p \right)_p$$

という  $\mathcal{A}$  の元を考え (ただし  $M_i := m_1 + \dots + m_i, N_i := n_1 + \dots + n_i$ ), 部分分数分解

$$\frac{1}{a^k b^l} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{l-1+i}{i} \frac{1}{a^{k-i} (a+b)^{l+i}} + \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k-1+i}{i} \frac{1}{b^{l-i} (a+b)^{k+i}}$$

$(k, l \geq 1)$  を繰り返し用いることで  $X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \boxplus \mathbf{l})$  を示すことができる (ここが非自明である.  $\text{dep}(\mathbf{k}) + \text{dep}(\mathbf{l})$  に関する帰納法で示される). 一方で  $m'_i = m_i (1 \leq i \leq r)$ ,  $n'_1 = p - n_1$ ,  $n'_2 = p - n_1 - n_2, \dots, n'_s = p - n_1 - \dots - n_s$  という変数変換により,

$$\begin{aligned} X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) &= \left( \sum_{0 < m'_1 < \dots < m'_r < n'_s < \dots < n'_1 < p} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r} (p - n'_1)^{l_1} \dots (p - n'_s)^{l_s}} \bmod p \right)_p \\ &= (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \end{aligned}$$

がわかり, 有限多重ゼータ値に対するシャッフル関係式が証明される.

**注意 1.3.10.** Kaneko と Zagier による証明 ([27], [30]) は上記のものとは異なり, 多重ポリログ関数

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \quad (|z| < 1)$$

がシャッフル関係式

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) \cdot \text{Li}_{\mathbf{l}}(z) = \text{Li}_{\mathbf{k} \boxplus \mathbf{l}}(z)$$

を満たすことを用いている. 詳しくは [27, Theorem 8.1] の証明を参照せよ.

次の予想は通常多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式が全て正規化複シャッフル関係式から導かれるという予想の  $\mathcal{A}$ -類似である.

**予想 1.3.11** (Kaneko–Zagier). 有限多重ゼータ値の間の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式は, 以下の2つの線型関係式の有限個の組合せで得られるであろう.

$$\begin{cases} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * (l)) = 0 \quad (\mathbf{k} \text{ はインデックス, } l \text{ は正の整数}) \\ \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \boxplus \mathbf{l}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \quad (\mathbf{k}, \mathbf{l} \text{ はインデックス}). \end{cases}$$

上の関係式は一方のインデックスの深さが1であるため, 左辺を調和関係式でバラすと0となり, 有限多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式を与えていることに注意する.

他にも知られている  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式があるので, 証明なしでいくつか紹介する. 証明についてはそれぞれの参考文献を参照.

**対称和に関する関係式** 正整数  $r$  に対し  $\mathfrak{S}_r$  を  $r$  次対称群とする. 次の定理は多重ゼータ値の対称和が Riemann ゼータ値の積で表せることの  $\mathcal{A}$ -類似である.

**定理 1.3.12** ([18, THEOREM 4.4]). 空でないインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と  $\bullet \in \{\emptyset, *\}$  に対し

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(r)}) = 0$$

が成り立つ.

**注意 1.3.13.**  $\mathbf{k} = (\{k\}^n)$  とすると定理 1.3.6 が得られる.

**Bowman–Bradley 型の関係式** 次の定理はいわゆる多重ゼータ (スター) 値の Bowman–Bradley の定理 ([5, Corollary 5.1], [33, Theorem 1.1], [38, Theorem 1], [59, Theorem 1.1], [62, Theorem 1.1]) の  $\mathcal{A}$ -類似である.

**定理 1.3.14** ([53, Theorem 1.4]).  $a, b$  を正の奇数,  $c$  を正の偶数とし,  $m, n$  を非負整数で  $(m, n) \neq (0, 0)$  であるものとする. このとき  $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$  に対し

$$\sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{2m} = n \\ n_0, \dots, n_{2m} \geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\{c\}^{n_0}, a, \{c\}^{n_1}, b, \{c\}^{n_2}, a, \dots, a, \{c\}^{n_{2m-1}}, b, \{c\}^{n_{2m}}) = 0$$

が成り立つ.

**注意 1.3.15.** つい最近, この定理の  $(a, b, c) = (1, 3, 2)$  の場合の mod  $p^2$  版が示された [43, Theorem 1.3].

**和公式** 次に有限多重ゼータ値の和公式を紹介する.  $1 \leq i \leq r < k$  を満たす正整数  $i, k, r$  に対し, 重さが  $k$ , 深さが  $r$  で  $k_i \geq 2$  となるインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  全体のなす集合を  $I_{k,r,i}$  と表す. この時, 通常の高重ゼータ (スター) 値の和公式とは

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,r}} \zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k), \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,r}} \zeta^*(\mathbf{k}) = \binom{k-1}{r-1} \zeta(k)$$

であった ([3, (11)], [10, Proposition], [17, pp.280–281]).

**定理 1.3.16** (和公式, [52, Theorem 1.4]).  $1 \leq i \leq r < k$  を満たす正整数  $i, k, r$  に対し,

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = (-1)^i \left\{ \binom{k-1}{i-1} + (-1)^r \binom{k-1}{r-i} \right\} Z(k)$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) = (-1)^i \left\{ \binom{k-1}{r-i} + (-1)^r \binom{k-1}{i-1} \right\} Z(k)$$

が成り立つ.

**注意 1.3.17.** 1. 通常の高重ゼータ (スター) 値の和公式の右辺と有限多重ゼータ値の和公式の右辺を比べると, 符号や二項係数のズレはあるが,  $Z(k)$  が  $\zeta(k)$  の  $\mathcal{A}$  の正しい対応物とみなすことができる.

2. この関係式は mod  $p^2$  版が知られている [58, Theorem 2.5].

**双対関係式** 次に双対関係式の  $\mathcal{A}$ -類似を紹介する. 有限多重ゼータ値の双対関係式は, Hoffman インデックスと呼ばれる通常の高重インデックスとは異なる高重インデックスを用いて定式化されるため, まずは Hoffman 高重インデックスを定義する.

インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  を 1 の足し算で表す, つまり  $\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{k_1}, \dots, \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{k_r}$  と表したとき, “+” と “,” を入れ替えてできるインデックスを  $\mathbf{k}^\vee$  と表し,  $\mathbf{k}$  の Hoffman 高重インデッ

クスという ( $\emptyset^\vee = \emptyset$  と定める). 例えば  $(2, 1, 3)^\vee = (1+1, 1, 1+1+1)^\vee = (1, 1+1+1, 1, 1) = (1, 3, 1, 1)$  である.

**定理 1.3.18** (Hoffman 双対関係式, [18, THEOREM 4.6], [58, Corollary 2.2]). インデックス  $\mathbf{k}$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}^\vee)$$

が成り立つ.

**注意 1.3.19.** この関係式は任意の正整数  $n$  に対する  $\text{mod } p^n$  の関係式に [55, Theorem 1.3], さらにより一般に有限多重ポリログの間の  $\text{mod } p^n$  での関係式に一般化されることが知られている [55, Theorem 1.5]. 有限多重ポリログについてはこれ以上触れない. 興味のある方は [48], [49], [54], [55] などを参照されたい.

**大野型関係式** 次に大野関係式の  $\mathcal{A}$ -類似を紹介する.

**定理 1.3.20** (大野型関係式, [50, Theorem 1.4]). インデックス  $(k_1, \dots, k_r)$  に対し, その Hoffman 双対インデックスを  $(k'_1, \dots, k'_{r'})$  と表すとき, これらと整数  $l \geq 0$  に対し

$$\sum_{\substack{e_1+\dots+e_r=l \\ e_1, \dots, e_r \geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1 + e_1, \dots, k_r + e_r) = \sum_{\substack{e'_1+\dots+e'_{r'}=l \\ e'_1, \dots, e'_{r'} \geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}}((k'_1 + e'_1, \dots, k'_{r'} + e'_{r'})^\vee)$$

が成り立つ.

**注意 1.3.21.**  $\mathbf{k} = (\{1\}^{r-i}, 2, \{1\}^{i-1}) (1 \leq i \leq r)$ ,  $l = k - r - 1$  として式変形すると定理 1.3.16 が得られる [50, Corollary 3.1].

有限多重ゼータスター値に対しても大野型関係式が知られている.

**定理 1.3.22** (有限多重ゼータスター値に対する大野型関係式, [14, Theorem 1.12], [58, Corollary 2.3]). 空でないインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$  に対し

$$b(\mathbf{k}, \mathbf{e}) := \prod_{i=1}^r \binom{k_i + e_i + \delta_{i,1} + \delta_{i,r} - 2}{e_i}$$

とおく. ただし  $\delta_{i,j}$  は Kronecker のデルタで

$$\binom{n-1}{n} := \begin{cases} 1 & n=0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. このとき空でないインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と非負整数  $l$  に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}=(e_1, \dots, e_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \\ e_1+\dots+e_r=l}} b(\mathbf{k}, \mathbf{e}) \zeta_{\mathcal{A}}^*(k_1 + e_1, \dots, k_r + e_r) = - \sum_{\substack{\mathbf{e}'=(e'_1, \dots, e'_{r'}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r'} \\ e'_1+\dots+e'_{r'}=l}} \zeta_{\mathcal{A}}^*(k'_1 + e'_1, \dots, k'_{r'} + e'_{r'})$$

が成り立つ. ただし  $\mathbf{k}^\vee = (k'_1, \dots, k'_{r'})$ .

**注意 1.3.23.** 1.  $\mathbf{k} = (i, r+1-i)$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $l = k-r-1$  とすると, 定理 1.3.16 が得られる [14, Proposition 3.2].

2. この関係式も任意の正整数  $n$  に対し  $\text{mod } p^n$  版が存在することが知られている ([42, Theorem 3.2], [58]).

**導分関係式** 次に紹介する導分関係式は Hoffman 代数の言葉で定式化されるので, ここで導入する.  $\mathfrak{h} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  を  $\mathbb{Q}$  上の 2 変数非可換多項式環とし,  $\mathfrak{h}^1 := \mathbb{Q} + e_1\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^0 := \mathbb{Q} + e_1\mathfrak{h}e_0$  とおく.  $\mathfrak{h}^1$  は  $\mathbb{Q}$  上  $e_k := e_1e_0^{k-1}$  ( $k \geq 1$ ) たちで生成されることに注意する. 写像  $Z_{\mathcal{A}} : \mathfrak{h}^1 \rightarrow \mathcal{A}$  を  $Z_{\mathcal{A}}(e_{k_1} \cdots e_{k_r}) := \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$  と定義し,  $\mathbb{Q}$  線型写像に伸ばす.

次に  $\mathfrak{h}$  上の導分とは,  $\mathbb{Q}$  線型写像  $\partial : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  であって, 勝手な  $w, w' \in \mathfrak{h}$  に対し  $\partial(ww') = \partial(w)w' + w\partial(w')$  が成り立つものことである. 生成元  $e_0, e_1$  の像を決めると導分が一意に決まることに注意する. 正整数  $l$  に対し, 導分  $\partial_l : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  を

$$\begin{cases} \partial_l(e_0) := e_1e^{l-1}e_0, \\ \partial_l(e_1) := -e_1e^{l-1}e_0 \end{cases}$$

によって定義する. ただし  $e := e_0 + e_1$ .

**定理 1.3.24** (導分関係式 [40, Theorem 2.1]). インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ , 正整数  $l$  および  $w \in \mathfrak{h}^1$  に対して

$$\begin{aligned} & Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{k_1-1} \cdots e_1e^{k_r-1}\partial_l(w)) \\ &= -Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{l-1}e_1e^{k_1-1} \cdots e_1e^{k_r-1}w) \\ &+ \sum_{i=1}^r Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{k_1-1} \cdots e_1e^{k_{i-1}-1}e_0e^{k_i-1}e_1e^{l-1}e_1e^{k_{i+1}-1} \cdots e_0e^{k_r-1}w) \end{aligned}$$

が成り立つ.  $r = 0$  の場合は  $e_0e^{k_1-1} \cdots e_0e^{k_r-1} = 1$  と理解する. 特にこのとき

$$Z_{\mathcal{A}}(\partial_l(w)) = -Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{l-1}w)$$

が成り立つ.

**注意 1.3.25.** 1. 導分関係式も正の整数  $n$  に対する  $\text{mod } p^n$  版が知られている [42, Theorem 1.3].

2. 有限多重ゼータ値の大野型関係式と導分関係式は同値であることが知られている [19, Theorem 3.4].

**Aoki–Ohno の関係式/Le–Murakami の関係式** Aoki–Ohno の関係式および Le–Murakami の関係式の  $\mathcal{A}$ -類似を紹介する.  $k \geq 2s$  を満たす正整数  $k, r, s$  に対し,  $I_0(k, r, s)$  で重さが  $k$ , 深さが  $r$  で高さが  $s$  である収束インデックス全体のなす集合を表す. ここで高さとは  $\#\{i \mid k_i \geq 2\}$

のことである. また, 収束インデックスとは空インデックスか  $k_r \geq 2$  であるインデックスのことであったことを思い出す.  $I_0(k, s) := \bigcup_r I_0(k, r, s)$  とおく.

Aoki–Ohno [2, Theorem 1] は

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, s)} \zeta^*(\mathbf{k}) = 2 \binom{k-1}{2s-1} (1 - 2^{1-k}) \zeta(k)$$

を, Le–Murakami [35, (2)] は  $k$  が偶数の時,

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, s)} (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^{k/2}}{(k+1)!} \sum_{r=0}^{k/2-s} \binom{k+1}{2r} (2 - 2^{2r}) B_{2r} \pi^k$$

が成り立つことをそれぞれ示した. Le–Murakami の関係式は初めは結び目の不変量を通じて得られた関係式である. 以下の定理はその  $\mathcal{A}$ -類似である. 右辺が一致することは興味深い.

**定理 1.3.26** ([29, Theorem 1.1]).  $k \geq 2s$  を満たす正整数  $k, s$  に対し

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, s)} \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) &= 2 \binom{k-1}{2s-1} (1 - 2^{1-k}) Z(k), \\ \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, s)} (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) &= 2 \binom{k-1}{2s-1} (1 - 2^{1-k}) Z(k) \end{aligned}$$

が成り立つ.

**Li の定理** 最後に多重ゼータスター値の双対性に関する Li の定理の  $\mathcal{A}$ -類似について紹介する. これは Kaneko によって予想され [25, p31], サマースクール開催当時東北大学修士 2 年であった桜田氏によって証明された.

$$X_0^*(k, r, s) := \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, r, s)} \zeta^*(\mathbf{k})$$

とおく. このとき正整数  $m, n$  に対し, Li は

$$(-1)^m X_0^*(m+n+1, n+1, s) - (-1)^n X_0^*(m+n+1, m+1, s) \in \mathbb{Q}[\zeta(k) \mid k \geq 2]$$

を示した [36, Corollary 2.3].

$$X_{\mathcal{A},0}(k, r, s) := \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, r, s)} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}), \quad X_{\mathcal{A},0}^*(k, r, s) := \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, r, s)} \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k})$$

とおく.

**定理 1.3.27** (Sakurada). 整数  $1 \leq s \leq m, n$  と素数  $p$  で  $p-1 \nmid m+n+1$  を満たすものに対し,

$$(-1)^m \sum_{\mathbf{k} \in I_0(m+n+1, n+1, s)} \zeta_{<p}^*(\mathbf{k}) \equiv (-1)^n \sum_{\mathbf{k} \in I_0(m+n+1, m+1, s)} \zeta_{<p}^*(\mathbf{k}) \pmod{p}$$



この範囲で  $n_1 < n_2$  を満たす  $n_1, n_2$  にわたる和を考えるのである. すると (1) は

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{0 < n_1 < n_2} + \sum_{0 < n_1 < \infty \text{ ("=")} - \infty < n_2 < 0} + \sum_{n_1 < n_2 < 0} \right) \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} \\ & = \zeta^*(k_1, k_2) + (-1)^{k_2} \zeta^*(k_1) \zeta^*(k_2) + (-1)^{k_1+k_2} \zeta^*(k_2, k_1) \end{aligned}$$

を考えていることに対応している. ここで (収束インデックスとは限らない) インデックス  $\mathbf{k}$  に対し  $\zeta^*(\mathbf{k})$  は調和正規化多項式  $\zeta^*(\mathbf{k}; T)$  (金子氏の報告記事 [28, 定義 4.1] を参照) の定数項であり, 調和正規化多重ゼータ値と呼ばれる.  $k_1, k_2$  が 1 である場合を考慮して調和正規化多重ゼータ値を考えていることに注意する. 以上の考察は一般の深さでも同様に行えるので, 次に定義する和が Kontsevich の示唆に現れる対象とすることができる.

**定義 2.1.1.** インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対し

$$\zeta_S^*(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta^*(k_1, \dots, k_i) \zeta^*(k_r, \dots, k_{i+1})$$

とおく.

正規化多項式の定義から正規化多重ゼータ値は多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  上の線型結合であるので,  $\zeta_S^*(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}$  であることに注意する.

Kontsevich の示唆を具現化した対象  $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  は, 定義された時点では良い対象なのかどうかまだわからない. 次の定理は  $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  が “十分たくさん存在する” ことを示しており, その意味で  $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  は “良い” 対象だと思える.

**定理 2.1.2** (Yasuda [64, Theorem 6.1]). 非負整数  $k$  に対し

$$\mathcal{Z}_k = \langle \zeta_S^*(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \text{ はインデックスで } \text{wt}(\mathbf{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ.

この定理を踏まえて, Kaneko–Zagier 予想とは以下の主張である.

**予想 2.1.3** (Kaneko–Zagier). 対応

$$\rho: \mathcal{Z} = \langle \zeta_S^*(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \text{ はインデックス} \rangle_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{Z}_A; \quad \zeta_S^*(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_A(\mathbf{k})$$

は well-defined な  $\mathbb{Q}$  代数の準同型を与え,  $\text{Ker}(\rho) = \zeta(2)\mathcal{Z}$  が成り立つ.

**注意 2.1.4.** 1.  $\rho$  が well-defined であれば,  $\rho$  が生成元を生成元に移すことから  $\rho$  の全射性が従う. したがって予想を仮定すると,  $\mathbb{Q}$  代数の同型  $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}_A$  が  $\rho$  から誘導される. この同型を Kaneko–Zagier 予想と呼ぶことも多い.

2.  $\zeta(\mathbf{k})$  に対応する  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$  の元は  $(\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) \bmod p)_p$  であることが知られている. ただし  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  は Deligne の  $p$  進多重ゼータ値 (原氏の報告記事 [11], 安田氏の報告記事 [65], 関氏の報告記事 [57] を参照).

**定義 2.1.5.** 対称多重ゼータ値  $\zeta_S(\mathbf{k})$  を

$$\zeta_S(\mathbf{k}) := \zeta_S^*(\mathbf{k}) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$$

と定義する.

Kaneko–Zagier 予想が正しいとすると,  $\zeta_S(\mathbf{k})$  は  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$  が満たす  $\mathbb{Q}$  上の代数/線型関係式と全く同じ代数/線型関係式を満たすことになる. つまり  $\bmod p$  の世界の有限多重ゼータ値の関係式が通常  $\zeta_S(\mathbf{k})$  の言葉のみを用いて表現できるということである. これは非常に興味深い.

## 2.2 定義に関する補足

この節では対称多重ゼータ値の定義に関していくつか補足をする.

### 2.2.1 正規化多項式を用いた場合とそのシャッフル類似

Kontsevich の示唆を数学的に厳密にすることで対称多重ゼータ値を定義したが, その際調和正規化多重ゼータ値を用いた. 正規化多重ゼータ値は正規化多項式の定数項であったが, 実は定数項でなく正規化多項式そのものを用いても同じものが定義される. また, シャッフル正規化を用いても同様の和が定義されるが, 調和正規化の場合と同様に, 正規化多項式を用いて定義しても  $T$  によらないことが示される.

**命題 2.2.1.** インデックス  $\mathbf{k}$  と  $\bullet \in \{*, \text{III}\}$  に対し  $\zeta_S^{\text{III}}(\mathbf{k}), \zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$  を  $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  と同様に定義する :

$$\zeta_S^{\text{III}}(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta^{\text{III}}(k_1, \dots, k_i) \zeta^{\text{III}}(k_r, \dots, k_{i+1}),$$

$$\zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta^{\bullet}(k_1, \dots, k_i; T) \zeta^{\bullet}(k_r, \dots, k_{i+1}; T).$$

このとき  $\zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k}) = \zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$  が成り立つ. つまり  $\zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$  は  $T$  によらない実数で, しかも  $\zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k})$  と一致する. さらに  $k := \text{wt}(\mathbf{k})$  とおくと  $\zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}_k$  が成り立つ.

証明は  $\zeta_S^{\bullet}(\mathbf{k})$  を母関数で表示し, 式変形により  $T$  が現れる項を消すことで行われる. その際次の等式が重要である. 詳細は [30] に譲る.

補題 2.2.2. 収束インデックス  $\mathbf{k}$  と  $\bullet \in \{*, \text{III}\}$  に対し

$$\sum_{s=0}^{\infty} \zeta^{\bullet}(\mathbf{k}, \{1\}^s; T) x^s = e^{Tx} \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{\bullet}(\mathbf{k}, \{1\}^i) x^i$$

が成り立つ.

この補題は [20, Proposition 10] の書き換えである. また [20, Corollary 5] から簡単に導くこともできる. 金子氏の報告記事 [28] の 5.1 節および 5.2 節も参照.

注意 2.2.3.  $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k}) = \zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$  は代数的に示すこともできる. つまり  $\bullet \in \{*, \text{III}\}$  に対し,  $\mathfrak{H}_{\bullet}^1$  の元

$$\sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} (e_{k_1} \dots e_{k_i}) \bullet (e_{k_r} \dots e_{k_{i+1}})$$

が  $\mathfrak{H}_{\bullet}^0$  に属することを示すことができる ( $e_k := e_1 e_0^{k-1}$  であった). これは実際に積  $\bullet$  を実行してみると,  $\mathfrak{H}_{\bullet}^0$  に属さない項がうまく相殺されて現れないことから従う.

### 2.2.2 $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$ と $\zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(\mathbf{k})$ のズレ

2 種類の正規化多項式は  $\mathbb{R}$  線型写像  $\rho$  によって  $\zeta^{\text{III}}(\mathbf{k}; T) = \rho(\zeta^*(\mathbf{k}; T))$  を満たすのであった (正規化の基本定理. 詳しくは金子氏の報告記事 [28, 定理 4.4] を参照). それでは  $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$  と  $\zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(\mathbf{k})$  はどれくらいずれているのだろうか.  $\zeta^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$  を具体的に計算し複シャッフル関係式を駆使すると, 例えば

$$\zeta_{\mathcal{S}}^*(2, 1, 2, 1) = \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(2, 1, 2, 1) = -\frac{88}{35} \zeta(2)^3 + \frac{9}{2} \zeta(3)^2$$

を示すことができる.

また

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{S}}^*(2, 1, 1, 2) &= \frac{247}{105} \zeta(2)^3 - 6 \zeta(3)^2, \\ \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(2, 1, 1, 2) &= \frac{352}{105} \zeta(2)^3 - 6 \zeta(3)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. 他にも

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{S}}^*(2, 1, 4, 1) &= \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(2, 1, 4, 1) = -\frac{3391}{2625} \zeta(2)^4 + \frac{5}{2} \zeta(3) \zeta(5) + \frac{9}{5} \zeta(3, 5), \\ \zeta_{\mathcal{S}}^*(2, 1, 1, 4) &= \frac{94}{2625} \zeta(2)^4 + \frac{9}{5} \zeta(3, 5), \quad \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(2, 1, 1, 4) = \frac{1144}{2625} \zeta(2)^4 + \frac{9}{5} \zeta(3, 5), \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\zeta_{\mathcal{S}}^*(2, 1, 1, 2)$ ,  $\zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(2, 1, 1, 2)$  および  $\zeta_{\mathcal{S}}^*(2, 1, 1, 4)$ ,  $\zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(2, 1, 1, 4)$  は  $\zeta(2)$  のべきの有理数倍を無視すると一致しているが, 実は一般に次が成り立つ.

命題 2.2.4. インデックス  $\mathbf{k}$  に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) - \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ.

この命題も母函数を用いて再定式化し、補題 2.2.2 と

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)\Gamma(1+x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n} x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + \dots$$

を用いて証明される (この等式は、例えば [3, (35)]). また、実際には

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{S}}^*(k_1, \dots, k_r) &= \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(k_1, \dots, k_r) \\ &+ \sum_{m=1}^{r/2} (-1)^m \zeta(\{2\}^m) \sum_{\substack{0 < i \leq r-2m \\ k_{i+1} = \dots = k_{i+2m} = 1}} (-1)^{k_{i+2m+1} + \dots + k_r} \zeta^{\text{III}}(k_1, \dots, k_i) \zeta^{\text{III}}(k_r, \dots, k_{i+2m+1}) \end{aligned}$$

が成り立っている [26, p187]. 右辺の二つ目の和の  $i$  は、 $k_{i+1}$  から連続して偶数  $2m$  個 1 が並ぶような  $i$  に渡っていて、そのような  $i$  がなければ和は 0 とする. 正整数  $m$  に対し  $\zeta(\{2\}^m) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$  に注意する.

以上より、対称多重ゼータ値の定義は、シャッフル正規化多項式 (あるいはシャッフル正規化多重ゼータ値) を用いても、 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$  の元としては同じものが定義されることがわかった.

**注意 2.2.5.** 命題 2.2.4 は、より精密に

$$\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) - \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}_{k-2}$$

がわかる. ただし  $k := \text{wt}(\mathbf{k})$ . これを用いると非負整数  $k$  に対し

$$\mathcal{Z}_k = \langle \zeta_{\mathcal{S}}^{\text{III}}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \text{ はインデックスで } \text{wt}(\mathbf{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}}$$

を示すことができる. 詳しくは [65, Theorem 6.1] を参照

### 2.2.3 新たな順序 $\prec$ とその言い換え

Kontsevich の示唆を数学的に厳密にする際、数直線に並んでいる数を 0 から正の方向へ出発し、“ $\infty = -\infty$ ” を飛び越えて負の整数を小さい順に進んで 0 に至る、という新たな世界観を考察した. これは  $\mathbb{Z} \cup \{\infty = -\infty\}$  に

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec \dots \prec (\infty = -\infty) \prec \dots \prec -2 \prec -1 \prec 0$$

という順序  $\prec$  を新たに導入していることに相当する. このとき 0 でない整数  $m_1, \dots, m_r$  に対し、 $m_1 \prec \dots \prec m_r$  であることと、通常不等号について

$$\frac{1}{m_1} > \dots > \frac{1}{m_r}$$

であることが同値である. 実際  $m_i \prec (\infty = -\infty) \prec m_{i+1}$  であることと  $1/m_i > 0 > 1/m_{i+1}$  であることが同値になる.

この同値性は Yasuda によって指摘された. 例えば Yasuda は [64] において  $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$  の定義に  $\frac{1}{m_1} > \dots > \frac{1}{m_r}$  を採用している.

## 2.2.4 対称多重ゼータ値の“級数表示”

正整数  $M$  とインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対し

$$\zeta_{<M}(\mathbf{k}) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r < M} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

とおくと、 $\mathbf{k}$  が収束インデックスならば

$$\zeta(\mathbf{k}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \zeta_{<M}(\mathbf{k})$$

が成り立つことは容易に示すことができる。実は  $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  に対しても類似の表示が知られている。正整数  $M$  とインデックス  $\mathbf{k}$  に対し

$$\zeta_{S,M}^*(\mathbf{k}) := \sum_{\substack{m_1 < \dots < m_r \\ 0 < |m_1|, \dots, |m_r| < M}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

とおく。  $m_1 < \dots < m_r$  のうち  $m_i$  と  $m_{i+1}$  の間に 0 があるとする、(通常の意味で)  $0 < m_1 < \dots < m_i$  が正、 $m_{i+1} < \dots < m_r < 0$  が負ということになる。したがって

$$\zeta_{S,M}^*(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta_{<M}(k_1, \dots, k_i) \zeta_{<M}(k_r, \dots, k_{i+1}) \quad (2)$$

がわかる。

**命題 2.2.6** (Yasuda, Zagier). 全てのインデックス  $\mathbf{k}$  に対し  $\lim_{M \rightarrow \infty} \zeta_{S,M}^*(\mathbf{k})$  は収束し、

$$\zeta_S^*(\mathbf{k}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \zeta_{S,M}^*(\mathbf{k}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m_1 < \dots < m_r \\ 0 < |m_1|, \dots, |m_r| < M}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

が成り立つ。

$\zeta_{S,M}^*(\mathbf{k})$  は定義から調和関係式

$$\zeta_{S,M}^*(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{S,M}^*(\mathbf{k}) \zeta_{S,M}^*(\mathbf{l}) \quad (3)$$

を満たすことに注意する。つまり通常の高重ゼータ値の級数表示に現れる不等式  $m_1 < \dots < m_r$  の部分を新たな不等式  $m_1 < \dots < m_r$  に置き換えて全く同様に証明することができる。(3) の両辺の極限をとることで、 $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  が調和関係式を満たすことがわかる。

**系 2.2.7** ( $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  の調和関係式). インデックス  $\mathbf{k}, \mathbf{l}$  に対し

$$\zeta_S^*(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_S^*(\mathbf{k}) \zeta_S^*(\mathbf{l})$$

が成り立つ。

**注意 2.2.8.** 命題 2.2.6 は  $\zeta_S^*(\mathbf{k})$  の級数表示であるが、つい最近筆者と Yamamoto によって  $\zeta_S^{\text{reg}}(\mathbf{k})$  の級数表示が得られている。つまり  $\zeta_{S,M}^*(\mathbf{k})$  に対応する有理数  $\zeta_{S,M}^{\text{reg}}(\mathbf{k})$  を具体的に与え、 $\zeta_S^{\text{reg}}(\mathbf{k}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \zeta_{S,M}^{\text{reg}}(\mathbf{k})$  を示すことができる。多重ゼータ値の積分表示に由来するシャッフール正規化多重ゼータ値が級数表示を持つことは興味深い。

## 2.3 対称多重ゼータ値の具体的な値と関係式

この小節では対称多重ゼータ値の知られている具体的な値と  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式を紹介する. Kaneko–Zagier 予想を信じると, 対称多重ゼータ値の間の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式は, 有限多重ゼータ値が満たす  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式と全く同じ関係式を満たすことになる. 知られている関係式のうちいくつかは, 代数的に ( $\mathfrak{H}^1$  のレベルで) 証明されており, そのような場合は有限多重ゼータ値の場合にも対称多重ゼータ値の場合にも適用できて, 同じ証明を与えたことになる. 一方で (驚くべきことに) 同一の関係式であっても, 有限多重ゼータ値の場合と対称多重ゼータ値の場合で証明が全く異なるものも知られており, Kaneko–Zagier 予想の深遠さを物語っている.

### 2.3.1 具体的な値

はじめに具体的な値の例を紹介する.

**例 2.3.1** ([26, 例 4.3]). まず深さが 1 の場合,  $\zeta_S(k)$  ( $k \geq 1$ ) は有限多重ゼータ値と同じで 0 になる. 実際に正整数  $k$  に対し  $\zeta_S^*(k)$  を定義通り計算すると

$$\zeta_S^*(k) = (-1)^k \zeta^*(k) + \zeta^*(k) = \begin{cases} 2\zeta(k) & k \text{ が偶数} \\ 0 & k \text{ が奇数} \end{cases}$$

がわかる.  $k$  が偶数の場合は  $\zeta(k) \in \mathbb{Q}\pi^k \subset \zeta(2)\mathcal{Z}$  であるので, 結局  $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$  において  $\zeta_S(k) = 0$  がわかる.

次に深さが 2 の場合を計算してみよう. まず正の整数  $k_1, k_2$  に対し  $\zeta_S^*(k_1, k_2)$  を書き下すと

$$\zeta_S^*(k_1, k_2) = (-1)^{k_1+k_2} \zeta^*(k_2, k_1) + (-1)^{k_2} \zeta^*(k_1) \zeta^*(k_2) + \zeta^*(k_1, k_2)$$

となる.  $k_1 + k_2$  が偶数の場合は  $\zeta^*(k_1) \zeta^*(k_2) = \zeta^*(k_1, k_2) + \zeta^*(k_2, k_1) + \zeta^*(k_1 + k_2) \equiv \zeta^*(k_1, k_2) + \zeta^*(k_2, k_1) \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$  なので

$$\zeta_S^*(k_1, k_2) \equiv (1 + (-1)^{k_2}) \zeta^*(k_1) \zeta^*(k_2) \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$$

を得る. よって  $k_2$  が奇数の場合は  $\zeta_S^*(k_1, k_2) \equiv 0 \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$  がわかる.  $k_2$  が偶数の場合は  $k_1$  も偶数となるので結局この場合も  $\zeta_S^*(k_1, k_2) \equiv 0 \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$  がわかる.

$k_1 + k_2$  が奇数の場合は  $k_1$  または  $k_2$  が偶数なので  $\zeta^*(k_1) \zeta^*(k_2) \equiv 0 \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$  となる. さらに [7, (5)] または [66, Proposition 7] を用いると

$$\zeta_S^*(k_1, k_2) \equiv \zeta^*(k_1, k_2) - \zeta^*(k_2, k_1) \equiv (-1)^{k_2} \binom{k_1 + k_2}{k_1} \zeta(k_1 + k_2) \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$$

を得る. さらにこの式は  $k_1 + k_2$  が偶数の場合も (両辺共に 0 で) 成り立つので, 結局正の整数  $k_1, k_2$  に対し

$$\zeta_S(k_1, k_2) = (-1)^{k_2} \binom{k_1 + k_2}{k_1} \zeta(k_1 + k_2) \pmod{\zeta(2)\mathcal{Z}}$$

が成り立つ. これは  $\zeta_A(k_1, k_2) = (-1)^{k_2} \binom{k_1 + k_2}{k_1} Z(k_1 + k_2)$  に対応しており, この対応からも  $Z(k)$  が Riemann ゼータ値  $\zeta(k)$  の  $\mathcal{A}$  における正しい対応物とみなすことができる.

他にも正整数  $k, n$  に対して  $\zeta_S(\{k\}^n) = 0$  が [25] の手法によりわかる.

### 2.3.2 線型関係式

次に  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式を紹介する.

例 2.3.2 ([26, 命題 4.4]). 対称多重ゼータ値についても調和関係式 (代数関係式) とシャッフル関係式が成り立つことが知られている.

$$\begin{cases} \zeta_S(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_S(\mathbf{k})\zeta_S(\mathbf{l}) \\ \zeta_S(\mathbf{k} \sqcup \mathbf{l}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})}\zeta_S(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}). \end{cases}$$

調和関係式は  $\text{mod } \zeta(2)$  をする前の式 (系 2.2.7) から従う.

シャッフル関係式については証明が複数知られている. まず調和関係式の場合と同様に,  $\text{mod } \zeta(2)$  をする前の式

$$\zeta_S^{\text{wt}}(\mathbf{k} \sqcup \mathbf{l}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})}\zeta_S^{\text{wt}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \quad (4)$$

を経由する場合である. まずは Kaneko と Zagier がこの式を母関数表示を用いて再定式化し, 対称群  $\mathfrak{S}_r$  の  $\mathbb{Z}$  上の群環  $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_r]$  のある関係式に帰着させ, その関係式を Yasuda が示すことで証明された. この証明については [27] にもう少し詳しく書かれている. また Jarossay はこの等式を KZ 結合子 (原田氏の報告記事 [12] を参照) を用いて証明している [22, Théorème 1.7 i)]. また筆者と Yamamoto は, 注意 2.2.8 で触れた  $\zeta_{S, M}^{\text{wt}}(\mathbf{k})$  がシャッフル関係式を満たすことを, 第 2 節で紹介した有限多重ゼータ値のシャッフル関係式の証明方法と同様の手法で証明した.  $M \rightarrow \infty$  とすると (4) を復元できるので,  $\zeta_{S, M}^{\text{wt}}(\mathbf{k})$  のシャッフル関係式は  $\zeta_S^{\text{wt}}(\mathbf{k})$  のシャッフル関係式の一つの精密化と言える.

$\zeta_S^{\text{wt}}(\mathbf{k})$  のシャッフル関係式 (4) を経由しない証明も知られている. Hirose は  $\zeta_S(\mathbf{k})$  の持ち上げとして,  $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$  という  $\zeta_S^{\text{wt}}(\mathbf{k})$  とは異なる持ち上げを, ある積分で定義される複素数として定義し,  $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$  がシャッフル関係式を満たすことを証明した [13, Theorem 7].  $\zeta_S(\mathbf{k})$  のシャッフル関係式は  $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$  のシャッフル関係式の実部を取ることで得られる. 通常 of 多重ゼータ値のシャッフル関係式が多重ゼータ値の積分表示を用いて証明されたことを思い出すと, Hirose の証明は非常に自然である. ちなみに  $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$  は Bachmann, Takeyama および Tasaka [4] によって定義された  $\xi(\mathbf{k})$  と一致することが示されている [13, Remark 11].

また (4) において  $\mathbf{k} = \emptyset$  とすると,  $\zeta_S^{\text{wt}}$  に対して反転公式が成立する. したがって対称多重ゼータ値に対しても反転公式

$$\zeta_S(\mathbf{l}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{l})}\zeta_S(\bar{\mathbf{l}})$$

が成り立つ.

シャッフル関係式以外にも, 対称多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式で知られているものがある. それらは  $\zeta_A$  (または  $\zeta_A^*$ ) を  $\zeta_S$  (または  $\zeta_S^*$ ) に置き換えただけで全く同じ関係式になってい

る. ただし

$$\zeta_S^*(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} \zeta_S(\mathbf{k}')$$

とした.

和公式は [39, Theorem 1.2], Hoffman 双対関係式は [4, Corollary 2.17] および [22, Corollarie 1.12], 大野型関係式は [50, Remark 1.5] および [14, Theorem 1.12], 導分関係式は [40, Theorem 2.1] で示されている. また論文中で触れられていないが, [53] の有限多重ゼータ値に対する Bowman-Bradley 型定理の証明は代数的なので,  $\zeta_S(\mathbf{k})$  に対しても適用できる. [44], [45], [46] も代数的な手法を用いており, 対称多重ゼータ値に対しても成立する. さらに Theorem 1.3.27 の  $\mathcal{S}$ -類似についても Sakurada によって証明が宣言されている. また筆者と Yamamoto による  $\zeta_S^{\text{III}}(\mathbf{k})$  の級数表示と部分分数分解を駆使することで [23, Proposition 3.4] の  $\mathcal{S}$ -類似を示すことができる.

### 3 課題

この節では考えられる課題を列挙する.

1. 成立すると予想されている等式をいくつか紹介する. 正整数  $k, r$ , 有理数  $n_1, \dots, n_r$  と  $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$  に対し

$$W_k^\bullet(n_1, \dots, n_r) := \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_r = k}} n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r} \zeta_{\mathcal{A}}^\bullet(k_1, \dots, k_r)$$

とおく. このとき次が成り立つであろう [15, Conjecture 9, 10, 11].

- (a)  $W_k^\bullet(1, 1, 2, 3, \dots, r-1, r) \stackrel{?}{=} 0$ .
- (b)  $r$  が奇数なら  $W_k^\bullet(1, 1, 2, 3, \dots, r-1, r) \stackrel{?}{=} 0$ .
- (c) 正整数  $k, r$  および有理数  $a, b$  に対し

$$W_k^\bullet(a, a+b, a+2b, \dots, a+rb) \stackrel{?}{=} W_k^\bullet(b, a+b, a+2b, \dots, a+rb).$$

ちなみに

$$W_k^\bullet(1, \dots, 1, \underset{i}{2}, 1, \dots, 1) = 0 \quad (1 \leq i \leq r), \quad (5)$$

は知られている ([15, Theorem 2 (1.1)], [41, Theorem 1.1]). また (5) は対称多重ゼータ値に対しても成立する [41, Theorem 1.1]. (a)(b)(c) は対称多重ゼータ値に対して成り立つだろうか.

2. 母関数の間の等式として

$$\sum_{r=0}^{\infty} \zeta_{\mathcal{A}}(\{1, 2\}^r) x^r \stackrel{?}{=} \exp \left( \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{\infty} \zeta_{\mathcal{A}}(1, 3n-1) \frac{x^n}{n^2} \right)$$

が予想されている [26, p182]. これは古典的な式

$$1 + \sum_{r=0}^{\infty} \zeta(\{k\}^r) x^r = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(kn)}{n} x^n \right)$$

の  $\mathcal{A}$ -類似 (の  $k = 3$  の場合) である. 対称多重ゼータ値の場合も成り立つだろうか.

3. ([56, Question 5.21])  $t$  多重ゼータ値と呼ばれる概念が Yamamoto によって導入されている [61]. これは多重ゼータ値と多重ゼータスター値を “補間” するもので, 収束インデックスに対し

$$\zeta^t(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} t^{\sigma(\mathbf{k}')} \zeta(\mathbf{k}') \in \mathbb{R}[t]$$

で定義される. 定義から  $\zeta^0(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$ ,  $\zeta^1(\mathbf{k}) = \zeta^*(\mathbf{k})$  である. また例えば  $\zeta^t(k_1, k_2, k_3) = \zeta(k_1, k_2, k_3) + (\zeta(k_1 + k_2, k_3) + \zeta(k_1, k_2 + k_3))t + \zeta(k_1 + k_2 + k_3)t^2$  である. Yamamoto は  $t$  多重ゼータ値に対する和公式を証明している [61, Theorem 1.1]. 一方 Seki は  $t$  有限多重ゼータ値を定義し, 収束インデックスに対する  $t$  有限多重ゼータ値の和公式を証明している. つまり

$$\zeta_{\mathcal{A}}^t(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} t^{\sigma(\mathbf{k}')} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}') \in \mathcal{A}[t]$$

と定義すると,

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,r}} \zeta_{\mathcal{A}}^t(\mathbf{k}) = \left( \sum_{j=0}^{r-1} \left\{ \binom{k-1}{j} + (-1)^r \binom{k-1}{r-1-j} \right\} t^j (1-t)^{r-1-j} \right) Z(k)$$

が成り立つ [56, Proposition 5.20]. これは  $t$  多重ゼータ値の和公式の  $\mathcal{A}$ -類似とみなせるし, 有限多重ゼータ値の  $i = r$  の場合の和公式を補間したものとみなすこともできる. そこで有限多重ゼータ値の和公式を  $1 \leq i \leq r-1$  の場合に補間すると, 右辺はどのような形になるだろうか.  $i = r$  の場合のように (ある程度) 綺麗な形になるだろうか.

4. 有限多重ゼータ値はインデックスの成分が非正の場合でも定義ができたが, 成分が正とは限らないインデックスに対しても対称多重ゼータ値を定義できるように, 対称多重ゼータ値の定義を修正・拡張することはできるだろうか. もしできた場合, [32] や [63] の  $\mathcal{S}$ -類似は成り立つか.
5. 多重ゼータ値の間で成り立っている関係式について,  $\mathcal{A}$ -類似や  $\mathcal{S}$ -類似は存在するか. 例えば結合子関係式 (原田氏の報告記事 [12]) や積分級数等式 (川崎氏の報告記事 [31]), Hirose と Sato による合流関係式 ([16], [9] を参照) の  $\mathcal{A}$ -類似・ $\mathcal{S}$ -類似は存在するか.
6. 具体的に値が書ける有限多重ゼータ値や有限多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式のうち, その  $\mathcal{S}$ -類似は成り立つか. 例えば値については定理 1.3.4, 定理 1.3.5, 線型関係式については定理 1.3.26, [24, Corollary 2.3, Corollary 2.5, Theorem 3.1] の  $\mathcal{S}$ -類似は成立するか.

7. 多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式の族の間には包含関係が知られていることがある. 例えば双対関係式は大野関係式に含まれたり, 正規化複シャッフル関係式は結合子関係式に含まれる, など. 有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値でも類似の包含関係は成り立つか. 特に双対関係式が正規化複シャッフル関係式から導かれるか, という「双対関係式導出問題」は多重ゼータ値の長年の懸案事項であるが, 有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値の場合に, Hoffman 双対関係式に対して類似の包含関係を示すことはできるだろうか.

## 謝辞

素晴らしいサマースクールを企画してくださり, また講演の機会もいただきました世話人の佐久川憲児さん (京都大学), 田坂浩二さん (愛知県立大学), 三柴善範さん (福岡工業大学) に感謝申し上げます. また旅費を援助していただきました古庄英和先生 (名古屋大学) にも感謝申し上げます. レジюмеや報告記事に関して, また打ち合わせ等で数々の有益なコメントをいただきました井原健太郎さん (近畿大学), 大野泰生先生 (東北大学), 金子昌信先生 (九州大学), 佐久川憲児さん, 斎藤新悟さん (九州大学), 関真一郎さん (東北大学), 田坂浩二さん, 中村弥生さん (近畿大学), 広瀬稔さん (九州大学), 三柴善範さん, 山本修司さん (慶應義塾大学) に感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] K. Akagi, M. Hirose and S. Yasuda, Integrality of  $p$ -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values, in preparation.
- [2] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 329–337.
- [3] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, *MI Lecture Note Vol. 23*, (2010).
- [4] H. Bachmann, Y. Takeyama, and K. Tasaka, Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values, *Compositio Mathematica*, Volume **154**, Issue 12 (2018), 2701–2721.
- [5] D. Bowman and D. M. Bradley, The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values, *J. Combin. Theory Ser. A* **97** (2002), no. 1, 43–61.
- [6] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, and P. Lisoněk, Combinatorial aspects of multiple zeta values, *Electronic J. Combinatorics* 5 (1998), R38 (12 pp).

- [7] P. Cartier, On the double zeta values, in Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, H. Nakamura et. al. (eds.), Adv. Studies in Pure Math. **68** Math. Soc. Japan (2012), 91–119.
- [8] P. Deligne and A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 1–56.
- [9] H. Furusho, The pentagon equation and the confluence relations, preprint available at arXiv:1809.00789.
- [10] A. Granville, A decomposition of Riemann’s zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247**, Cambridge (1997), 95–101.
- [11] 原隆, 「実 / 複素ゼータの世界」から「 $p$ 進多重ゼータの世界」へ, 本報告集 (2018).
- [12] 原田遼太郎, KZ 方程式と KZ 結合子, 本報告集 (2018).
- [13] M. Hirose, Double shuffle relations for refined symmetric zeta values, preprint available at arXiv:1807.04747.
- [14] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara and S. Saito, Ohno type relations for classical and finite multiple zeta-star values, preprint available at arXiv:1806.09299.
- [15] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, Weighted sum formula for multiple harmonic sums modulo primes, preprint available at arXiv:1808.00844v1.
- [16] M. Hirose and N. Sato, Iterated integrals on  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$  and a class of relations among multiple zeta values, preprint available at arXiv:1801.03807.
- [17] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.
- [18] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod  $p$  multiple harmonic sums, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.
- [19] Y. Horikawa, H. Murahara and K. Oyama, A note on derivation relations for multiple zeta values and finite multiple zeta values, preprint available at arXiv:1809.08389.
- [20] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.
- [21] D. Jarossay, Indirect computation of  $p$ -adic cyclotomic multiple zeta values, preprint available at arXiv:1501.04893v4.
- [22] D. Jarossay, Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés, C. R. Acad. Sci. Paris, **352** (2014), 767–771.

- [23] K. Kamano, Finite Mordell–Tornheim multiple zeta values, *Funct. Approx. Comment. Math.* **54** (2015), 65–72.
- [24] K. Kamano, Weighted sum formulas for finite multiple zeta values, *Journal of Number Theory* **192** (2018), 168–180.
- [25] 金子昌信, 有限多重ゼータ値 mod  $p$  と多重ゼータ値の関係式, 数理解析研究所講究録 第 **1813** 卷 (2012), 27–31.
- [26] M. Kaneko, Finite multiple zeta values (有限多重ゼータ値), *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **68** (2017), 175–190 (in Japanese).
- [27] M. Kaneko, An introduction to classical and finite multiple zeta values, to appear in *Publications Mathématiques de Besançon*.
- [28] 金子昌信, 多重ゼータ値導入 —定義から正規化まで—, 本報告集 (2018).
- [29] M. Kaneko, K. Oyama and S. Saito, Analogues of the Aoki-Ohno and Le-Murakami relations for finite multiple zeta values, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1–7. doi:10.1017/S0004972718001260.
- [30] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.
- [31] 川崎菜穂, Yamamoto 積分表示と積分級数等式, 本報告集 (2018).
- [32] Y. Komori, Finite multiple zeta values, multiple zeta functions and multiple Bernoulli polynomials, *Kyushu J. Math.* **72** (2018), 333–342.
- [33] H. Kondo, S. Saito and T. Tanaka, The Bowman-Bradley theorem for multiple zeta-star values, *J. Number Theory* **132** (2012), no. 9, 1984–2002.
- [34] M. Kontsevich and D. Zagier, *Periods, Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*. Springer (2001), 771–808.
- [35] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich’s integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology Appl.*, **62** (1995), 193–206.
- [36] Z-h. Li, On a conjecture of Kaneko and Ohno, *Pacific J. Math.* **257** (2012), 419–430.
- [37] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, *Journal of Number Theory* **128** (2008), 2538–2548.
- [38] S. Muneta, A note on evaluations of multiple zeta values, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 931–935.

- [39] H. Murahara, A note on finite real multiple zeta values, *Kyushu J. Math.* **70** (2016), 197–204.
- [40] H. Murahara, Derivation relations for finite multiple zeta values, *Int. J. Number Theory* **13** (2017), 419–427.
- [41] H. Murahara, An algebraic proof of the weighted sum formula for finite and symmetric multiple zeta(-star) values, preprint available at arXiv:1808.01430v2.
- [42] H. Murahara and T. Onozuka, Derivation relation for finite multiple zeta values in  $\widehat{\mathcal{A}}$ , preprint available at arXiv:1809.02752.
- [43] H. Murahara, T. Onozuka and S. Seki, Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values in  $\mathcal{A}_2$ , preprint available at arXiv:1810.10803.
- [44] H. Murahara and T. Murakami, On a generalization of restricted sum formula for multiple zeta values and finite multiple zeta values, preprint available at arXiv:1803.0875.
- [45] H. Murahara and S. Saito, Restricted sum formula for finite multiple and symmetric multiple zeta values, preprint available at arXiv:1801.02772.
- [46] H. Murahara and M. Sakata, On multiple zeta values and finite multiple zeta values of maximal height, *Int. J. Number Theory* **14** (2018), 975–987.
- [47] M. Ono, Finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, *Journal of Number Theory*, Volume **181**, (2017), 99–116.
- [48] M. Ono, New functional equations of finite multiple polylogarithms, to appear in *Tohoku Mathematical Journal*, available at arXiv:1706.09136.
- [49] M. Ono and S. Yamamoto, Shuffle product of finite multiple polylogarithms, *manuscripta mathematica* **152** (2017), 153–166.
- [50] K. Oyama, Ohno-type relation for finite multiple zeta values, *Kyushu J. Math.* **72** (2018), 277–285.
- [51] Kh. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood, and R. Tauraso, New properties of multiple harmonic sums modulo  $p$  and  $p$ -analogues of Leshchiner’s series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 3131–3159.
- [52] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), 1069–1076.

- [53] S. Saito and N. Wakabayashi, Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values, *Tohoku Mathematical Journal* (2) **68** (2016), 241–251.
- [54] K. Sakugawa and S. Seki, On functional equations of finite multiple polylogarithms, *Journal of Algebra* **469** (2017), 323–357.
- [55] S. Seki, The  $p$ -adic duality for the finite star-multiple polylogarithms, to appear in *Tohoku Mathematical Journal*.
- [56] S. Seki, Finite multiple polylogarithms, doctoral dissertation, Osaka University, 2017.
- [57] 関真一郎, 「 $\mathcal{F}$ -有限多重ゼータ値」から「 $\widehat{\mathcal{F}}$ -有限多重ゼータ値」へ: ただし,  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$  or  $\mathcal{S}$ , 本報告集 (2018).
- [58] S. Seki and S. Yamamoto, Ohno-type identities for multiple harmonic sums, preprint available at arXiv:1806.04785.
- [59] T. Tanaka, A simple proof of certain formula for multiple zeta-star values, *J. Algebra Number Theory: Adv. Appl.* **3** (2) (2010), 97–110.
- [60] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.* **149** (2002), 339–369.
- [61] S. Yamamoto, Interpolation of multiple zeta and zeta-star values, *Journal of Algebra* **385**(1) (2013), 102–114.
- [62] S. Yamamoto, Explicit evaluation of certain sums of multiple zeta-star values, *Funct. Approx. Comment. Math.* Volume **49**, Number 2 (2013), 283–289.
- [63] G. Yamashita, On finite multiple zeta values of non-positive weight, preprint.
- [64] S. Yasuda, Finite real multiple zeta values generate the whole space  $Z$ , *Int. J. Number Theory* **12** (2016), 787–812.
- [65] 安田正大, 「 $p$ 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ, 本報告集 (2018).
- [66] D. Zagier, Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$ , *Annals of Math.*, **175** (2012), 977–1000.
- [67] J. Zhao, Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums, *Int. J. Number Theory*, **4-1** (2008), 73–106.

# 「 $p$ 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ

安田 正大

## 1. 記号

### 1.1. インデックス. 正整数の有限列

$$\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r)$$

のことをインデックスという.  $r = 0$  となる場合もインデックスに入れる. その場合の  $\mathbb{k}$  を  $\emptyset$  で表す. インデックスで  $k_r > 1$  をみたすものを収束インデックスという. ただし  $\emptyset$  も収束インデックスとみなす. インデックス全体の集合を  $\mathcal{I}$  で, 収束インデックス全体の集合を  $\mathcal{I}_+$  で表す.

$\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{I}$  のとき,  $r$  を  $\mathbb{k}$  の深さという. また

$$k_1 + \dots + k_r$$

を  $\mathbb{k}$  の重さといい記号  $\text{wt}(\mathbb{k})$  で表す.

### 1.2. 多重ゼータ値 (MZV). $\mathbb{k} \in \mathcal{I}_+$ に対し, 実数 $\zeta(\mathbb{k}) \in \mathbb{R}$ を

$$\zeta(\mathbb{k}) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}.$$

で定める.

### 1.3. 有限多重ゼータ値 (FMZV). $\mathbb{Q}$ 代数

$$\mathcal{A} = \left( \prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) / \left( \bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right)$$

を考える.  $\mathbb{k} \in \mathcal{I}$  に対し, 有限多重ゼータ値  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k}) \in \mathcal{A}$  を

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k}) = \left( \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r < p} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \pmod{p\mathbb{Z}_{(p)}} \right)_p \in \mathcal{A}$$

で定める. ここで, modulo  $p$  する前の

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r < p} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

は有限和なので有理数である. この有理数を  $\zeta^{<p}(\mathbb{k})$  とおく.

## 2. 金子・ZAGIER の予想

$\mathbb{R}$  の部分  $\mathbb{Q}$  線形部分空間

$$Z = \langle \zeta(\mathbb{k}) \mid \mathbb{k} \in \mathcal{I}_+ \rangle_{\mathbb{Q}}$$

を考える. 同様に  $\mathcal{A}$  の  $\mathbb{Q}$  線形部分空間

$$Z_{\mathcal{A}} = \langle \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k}) \mid \mathbb{k} \in \mathcal{I} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

を考える.  $Z$  および  $Z_{\mathcal{A}}$  は積について閉じており, それぞれ  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  の部分  $\mathbb{Q}$  代数となる. 金子・Zagier [KZ] は次を予想した.

予想 2.1.  $\mathbb{Q}$  代数の同型

$$(2.1) \quad Z/\zeta(2)Z \xrightarrow{\cong} Z_{\mathcal{A}}$$

で, 任意の  $\mathbb{k} \in \mathcal{I}_+$  に対し symmetric MZV  $\zeta^{\mathcal{S}}(\mathbb{k})$  を  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k})$  に送るものが存在するであろう.

ここで symmetric MZV  $\zeta^{\mathcal{S}}(\mathbb{k})$  とは,  $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r)$  とすると,

$$(2.2) \quad \zeta^{\mathcal{S}}(\mathbb{k}) = \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta(k_1, \dots, k_i) \zeta(k_r, \dots, k_{i+1})$$

で与えられる実数である.  $k_1, \dots, k_r$  のうちいずれかが 1 であれば, たとえ  $\mathbb{k}$  が収束インデックスであっても (2.2) の右辺に収束しないインデックスが現れるが, そのような場合には級数表示に関する正規化をすることによって (2.2) の右辺に意味を持たせることにする. 積分表示に関する正規化をすることによって (2.2) の右辺に意味を持たせることも可能で, 級数表示による正規化を採用しても積分表示による正規化を採用しても, 任意のインデックス  $\mathbb{k}$  に対し  $\zeta^{\mathcal{S}}(\mathbb{k})$  modulo  $\zeta(2)Z$  の値は変わらず, 予想 2.1 の主張は同値となる.

上の予想 2.1 については, 重さを固定した version も考えることもできる. つまり任意の整数  $k \geq 0$  に対し,

$$Z_k = \langle \zeta(\mathbb{k}) \mid \mathbb{k} \in \mathcal{I}_+, \text{wt}(\mathbb{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}}$$

を考える. 同様に  $\mathcal{A}$  の  $\mathbb{Q}$  線形部分空間

$$Z_{\mathcal{A},k} = \langle \zeta(\mathbb{k}) \mid \mathbb{k} \in \mathcal{I}, \text{wt}(\mathbb{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}}$$

とおくとき (ただし  $k < 0$  のときは  $Z_k, Z_{\mathcal{A},k}$  はいずれも 0 と約束する),  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間の同型

$$(2.3) \quad Z_k/\zeta(2)Z_{k-2} \xrightarrow{\cong} Z_{\mathcal{A},k}$$

で, 任意の  $\mathbb{k} \in \mathcal{I}_+$ ,  $\text{wt}(\mathbb{k}) = k$  に対し symmetric MZV  $\zeta^{\mathcal{S}}(\mathbb{k})$  を  $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k})$  に送るものが存在するであろう, というのが, 重さを固定した version の金子・Zagier の予想である.

$1/(1-t^2-t^3)$  を  $t$  についての整数係数の形式べき級数に展開したときの  $t^k$  の係数を  $d_k$  とおく (ただし  $k < 0$  のときは  $d_k = 0$  と約束する).  $Z_k$  の次元は  $d_k$  に等しいと Zagier [Z] によって予想されている. そのため, 重さを固定した version の金子・Zagier の予想から次の予想が派生する:

予想 2.2. 任意の整数  $k$  に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} Z_{A,k} = d_k - d_{k-2}$$

が成り立つであろう.

本稿の目標は, 上の予想 2.2 の等式において不等号  $\leq$  が成り立つという, 筆者と赤木和真, 広瀬稔との共同研究の結果 [AHY] について概説することである. 証明の技術的細部を解説することよりも, この問題を考えるに至った経緯や, 結果を得るまでの試行錯誤に重点を置いて説明をする. 最終的に得られた結果やその証明は理路整然としているが, そこに至る途中過程には間違った考察や根拠のない信念に溢れていることを楽しんでいただけましたら幸いです.

実際には [AHY] では, 単に 2.2 の等式において不等号  $\leq$  が成り立つということよりも強く, 金子・Zagier の予想やその重さを固定した version において, 定義域の空間  $Z, Z_k$  をその motivic 版に取り換えると  $\mathbb{Q}$  代数あるいは  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間の全射が作れる, ということを示している.

### 3. 井原健太郎氏

筆者が [AHY] の結果を得るに至るまでの間, 予想 2.1 の提唱者のひとりである金子昌信先生にはいろいろな局面で大変お世話になりましたが, それと同じくらい井原健太郎氏にも大変お世話になりました.

そもそも筆者が金子・Zagier の予想について知ったのは, 井原さんを通じてである. 2013 年の夏, 京大数理研で MZV 関係の研究集会があり, そこで金子先生が予想 2.1 を提唱した. 私はその集会に参加しておらず, 井原氏の自宅に押しかけ, 井原さんから集会のノートを見せてもらってこの予想の詳細を知った.

当時, 筆者と井原氏は同じ研究機関に所属しており, 私は井原氏の研究室を時々訪れていた. その頃井原氏は外国人の留学生に数学を教える仕事をしており, 氏が学生に人気があるのか, 日本人の学生に比べて留学生が積極的だからかはわからないが, 井原氏の研究室には大抵いつも学生が質問に訪れていた. 井原氏はにこやかに学生との応対を楽しんでいたが, 筆者はこのようなことで時間を使っているのは研究する時間が十分確保できないのではないかと井原氏のことが心配だった. 井原さんが研究センターの生活が送れるように, 将来の研究に結びつくかもしれないような数学上の話題を何か提供できないかと思っているところだった.

筆者はその当時それほど MZV の研究を表立ってはしていなかったが, 興味を持って勉強はしていた. 誰でも思いつきそうなことであるが, 金子・Zagier の予想を知ってすぐ,  $p$  進 MZV と FMZV を結びつけばよいのではないかと考えた. 筆者は  $p$  進についてはある程度知識があり, 井原氏のご存じのとおり MZV の専門家である. 筆者と井原氏の持つ知識をうまく融合すれば勝算がある. 金子・Zagier の予想に 2 人で取り組むというのは見込みのあるよいプロジェクトであると思った.

4.  $p$  進 MZV を計算してみる

そこでまず、 $p$  進 MZV と FMZV をどのようにを結びつけたらよいのかを考えることにした。そのために、 $p$  進 MZV と FMZV がどのように結びついているべきかを考えてみる。金子・Zagier の予想を念頭に置くと、だいたい、「symmetric  $p$  進 MZV  $\in \mathbb{Q}_p$ 」を「modulo  $p$ 」すると FMV の  $p$ -part に等しい、といった現象が期待できそうである。

上の期待される現象は「」でくくった箇所があることからわかるように、まだ記述にあいまいな点が多い。たとえば、 $p$  進 MZV には古庄 [F1] の導入した  $\zeta_p(\mathbb{k})$  と Deligne の導入した  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  とがあり、どちらを用いるべきかははっきりしないし、「modulo  $p$ 」する、といっても、そもそもこれらの  $p$  進 MZV が  $\mathbb{Q}_p$  の整数環  $\mathbb{Z}_p$  に属しているかどうか（当時は）知られていない、という明らかな問題があった。

文献を調べてみたが、 $p$  進 MZV は、depth が大きいときはほとんど計算されておらず、既存の計算結果を見て、期待すべき現象をこれ以上ははっきりさせるのが難しそうだった。そこでまず、計算機を使ってもよいから  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を計算する方法を開発し、実例をたくさん調べることによって期待すべき主張を明確にすることから始めることにした。

当時、他の研究課題を抱えていたこともあって、 $\zeta_p(\mathbb{k})$  を計算するアルゴリズムを開発するのに数か月かかったが、2014 年の初めごろには  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を PARI/GP で計算させるプログラムができあがった。

プログラムが完成するのは 2014 年の初めころであるが、その少し前の 2013 年の秋ごろに理論的には計算アルゴリズムが求まり、2013 年の 11 月にはプログラムもある程度書きあがり  $\zeta_p(\mathbb{k})$  の計算データが少しずつたまっていった。

$\zeta_p(\mathbb{k})$  の計算データが少し増えるたびに、データを印刷した用紙を持って井原さんの研究室を訪れ、井原氏に法則を探させる、という日々が続いた。井原氏にはこやかに用紙を眺めてくれた。つまらない下請け作業をさせ、氏に大変迷惑をかけたことを反省している。

当時  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を計算するために採用した方法について、概要をここに簡単に説明しておく。インデックス  $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{I}$  に対し、多重ポリログとよばれる有理数係数のべき級数

$$\text{Li}_{\mathbb{k}}(t) = \sum_{0 < n_1 \dots < n_r} \frac{t^{n_r}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \in \mathbb{Q}[[t]]$$

を考える。但し  $\mathbb{k} = \emptyset$  のときは  $\text{Li}_{\emptyset}(t) = 1$  と約束する。 $\mathbb{k} \in \mathcal{I}_+$  が収束インデックスのとき  $\text{Li}_{\mathbb{k}}(1)$  は  $\mathbb{R}$  において  $\zeta(\mathbb{k})$  に収束するが、たとえ  $\mathbb{k} \in \mathcal{I}_+$  であっても  $\mathbb{k} \neq \emptyset$  ならば  $\text{Li}_{\mathbb{k}}(1)$  は  $\mathbb{Q}_p$  においては収束しない。この困難を克服するために Frobenius の持ち上げ

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{(1-t)^p + t^p}$$

を用いる。 $\varphi(t)$  を  $t$  についての形式べき級数とみなす。 $(\varphi(t))$  の代わりに、より素直な Frobenius の持ち上げ  $t^p$  を用いても  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を計算できるが、解析接続のようなことをしないといけなくなるため、計算の原理

を説明する際の記述が以下のように簡単にはならない。) さらに  $\mathbb{Q}_p$  係数の過収束べき級数のなす環

$$\mathbb{Q}_p[[t]]^\dagger = \{f \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid \exists r > 1, f \text{ が } |t| < r \text{ で } p \text{ 進的に収束する}\}$$

を導入する. ここで「 $f$  が  $|t| < r$  で  $p$  進的に収束する」という条件は,  $\mathbb{Q}_p$  の元の  $p$  進絶対値を  $|\cdot|_p$  で表わすと, 正確には次を意味する:

- $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  とおくと,  $0 < r' < r$  をみたす任意の実数  $r'$  に対し,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $|a_n|_p \cdot r'^n$  が  $0$  に収束する.

整数  $k \geq 0$  に対し, 重さが  $k$  より小さいインデックス全体の集合を  $\mathcal{I}_{<k}$  とおく. このとき, Coleman 積分の一般論より次が分かる:

- $\mathbb{Q}_p[[t]]$  の元の族  $(\text{Li}_{\mathbb{k}}(t))_{\mathbb{k} \in \mathcal{I}}$  は  $\mathbb{Q}_p[[t]]^\dagger$  上線形独立である.
- 任意のインデックス  $\mathbb{k}$  に対し, 差

$$\text{Li}_{\mathbb{k}}(\varphi(t)) - p^{\text{wt}(\mathbb{k})} \text{Li}_{\mathbb{k}}(t)$$

は部分族  $(\text{Li}_{\mathbb{k}'}(t))_{\mathbb{k}' \in \mathcal{I}_{<\text{wt}(\mathbb{k})}}$  の生成する  $\mathbb{Q}_p[[t]]$  の部分  $\mathbb{Q}_p[[t]]^\dagger$  加群に属する.

これより,

$$\text{Li}_{\mathbb{k}}(\varphi(t)) = p^{\text{wt}(\mathbb{k})} \text{Li}_{\mathbb{k}}(t) + \sum_{\mathbb{k}' \in \mathcal{I}_{<\text{wt}(\mathbb{k})}} h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(t) \text{Li}_{\mathbb{k}'}(t)$$

をみたす  $h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]]^\dagger$  が一意的に存在する. この  $h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(t)$  を形式的な反復積分を用いて具体的に記述することも可能である.  $h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]]^\dagger$  であるから,  $h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(1)$  は  $\mathbb{Q}_p$  において収束する点が重要である. ちなみに, より強く  $h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(t)$  が「 $|t| < p^{1/(p-1)}$  で  $p$  進的に収束する」こともわかる.

このとき,  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p(\mathbb{k})$  は

$$\zeta_p(\mathbb{k}) = p^{\text{wt}(\mathbb{k})} \zeta_p(\mathbb{k}) + \sum_{\mathbb{k}' \in \mathcal{I}_{<\text{wt}(\mathbb{k})}} h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(1) \zeta_p(\mathbb{k}')$$

を満たし, これを用いて  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を  $\text{wt}(\mathbb{k})$  について帰納的に計算することができる. また, Deligne の  $p$  進 MZV もこの  $h_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}(1)$  を用いて計算することができ, 具体的には  $p^{-\text{wt}(\mathbb{k})} h_{\mathbb{k}, \emptyset}(1)$  が antipode を施した  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  に等しい.

計算のデータを見てみると,  $\zeta_p(\mathbb{k})$  は,  $p > \text{wt}(\mathbb{k})$  のとき  $p^{\text{wt}(\mathbb{k})} \mathbb{Z}_p$  に属しているようだった. だとすると特に  $\mathbb{k}$  を固定して  $p$  を動かすと, 有限個の  $p$  を除いて  $\zeta_p(\mathbb{k})$  は  $p^{\text{wt}(\mathbb{k})} \mathbb{Z}_p$  に属することになる.

さらに  $p > \text{wt}(\mathbb{k})$  のとき, 数値的には

$$(\heartsuit): \frac{1}{p^{\text{wt}(\mathbb{k})}} \zeta_p(\mathbb{k}) \text{ に antipode を施してから modulo } p \text{ すると } \zeta^{<p}(\mathbb{k}) \text{ になる}$$

ようだった. ちなみに  $\mathbb{k}$  weight が 7 以下だと, antipode を施す操作と  $(-1)^{\text{wt}(\mathbb{k})}$  倍する操作は一致してしまう. そのため現象の記述に本当に antipode を使う必要があるかどうかを見極めるために weight 8 まで  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を計算する必要があった. 筆者が考案した  $\zeta^{<p}(\mathbb{k})$  の計算アルゴリズムは途中でストックするデータの量が多いものであったため, 計

算途中でメモリが一杯にならないようにプログラムの書き方を工夫するところが一番苦労したところである。

ちなみに、上の主張 (♡) と同値な主張を Deligne の  $p$  進 MZV を用いて述べることもでき、その場合は  $p > \text{wt}(\mathbb{k})$  のとき

$$(\heartsuit): \zeta_p^{\text{De}, S}(\mathbb{k}) \text{ を mod. } p \text{ すると } \zeta^{<p}(\mathbb{k}) \text{ になる,}$$

という主張になる。Deligne の  $p$  進 MZV を用いると、現象の説明中に antipode が現れず、また  $\frac{1}{p^{\text{wt}(\mathbb{k})}}$  をする必要もなくなる。

どのような現象が期待されるかについては、2013 年の 11 月ごろにははっきり分かるようになったが、どのように証明すればよいかについては全く謎のままだった。例えば「 $\zeta_p(\mathbb{k})$  は、 $p > \text{wt}(\mathbb{k})$  のとき  $p^{\text{wt}(\mathbb{k})}\mathbb{Z}_p$  に属する」という現象ですら、筆者の用いた  $\zeta_p(\mathbb{k})$  を計算するアルゴリズムからは全く明らかでなかった。ましてや  $\zeta_p^{\text{De}, S}(\mathbb{k})$  がどうなるかなど、あまりに複雑すぎて考察する気も起きない。

また、先ほど  $\zeta_p(\mathbb{k})$  は、 $p > \text{wt}(\mathbb{k})$  のとき  $p^{\text{wt}(\mathbb{k})}\mathbb{Z}_p$  に属しているようだったと述べたが、 $p \leq \text{wt}(\mathbb{k})$  のときにもデータをよく観察すると、

$$(\star): \zeta_p(\mathbb{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbb{k})]}$$

も成り立っているようだった。ただし  $k \geq 0$  を整数とするとき

$$(p\mathbb{Z}_p)^{[k]} = \left\langle \frac{p^m}{m!} \mid m \geq k \right\rangle_{\mathbb{Z}_p}$$

であり、 $p\mathbb{Z}_p$  の第  $k$  PD ideal という。PD ideal というものに馴染みのない方もいるかもしれないが、 $p$  進の世界ではしばしば現れるものである。

ちょうど 2013 年の 11 月に、 $p$  進の現象に詳しい東京大学の志甫淳氏が筆者の所属する研究機関に集中講義に来ていたので、この現象について志甫氏に相談しようと思い、どのように話しかけようかと考えているうちに、

(\*) : Frobenius と Hodge フィルトレーションとの関係

から formal に従う、という筋書きを思いついた。志甫氏が集中講義に来なければ (\*) のような方向性については全く考えなかったかもしれない。

筆者は当時、MZV とは無関係の研究もやっていた、むしろ無関係の研究のほうが中心であった。そのこともあってか、(\*) についてすぐに詳しく調べようとせずしばらく放置していた。その後どうしても (\*) のようなことを示さなければいけなくなり Mazur の論文 [M] を少し勉強したら、(\*) についての詳しい方針がわかり、(\*) が証明できた。

しかし (\*) を示しただけでは、元の問題、つまり予想 2.2 の等号を  $\leq$  に置き換えた不等式の解決につながる現象 (♡) あるいは (♡') を示すには程遠い。

(♡) をなかなか示せない困難はどこにあるのかについて、自分なりに考えてみて、困難は (♡) が modulo  $p$  した後どうなるかについての主張であることにあると思うようになった。計算機の産み出す数値のデータを見て、証明の方針につながる法則性を発見しようとしても、有限体の

値のデータの場合、ストーリーをこじつける方法がありすぎて、正しい方向性を見出しづらい。そのため、(♡) よりも強い modulo  $p$  しなくても成り立ちそうな現象をうまく見出せば方針の可能性を狭めることができ、証明の方向性を見出しやすくなるであろうと漠然と考えていた。

ちょうどそのころ、当時面識もなかった広瀬稔氏から突然のメールを受け取った。Depth 2 の  $p$  進 MZV  $\zeta_p(k_1, k_2)$  を計算する方法を考案したという内容だった。

広瀬氏の見出した式を使うと、depth 2 のときは確かに (♡) が証明できる。広瀬氏の式を書き直すと、

$$(4.1) \quad \zeta^{<p}(k_1, k_2) = (\zeta_p^{\text{De}} \text{ たちの収束する無限和})$$

と書けていた。この形から depth 2 の場合に (♡) は簡単に証明できる。Depth 一般の場合に式 (4.1) を一般化はないのか？

一般の depth でも、modulo  $p^2$  で一致する式がまず見つかる。modulo  $p^3, \dots$  と少しずつ改良するが、しばらく行き詰まる。 $\zeta_p^{\text{De}}$  の計算プログラムに誤りが見つかり、修正してからはすぐにどのように一般化すればよいのか、予想すべき公式がわかった。それが以下のものである。筆者は以下の式を赤木和真、広瀬稔との共同研究で見つかった予想式として 2014 年 8 月に福岡での研究集会で発表し、その後 Jarossay によって証明が与えられた。

**定理 4.1** (Jarossay).

$$\zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(\mathbb{k}) = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_r \geq 0} p^{\ell_1 + \dots + \ell_r} \frac{(k_1)_{\ell_1} \cdots (k_r)_{\ell_r}}{\ell_1! \cdots \ell_r!} \zeta_p^{\text{De}}(k_1 + \ell_1, \dots, k_r + \ell_r)$$

とおくと等式

$$(4.2) \quad \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(k_r, \dots, k_{i+1}) \zeta_p^{\text{De}}(k_1, \dots, k_i) = \zeta^{<p}(\mathbb{k})$$

が成り立つ。

上の等式の大事なところは modulo  $p$  せずに成立する式であるという点である。 $\zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(\mathbb{k})$  の式が  $p$  進的に収束することを示すのに (\*) が必要だった。

$\zeta_p^{\text{De}, \downarrow}$  の定義は複雑だが、以下の 2 つの別の見方がある：

- (1)  $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対応する文字列を  $w = e_1 e_0^{k_1-1} \cdots e_1 e_0^{k_r-1}$  とすると、

$$\zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(\mathbb{k}) = \sum_{\ell \geq 0} (-p)^\ell \zeta_p^{\text{De}}(e_0^\ell w)$$

が成り立つ。

- (2)  $\zeta_p^{\text{De}}$  が

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

のようなものだとすると,  $\zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(\mathbb{k})$  は

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{(n_1 - p)^{k_1} \dots (n_r - p)^{k_r}}$$

のようなものである.

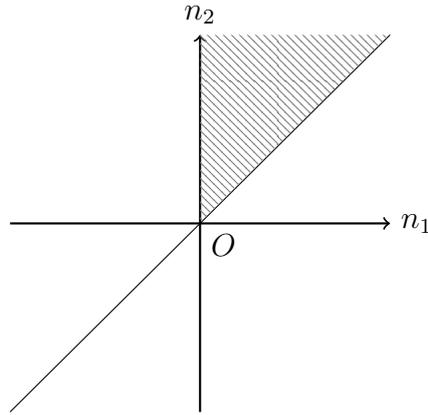
(4.2) の Jarossay [J] による証明には (1) の見方を用いる. 証明は [F2] に現れる等式

$$G_0^\dagger(A/p, \Phi_{\text{De}}^{-1}B/p\Phi^{\text{De}})(t^p) = G_0(t^p)$$

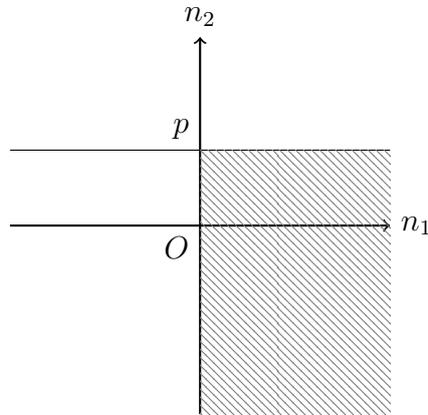
の両辺の  $t^p$  の係数を比較することによってなされる.

一方, (2) の見方が予想式を思いつく際には役に立った. Depth 2 のときに説明する.

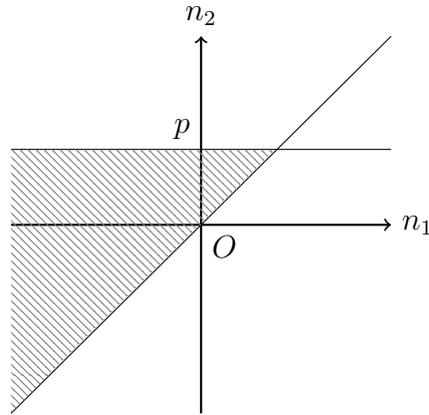
$\zeta_p^{\text{De}}(k_1, k_2)$  は図



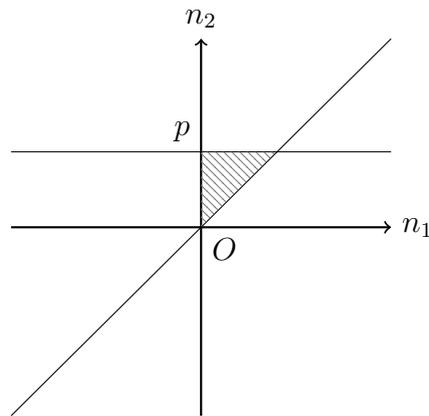
の斜線部分 (境界を含まない) に属する  $(n_1, n_2)$  について  $\frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}}$  の和をとったようなものであり,  $(-1)^{k_2} \zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(k_2) \zeta_p^{\text{De}}(k_1)$  は図



の斜線部分に属する  $(n_1, n_2)$  について  $\frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}}$  の和をとったようなものであり,  $(-1)^{k_1+k_2} \zeta_p^{\text{De}, \downarrow}(k_2, k_1)$  は図



の斜線部分に属する  $(n_1, n_2)$  について  $\frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}}$  の和をとったようなものであるから、これらを足し合わせると、図



の斜線部分に属する  $(n_1, n_2)$  についての和になると辻褄が合うが、実際にはそうならない。

図の辻褄が合うようにすると、示したい式 (4.2) とは少し違う式と対応する。

図の辻褄が合うが実際の数値計算結果と合致しない式から出発し、辻褄が合わなくてもよいので実際の数値計算結果と合致するような方向に少しずつ式を修正することにより、予想式 (4.2) にたどり着いた。

4.1. 背景. Riemann zeta 関数や多重 zeta 関数などが解析接続可能であることを示す Landau の方法と呼ばれる方法がある。簡単に説明すると、

$$Z(s) = \zeta(s) - 1 = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^s}$$

とおくと,  $\zeta(s) = 1 + Z(s)$  である.

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)^s} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\binom{s}{k}}{k!} Z(s+k)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k \geq 1} \frac{\binom{s}{k}}{k!} Z(s+k) \\ &= sZ(s+1) + \frac{s(s+1)}{2} Z(s+2) + \frac{s(s+1)(s+2)}{6} Z(s+3) + \dots\end{aligned}$$

となる. これより,  $sZ(s+1)$  は複素平面全体で正則な関数に解析接続され, 負の整数での値が有理数となることがわかる.

同様の議論を Riemann のゼータ関数から  $p$  での Euler 因子を除いて得られる関数

$$\zeta_{(p)}(s) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p \nmid n}} \frac{1}{n^s}$$

対して行う.

$$Z_{(p)}(s) = \sum_{\substack{n \geq p+1 \\ p \nmid n}} \frac{1}{n^s}$$

とおくと,

$$\zeta_{(p)}(s) = \sum_{1 \leq n \leq p-1} \frac{1}{n^s} + Z_{(p)}(s)$$

となる.

$$\begin{aligned}\zeta_{(p)}(s) &= \sum_{\substack{n \geq p+1 \\ p \nmid n}} \frac{1}{(n-p)^s} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\binom{s}{k}}{k!} p^k Z_{(p)}(s+k)\end{aligned}$$

より

$$\sum_{1 \leq n \leq p-1} \frac{1}{n^s} = \sum_{k \geq 1} \frac{\binom{s}{k}}{k!} p^k Z_{(p)}(s+k)$$

が成り立つ. 特殊値の  $p$  進展開  $p$  での Euler 因子を戻すことによって, depth 1 のときの  $\zeta(k)$  の計算もできる.

$p$  進多重ゼータ値についても上と同様の議論ができると信じていたので, (4.2) のようなタイプの等式が存在するはずだと根拠なく確信していた. そのため数値的にうまく合わなくても試行錯誤をあきらめずに予想の式 (4.2) を見つけることができた.

また公式 (4.2), (\*), 拡張複シャッフル関係式 (EDS) および  $\zeta^{\text{De}}(\emptyset) = 1$  から  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  たちは一意的に決まることを示すこともできる.

## 5. 整数性

**定理 5.1** (赤木・広瀬・Y [AHY], Chatzistamatiou [C]).  $\zeta_p(\mathbb{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbb{k})]}$

この定理の帰結として,  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k}) \in \frac{1}{p^{\text{wt}(\mathbb{k})}}(p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbb{k})]}$  が分かる. 数値計算によると,  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  は必ずしも  $\mathbb{Z}_p$  に属するとは限らない.

定理 5.1 より

$$\langle \zeta_p(\mathbb{k}) \mid \text{wt}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} \rangle_{\mathbb{Z}_p} \subset (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が分かるがこの包含がいつ等号になるかという疑問がわく.

等号が成立しない例として,  $k = 1, 2, 4$  の場合がある. この場合は  $\langle \zeta_p(\mathbb{k}) \mid \text{wt}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} \rangle_{\mathbb{Z}_p} = 0$  となるので等号が成立しない.

また,  $p = 2$  のとき

$$(2\mathbb{Z}_2)^{[k]} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{if } k = 0, \\ 2\mathbb{Z}_2, & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$

となる.  $k$  が 3 以上の奇数であれば,  $\zeta_p(3, 2, \dots, 2) \equiv 2 \pmod{4\mathbb{Z}_2}$  となることがわかるので上式において等号が成立する.

数値実験の結果は次を示唆している

$$\langle \zeta_p(\mathbb{k}) \mid \text{wt}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} \rangle_{\mathbb{Z}_p} \subsetneq (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

となるのは  $k$  が 2 のべきのときであり, またそのときに限る.

数値実験で  $k \leq 16$  に対してはこのことを確かめた.  $k = 16$  の時に数値実験をするために, (自費で) 新しい PC を購入した. それでも計算には 2, 3 日かかった.

## 6. 定理 5.1 の証明について

定理 5.1 の証明はテクニカルだが, 素直な思想に基づいている. 以下その思想について説明する.

ふつうの MZV の反復積分表示

$$\zeta(\mathbb{k}) = \int_0^1 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k$$

を思い出そう. ただし右辺は  $\omega_1$  を最初に積分して, 最後に  $\omega_k$  をかけて積分する反復積分を表す. また  $\mathbb{k}$  に対応する文字列  $w = e_1 e_0^{k_1-1} \cdots e_1 e_0^{k_r-1}$  を  $w = w_1 \cdots w_k$  とするとき,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t}, & \text{if } w_i = e_0, \\ \frac{dt}{1-t}, & \text{if } w_i = e_1 \end{cases}$$

とおいた. これはとある  $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの周期と解釈できる. より詳しく言うと,  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$  からバー構成の思想を用いて具体的に作ることでできる混合 Tate モチーフ  $M = M_k$  で, 標準的な同型  $\omega_B(M_k) \cong \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}, 0_1, 1_0)]/I^{k+1}$  を持つものがある.

上の同型で 0 から 1 までの straight path の class に対応する  $\omega_B(M_k)$  の元を  $\gamma_0$  と書くことにする.

また  $\omega_{\text{dR}}(M_k^\vee)$  は標準的に  $\bigoplus_{i=0}^k H_{\text{dR}}^1(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}/\mathbb{Q})^{\otimes i}$  と同型であり, この同型で  $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k$  に対応する  $\omega_{\text{dR}}(M_k^\vee)$  の元を  $f_{\mathbf{k}}$  と書くことにする.

このとき合成

$$\omega_B(M_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{comp}} \omega_{\text{dR}}(M_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{f_{\mathbf{k}} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$$

による  $\gamma_0 \otimes 1$  の行き先が  $\zeta(\mathbb{k})$  に等しい.

2 種類の  $p$  進 MZV  $\zeta_p(\mathbb{k})$ ,  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  についても, 上の枠組みを用いた同様の解釈が可能である. 上と同じ  $M_k$  と  $f_{\mathbf{k}}$  を用いる.  $\omega_{\text{crys}}(M_k) = \omega_{\text{dR}}(M_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$  とおく. モチーフの思想から,  $\omega_{\text{crys}}(M_k)$  上に crystalline Frobenius という  $\mathbb{Q}_p$  線形作用素  $\varphi$  があるはずであり, 実際に  $\varphi$  を構成することができる. この  $\varphi$  を用いて  $\zeta_p(\mathbb{k})$  および  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  は, それぞれ次の (1), (2) のように解釈できる.

- (1)  $\varphi$  不変部分  $\omega_{\text{crys}}(M_k)^{\varphi=1}$  は  $\mathbb{Q}_p$  上 1 次元であり, その基底  $\gamma_p$  として標準的なものが取れる.

このとき合成写像

$$\omega_{\text{crys}}(M_k) \xrightarrow{\cong} \omega_{\text{dR}}(M_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{f_{\mathbf{k}} \otimes \text{id}} \mathbb{Q}_p$$

による  $\gamma_p$  の行き先が  $\zeta_p(\mathbb{k})$  に等しい.

- (2) また  $\omega_{\text{dR}}(M_k^\vee)$  は標準的に  $\bigoplus_{i=0}^k H_{\text{dR}}^1(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}/\mathbb{Q})^{\otimes i}$  と同型であったので, その双対  $\omega_{\text{dR}}(M_k)$  も次数付きベクトル空間であり, その degree 0 の部分は 1 次元であり, やはり標準的な基底  $e_0$  を持つ. このとき合成写像

$$\begin{array}{ccc} \omega_{\text{crys}}(M_k) & \xrightarrow{\varphi} & \omega_{\text{crys}}(M_k) \\ \uparrow = & & \downarrow = \\ \omega_{\text{dR}}(M_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p & & \omega_{\text{dR}}(M_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{f_{\mathbf{k}} \otimes \text{id}} \mathbb{Q}_p \end{array}$$

による  $e_0 \otimes 1$  の行き先が  $p^{\text{wt}(\mathbf{k})} \zeta_p^{\text{De}}(\mathbb{k})$  に等しい.

$(f_{\mathbf{k}})_{\text{wt}(\mathbf{k}) \leq k}$  は  $\omega_{\text{dR}}(M_k^\vee)$  の基底をなす.  $\mathbb{Z}_p$ -lattice  $H_{\mathbb{Z}_p} \subset \omega_{\text{dR}}(M_k^\vee)$  を

$$H_{\mathbb{Z}_p} = \langle f_{\mathbf{k}} \mid \text{wt}(\mathbf{k}) \leq k \rangle_{\mathbb{Z}_p} \subset \omega_{\text{dR}}(M_k^\vee) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$$

で定める. このとき Frobenius と Hodge フィルトレーションとの関係から  $\varphi^* f_{\mathbf{k}} \in (p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbf{k})]} H_{\mathbb{Z}_p}$  が成り立つ. このことから定理 5.1 が従う.

## 7. FMZV の次元の上からの評価

(1) または (2) を用いて FMZV の次元を上から評価することができる.  $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏は用いるが, motivic MZV は必ずしも持ち出す必要はない. 但し持ち出すと  $\zeta_p(\mathbb{k})$  が結合子関係式などのいろいろな関係式をみたすことが言える.

## 8. 今後の課題

(1), (2) と類似の枠組みと山下 [Y] の比較関手を用いて, 環

$$\bigoplus_{n \geq 0} (B_{\text{crys}} \cap \text{Fil}^0 B_{\text{dR}})^{\varphi=p^n}$$

(この環は  $\mathbb{Q}_p$  代数として, 定数項が  $\mathbb{Q}_p$  に入るような 1 変数多項式  $f(X) \in \mathbb{C}_p[X]$  全体のなす  $\mathbb{Q}_p$  代数と同型である) に値をもつ  $p$  進 MZV も標準的に考えることができる.

この環に値をもつ  $p$  進 MZV のなす  $\mathbb{Q}$  代数あるいは  $\mathbb{Q}_p$  代数について, 次元の下からの評価を与えることを試みるのは興味深い問題であるように思う.

## 9. 謝辞

講演の機会を与えてくださいました整数論サマースクールの主催者の皆様に感謝いたします. 原稿の内容について有益なコメントを下さいました佐久川憲児さん, 古庄英和さんに感謝いたします.

## REFERENCES

- [AHY] K. Akagi, M. Hirose, S. Yasuda, *Integrality of  $p$ -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*. In preparation.
- [C] A. Chatzistamatiou, *On integrality of  $p$ -adic iterated integrals*. J. of Algebra 474, 240–270 (2017)
- [F1] H. Furusho,  *$p$ -adic multiple zeta values I.  $p$ -adic multiple polylogarithms and the  $p$ -adic KZ equation*. Invent. Math. **155**, 253–286 (2004)
- [F2] H. Furusho,  *$p$ -adic multiple zeta values II. Tannakian interpretations*. Amer. J. Math. **129**, no. 4, 1105–1144 (2007)
- [J] D. Jarossay, *Indirect computation of  $p$ -adic cyclotomic multiple zeta values*. Preprint, arXiv:1501.04893 (2015)
- [M] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration*. Bull. Amer. Math. Soc. **78**, 653–667 (1972)
- [KZ] M. Kaneko, D. Zagier, *Finite multiple zeta values*. In preparation.
- [Y] G. Yamashita, *Bounds for the dimensions of  $p$ -adic multiple  $L$ -value spaces*. Documenta Math. Extra Vol. Suslin, 687–723 (2010)
- [Z] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*. In: First European Congress of Mathematics, Vol. II, 497–512. Birkhäuser, Boston, MA (1994)

# 「 $\mathcal{F}$ -有限多重ゼータ値」から「 $\widehat{\mathcal{F}}$ -有限多重ゼータ値」へ： ただし、 $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$

関 真一郎

## 目次

1	はじめに	1
2	$p$ 進有限多重ゼータ値	1
2.1	$p$ 進数環	1
2.2	$p$ -記法	2
2.3	$\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値	2
2.4	$p$ 進関係式	3
2.5	次元予想	4
3	一般化対称多重ゼータ値	5
3.1	定義	5
3.2	特殊値・関係式について	6
3.3	Kaneko-Zagier 予想の精密化	7

## 1 はじめに

小野の報告記事 [14] で定義された  $\mathcal{A}$ -有限多重ゼータ値は  $\text{mod } p$ -多重調和和 (記号は [14, 1.1] を使用する) を集めてアデールのな環の元とみたものであった. しかしながら, Wolstenholme の定理 [26]

$$\zeta_{<p}(1) \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (p \geq 5)$$

のような現象も昔から観察されているため,  $\text{mod } p^n$  版有限多重ゼータ値を考えてみたくなる. 本稿では, 更に  $n \rightarrow \infty$  なる極限をとって  $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値を導入する.

また, [14] では  $\mathcal{A}$ -有限多重ゼータ値が古典的多重ゼータ値を使って定義される対称多重ゼータ値と全く同じ振る舞いをするという Kaneko-Zagier 予想が紹介された. このような対応を  $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値でも考えるためには対称多重ゼータ値をどのように精密化すればよいのだろうか? 後半でその精密化について考察する.

## 2 $p$ 進有限多重ゼータ値

### 2.1 $p$ 進数環

正整数  $n$  に対して,  $\mathcal{A}_n$  を

$$\mathcal{A}_n := \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

と定義する.  $\mathcal{A}_n$  に離散位相を入れ,  $\widehat{\mathcal{A}} := \varprojlim_n \mathcal{A}_n$  とする. 自然な全射  $\pi: \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$  があり<sup>1</sup>,  $\mathbf{p} := \pi((p)_p)$  を無限大素数とよぶ. 自然な全射  $\rho_n: \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_n$  は同型  $\widehat{\mathcal{A}}/\mathbf{p}^n \widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{A}_n$  を誘導し,  $\widehat{\mathcal{A}}$  の位相は完備な  $\mathbf{p}$  進位相になっていることがわかる. 詳細については [20, §2] を参照せよ.

## 2.2 $\mathbf{p}$ -記法

有限個の例外を除く素数  $p$  に対して  $a_p \in \mathbb{Z}_p$  が与えられているとき, 例外素数については適当な値 (例えば 0) を割り振って,  $a_{\mathbf{p}} := \pi((a_p)_p) \in \widehat{\mathcal{A}}$  という記法を用いる. 記号の乱用で, 文脈判断できる場合は,  $\rho_n(a_{\mathbf{p}})$  のことも  $a_{\mathbf{p}}$  と書く. 例えば, [14, 定理 1.3.2] に現れた  $Z(k)$  は  $\frac{B_{p-k}}{k}$  と表現できる.

## 2.3 $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値

定義 2.3.1. インデックス  $\mathbf{k}$  に対して,  $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ (スター) 値を

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) := \zeta_{<\mathbf{p}}(\mathbf{k}), \quad \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{k}) := \zeta_{<\mathbf{p}}^*(\mathbf{k}) \in \widehat{\mathcal{A}}$$

で定義する. また, 正整数  $n$  に対して,  $\mathcal{A}_n$ -有限多重ゼータ (スター) 値を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) := \rho_n(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})), \quad \zeta_{\mathcal{A}_n}^*(\mathbf{k}) := \rho_n(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{k})) \in \mathcal{A}_n$$

で定義する.

Wolstenholme の定理は本質的に  $\zeta_{\mathcal{A}_2}(1) = 0$  である. Wolstenholme の定理や [14, 定理 1.3.1] の一般化として次が計算されている.

定理 2.3.2 (Z.H.Sun [23, Theorem 5.1, Remark 5.1], Sakugawa-S. [19]). 正整数  $k$  に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k) = (-1)^k \sum_{l=1}^{n-1} \binom{k+l-1}{l} \left( \sum_{j=1}^{n-l} (-1)^j \binom{n-l}{j} \widehat{B}_{j(\mathbf{p}-1)-k-l+1} \right) \mathbf{p}^l$$

が成り立つ. ただし,  $\widehat{B}_m := \frac{B_m}{m}$  で  $B_m$  は Seki-Bernoulli 数.

Zhi-Hong Sun は初等的な計算法で  $n = 3, 4$  の場合に計算している. この事実<sup>2</sup>がある程度専門家の間では知られていて, 例えば Tauraso は [24, Theorem 2.1] で  $\zeta_{\mathcal{A}_5}(1)$  を計算して記録を更新している. しかしながら, Sakugawa と計算したところ, Zhi-Hong Sun の手法は一般の  $n$  で適用可能であることがわかった. この定理は次の定理を還元することによっても得られる (ただし, 上の表示を得るには一般化 Kummer 合同式を使う必要がある. なお, 全ての  $n$  で計算できているため, 極限の定義から実際は同値である).

定理 2.3.3 (Washington [25, Theorem 1]). 正整数  $k$  に対して

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k) = (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \binom{k+l-1}{l} L_{\mathbf{p}}(k+l, \omega_{\mathbf{p}}^{1-k-l}) \mathbf{p}^l \quad (1)$$

が成り立つ. ここで,  $L_p$  は Kubota-Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数であり,  $\omega_p = \omega$  は Teichmüller 指標である.

Washington は少し一般的な和を扱っているし,  $n = 3$  で  $k$  が奇数の場合の合同式も系として記述している<sup>3</sup>. depth が 2 以上の場合にはいつでも Seki-Bernoulli 数で書けるわけではないようであるが, 次のような結果が知られている ([14, 定理 1.3.2] の部分的 lift).

<sup>1</sup> $\pi$  は連続ではない. 必ずしも必要ではないが, 記号的に楽になるため導入する. 例えば, 直後に定義される  $\mathbf{p}$  は  $\pi$  を用いずとも  $\mathbf{p} := ((p \bmod p^n)_p)_n$  と定義することもできる.

<sup>2</sup>というより  $n = 3, 4$  でしか出ていないという誤解.

<sup>3</sup>有限多重ゼータ値に関する論文が現れるよりも早い段階にこのような論文があったのである!

定理 2.3.4 (Zhao [29, Theorem 3.2]).  $k_1, k_2$  を正整数とし,  $k := k_1 + k_2$  が偶数であるとする. このとき,

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}_2}(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{k_1} k_2 \binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2} k_1 \binom{k+1}{k_2} - k \right\} \frac{B_{p-k-1}}{k+1} \mathbf{p}, \\ \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{k_1} k_2 \binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2} k_1 \binom{k+1}{k_2} + k \right\} \frac{B_{p-k-1}}{k+1} \mathbf{p}\end{aligned}$$

が成り立つ.

## 2.4 $p$ 進関係式

特殊値だけではなく,  $\mathcal{A}$ -有限多重ゼータ値の関係式族がどのように  $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値の関係式族に lift されるかは興味深い課題であるが, わかっていることはまだまだ少ない. なお, lift された関係式には一般に無限大素数  $p$  が現れる (その振る舞いは “ $\text{wt}(\mathbf{p}) = -1$ ” である). 以下, 知られている関係式族の幾つかを列挙する. 調和積公式は多重調和和について成り立つため自明である.

定理 2.4.1 (調和積公式).  $\mathbf{k}_1$  および  $\mathbf{k}_2$  をインデックスとする. このとき,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1 * \mathbf{k}_2) = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1) \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_2)$$

が成り立つ. ここで,  $\mathbf{k}_1 * \mathbf{k}_2$  は調和積.

次は [14, 定理 1.3.8] の lift.

定理 2.4.2 ( $p$  進シャッフル関係式, Jarossay [8, Lemma 4.17], S. [21, Theorem 6.4]).  $\mathbf{k}_1$  および  $\mathbf{k}_2 = (k_1, \dots, k_r)$  をインデックスとする. このとき,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1 \text{ III } \mathbf{k}_2) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{k}_2)} \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \left[ \prod_{j=1}^r \binom{k_j + l_j - 1}{l_j} \right] \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1, \overline{\mathbf{k}_2 + \mathbf{l}}) \mathbf{p}^{l_1 + \dots + l_r}$$

が成り立つ. ここで,  $\mathbf{k} = (n_1, \dots, n_s)$  に対して  $\overline{\mathbf{k}} := (n_s, \dots, n_1)$  であり,  $\mathbf{k}_1 \text{ III } \mathbf{k}_2$  はシャッフル積.

$\mathbf{k}_1 = \emptyset$  の場合を  $p$  進反転公式とよぶ. スター版  $p$  進シャッフル関係式も知られている (S. [21, Theorem 6.12]). 次は [14, 定理 1.3.18] の lift.

定理 2.4.3 ( $p$  進双対関係式, S. [20, Theorem 1.3]).  $\mathbf{k}$  をインデックスとする. このとき,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{k}, \{1\}^i) \mathbf{p}^i = - \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{k}^\vee, \{1\}^i) \mathbf{p}^i$$

が成り立つ. ただし,  $\mathbf{k}^\vee$  は  $\mathbf{k}$  の Hoffman 双対インデックス.

Wolstenholme の定理を次のように導出することができる:  $p$  進双対関係式で  $\mathbf{k} = (1)$  とすると,  $\mathbf{k}^\vee = (1)$  なので

$$\zeta_{\mathcal{A}_2}(1) + \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(1, 1) \mathbf{p} = 0$$

が  $\mathcal{A}_2$  で成り立つことがわかる. よって,  $\zeta_{\mathcal{A}_2}(1) = 0$  は  $\zeta_{\mathcal{A}_2}^*(1, 1) = 0$  と同値であることがわかる. そして, Hoffman 双対関係式 ( $\mathcal{A}$  の場合) よりこれは  $\zeta_{\mathcal{A}}(2) = 0$  に同値である ( $(1, 1)^\vee = (2)$ ).

$I_{k,r}$  を weight  $k$ , depth  $r$  のインデックス全体のなす集合とし,  $I_{k,r,i} := \{(k_1, \dots, k_r) \in I_{k,r} \mid k_i \geq 2\}$  とする. このとき, 次は [14, 定理 1.3.16] の部分的 lift を与えている.

定理 2.4.4 (S.-Yamamoto [22, Theorem 2.5]).  $k, r$  を  $r \leq k$  を満たす正の整数とする. このとき,  $\mathcal{A}_2$  において

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1} \binom{k}{r} \frac{B_{p-k-1}}{k+1} \mathbf{p}, \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r}} \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(\mathbf{k}) = \binom{k}{r} \frac{B_{p-k-1}}{k+1} \mathbf{p}$$

が成り立つ. また,  $k$  が奇数であれば  $\mathcal{A}_3$  において

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r}} \zeta_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^r \frac{k+1}{2} \binom{k}{r} \frac{B_{p-k-2}}{k+2} \mathbf{p}^2, \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r}} \zeta_{\mathcal{A}_3}^*(\mathbf{k}) = -\frac{k+1}{2} \binom{k}{r} \frac{B_{p-k-2}}{k+2} \mathbf{p}^2$$

が成り立つ. 更に,  $i$  が  $1 \leq i \leq r$  を満たし,  $k$  が  $r$  より大きい偶数であれば,

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1} \frac{a_{k,r,i}}{2} \cdot \frac{B_{p-k-1}}{k+1} \mathbf{p}, \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(\mathbf{k}) = \frac{b_{k,r,i}}{2} \cdot \frac{B_{p-k-1}}{k+1} \mathbf{p}$$

が  $\mathcal{A}_2$  で成立する. ここで,  $a_{k,r,i}$  と  $b_{k,r,i}$  は次で与えられる.

$$a_{k,r,i} := \binom{k-1}{r} + (-1)^{r-i} \left\{ (k-r) \binom{k}{i-1} + \binom{k-1}{i-1} + (-1)^{r-1} \binom{k-1}{r-i} \right\},$$

$$b_{k,r,i} := \binom{k-1}{r} + (-1)^{i-1} \left\{ (k-r) \binom{k}{r-i} + \binom{k-1}{r-i} + (-1)^{r-1} \binom{k-1}{i-1} \right\}.$$

整数論サマースクールにおける本講演の当日に Murahara-Onozuka のプレプリント [11] が出た. それは [14, 定理 1.3.24] の  $\widehat{\mathcal{A}}$ -lift を与えるものであるが, 記号の準備が必要となるため主張は [11, Theorem 1.3] を見ていただきたい. なお, 彼らの証明では定理 2.4.3 が key となる. また, その後 [14, 定理 1.3.14] の部分的 lift が発表された.

定理 2.4.5 (Murahara-Onozuka-S. [12, Theorem 1.3]).  $m, n$  を非負整数で  $(m, n) \neq (0, 0)$  であるものとする. このとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{2m} = n \\ n_0, \dots, n_{2m} \geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\{2\}^{n_0}, 1, \{2\}^{n_1}, 3, \{2\}^{n_2}, \dots, \{2\}^{n_{2m-2}}, 1, \{2\}^{n_{2m-1}}, 3, \{2\}^{n_{2m}}) \\ &= (-1)^n \left\{ (-1)^m 2^{1-2m} \binom{m+n}{m} - 4 \binom{2m+n}{2m} \right\} \frac{B_{p-4m-2n-1}}{4m+2n+1} \mathbf{p}, \\ & \sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{2m} = n \\ n_0, \dots, n_{2m} \geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(\{2\}^{n_0}, 1, \{2\}^{n_1}, 3, \{2\}^{n_2}, \dots, \{2\}^{n_{2m-2}}, 1, \{2\}^{n_{2m-1}}, 3, \{2\}^{n_{2m}}) \\ &= (-1)^m 2^{1-2m} \binom{m+n}{m} \frac{B_{p-4m-2n-1}}{4m+2n+1} \mathbf{p} \end{aligned}$$

が成り立つ.

[14, 定理 1.3.26, 定理 1.3.27] の lift についてはまだ論文はないが,  $\mathcal{A}_2$ -lift などはずぐに取り組める課題であると考えられる.

## 2.5 次元予想

定義 2.5.1.  $k$  を正整数とする.  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間  $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}},k}$  を

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}},k} := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_i) \mathbf{p}^{b_i} \in \widehat{\mathcal{A}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ s.t. } b_i \rightarrow \infty, \text{wt}(\mathbf{k}_i) - b_i = k \right\}$$

と定義する. また, 正整数  $n$  に対して  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n,k} := \rho_n(\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}},k}) \subset \mathcal{A}_n$  と定める.

予想 2.5.2 (Zhao [30], Hirose [4], Rosen [18]).  $k$  が  $n$  に対して十分大きければ

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n, k} = \langle \zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) \mid \text{wt}(\mathbf{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}}$$

が成り立つであろう.

Zhao の数表によれば,  $(k, n) = (2, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5)$  では等号が成り立たないと予想されている.  $n = 2, 3$  のときは任意の  $k \geq 1$  で等号が成立するかもしれない.

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n, k}$  は, 後述の Kaneko-Zagier 予想の精密化をより詳しく考察することによって (cf. [30, Conjecture 9.7]), 次のように予想される.

予想 2.5.3 (次元予想).  $d_k$  を [14, 予想 1.2.1] に現れる数列とする. このとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n, k} = d_{k+n+1} - d_{k+1}.$$

$n = 1$  のときに, [14, 予想 1.2.1] に出てきた値と一致していることを確認せよ (演習問題). 代数的構造は異なるであろうが,  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_2, k}$  と  $\mathcal{Z}_k$  の予想次元が同じということは言及に値する. なお, [14, 定理 1.2.3] の証明手法はこの予想についても “ $\leq$ ” が成り立つことを保証するらしいが著者は理解していない.

### 3 一般化対称多重ゼータ値

#### 3.1 定義

$\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値に対応する対称多重ゼータ値の一般化は何かという冒頭の疑問に対する答えを提示する. 無限大素数は  $\widehat{\mathcal{A}}$  の  $\mathbb{Q}$  上超越元であるが (演習問題),  $\mathbf{p}$  の対応物は不定元  $t$  と考えることにする. Kaneko-Zagier 予想においては  $\frac{B_{p-k}}{k}$  と  $\zeta(k) \pmod{\zeta(2)}$  が対応すると考えられた. 合同式

$$L_p(k, \omega^{1-k}) \equiv \frac{B_{p-k}}{k} \pmod{p}$$

が成り立つが, (1) を参考にすると, 一般化対称多重ゼータ値  $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$  は depth 1 の場合に

$$\zeta_{\mathcal{S}}(k) = (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \binom{k+l-1}{l} \zeta(k+l)t^l \pmod{\zeta(2)} \quad (2)$$

となると期待するのはある程度自然である. (1) は  $\zeta_{<p}(1)$  を Kubota-Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数の値 ( $p$  進 Riemann ゼータ値) で書いたものであるが, 一般に  $\zeta_{<p}(\mathbf{k})$  は Jarossay によって証明された Akagi-Hirose-Yasuda 予想 (安田 [28]) で解説されている. cf. 本稿定理 3.3.3) によって Deligne の  $p$  進多重ゼータ値  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$  (原 [3]) によって解説されている) で表すことができるため,  $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) \leftrightarrow \zeta(\mathbf{k}) \pmod{\zeta(2)}$  と考えることによって次の定義にたどり着く.

定義 3.1.1 (一般化対称多重ゼータ値, Hirose [4], Rosen [16, Definition 2.4]). インデックス  $\mathbf{k}$  に対して, 一般化対称多重ゼータ値  $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$  を

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) &:= \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta^*(k_1, \dots, k_i) \\ &\times \sum_{l_{i+1}, \dots, l_r \geq 0} \left[ \prod_{j=i+1}^r \binom{k_j + l_j - 1}{l_j} \right] \zeta^*(k_r + l_r, \dots, k_{i+1} + l_{i+1}) t^{l_{i+1} + \dots + l_r} \pmod{\zeta(2)} \end{aligned}$$

と定義する。  $\zeta^*$  は調和積による正規化であり<sup>4</sup>,  $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$  は  $\overline{\mathcal{Z}}[[t]$  の元である。ただし,  $\overline{\mathcal{Z}} := \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ 。また, 一般化対称多重ゼータスター値  $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$  を  $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}')$  で定義する<sup>5</sup>。  $\pi_n: \overline{\mathcal{Z}}[[t] \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}[[t]/t^n$  を自然な全射とすると,  $\zeta_{\mathcal{S}_n}(\mathbf{k}) := \pi_n(\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})), \zeta_{\mathcal{S}_n}^*(\mathbf{k}) := \pi_n(\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}))$  とおく。

$\zeta_{\mathcal{S}_1}(\mathbf{k})$  が対称多重ゼータ値  $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$  に一致することに注意する。読者にとっては超速で定義を強制されていると思われるかもしれないが, 定義が正しそうだと思うための一つの方法は  $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値と同じ関係式を満たしていることを幾つか具体的なレベルで確認することである (次節。ところが, 色々未解明である)。

### 3.2 特殊値・関係式について

(1) と定理 2.3.4 の対応物として, (2) および次の定理が成立することは定義より容易に計算できる (定理の方は多少計算が必要: 演習問題 (cf. [14, 例 2.3.1]))。

**定理 3.2.1.**  $k_1, k_2$  を正整数とし,  $k := k_1 + k_2$  が偶数であるとする。このとき,

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{S}_2}(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{k_1} k_2 \binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2} k_1 \binom{k+1}{k_2} - k \right\} \zeta(k+1)t \bmod \zeta(2), \\ \zeta_{\mathcal{S}_2}^*(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{k_1} k_2 \binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2} k_1 \binom{k+1}{k_2} + k \right\} \zeta(k+1)t \bmod \zeta(2)\end{aligned}$$

が成り立つ。

調和積公式および  $t$  進反転公式が成立することは確認できている。

**命題 3.2.2** (調和積公式, Ono-S. [13]).

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_1 * \mathbf{k}_2) = \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_1) \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_2).$$

**命題 3.2.3** ( $t$  進反転公式, Ono-S. [13]).  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  をインデックスとする。このとき,

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\overline{\mathbf{k}}) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \left[ \prod_{j=1}^r \binom{k_j + l_j - 1}{l_j} \right] \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) t^{l_1 + \dots + l_r}$$

が成立する。

一方, 以下の公式が証明されているかは著者は現状把握できていないと講演で述べた。

**予想 3.2.4** ( $t$  進シャッフル関係式).  $\mathbf{k}_1$  および  $\mathbf{k}_2 = (k_1, \dots, k_r)$  をインデックスとする。このとき,

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_1 \sqcup \mathbf{k}_2) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{k}_2)} \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \left[ \prod_{j=1}^r \binom{k_j + l_j - 1}{l_j} \right] \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_1, \overline{\mathbf{k}_2 + \mathbf{l}}) t^{l_1 + \dots + l_r}$$

が成り立つ。

**予想 3.2.5** ( $t$  進双対公式).  $\mathbf{k}$  をインデックスとする。このとき,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}, \{1\}^i) t^i = - \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}^\vee, \{1\}^i) t^i$$

が成り立つ。

講演後, Hirose によって予想 3.2.5 については証明が宣言された ([5], より強い形で証明している)。また, 予想 3.2.4 についても取り組んでいる者がおり, 殆ど (?) 解けているようである。定理 2.4.4 や定理 2.4.5 の対応物はまだ計算されていないと思われる。

<sup>4</sup> シャッフル正規化や, 定数項を取るのではなく多項式を用いた正規化で定義しても同値になることが [14, 2.2.1, 2.2.2] と同様に示してわかる。

<sup>5</sup>  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  の「,」を幾つか「+」に変更して得られるインデックスが  $\mathbf{k}'$  である。

### 3.3 Kaneko-Zagier 予想の精密化

$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$  を

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}} := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_i) p^{b_i} \in \widehat{\mathcal{A}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ s.t. } b_i \rightarrow \infty, \text{wt}(\mathbf{k}_i) - b_i \geq 0 \right\}$$

と定義する. これは  $\widehat{\mathcal{A}}$  の部分  $\mathbb{Q}$ -代数となる. 次が目標としていた予想である.

**予想 3.3.1** (精密化 Kaneko-Zagier 予想, Hirose [4], Rosen [16, 17]). 対応  $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}), \mathbf{p} \mapsto t$  は well-defined な位相環としての同型  $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}} \simeq \overline{\mathcal{Z}}[[t]]$  を与える.

以下, この予想のモチヴィック版を考え, モチヴィック版精密化 Kaneko-Zagier 予想が実はモチヴィック版 Kaneko-Zagier 予想から導かれることを論じる.

モチヴィック多重ゼータ値  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{k})$  の張る  $\mathbb{Q}$ -代数を  $\mathcal{H}$  とし,  $\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H}/(\zeta^{\mathbf{m}}(2))$  とする (Hirose [6])<sup>6</sup>.  $\zeta^{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) := \zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) \bmod \zeta^{\mathbf{m}}(2)$ .  $D_p: \overline{\mathcal{H}}[[t]] \dashrightarrow \mathbb{Q}_p$  を  $D_p(\zeta^{\mathbf{a}}(\mathbf{k})) := \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}), D_p(t) := p, D_p(\sum_{j \geq 0} a_j t^j) := \sum_{j \geq 0} D_p(a_j) p^j$  で定義する (収束する場合). 次の  $p$  進多重ゼータ値の integrality と Akagi-Hirose-Yasuda 予想が重要となる.

**定理 3.3.2** (Chatzistamatiou [2], Akagi-Hirose-Yasuda [1]).  $k := \text{wt}(\mathbf{k})$  とする. このとき,

$$\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) \in \sum_{j \geq k} \frac{p^{j-k}}{j!} \mathbb{Z}_p$$

が成り立つ.

**定理 3.3.3** (Akagi-Hirose-Yasuda 予想 [1], Jarossay [7, 10]).

$$\zeta_{<p}(\mathbf{k}) = D_p(\zeta_{\mathcal{S}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{k}))$$

が成り立つ. ここで,  $\zeta_{\mathcal{S}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) \in \overline{\mathcal{H}}[[t]]$  は  $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$  の定義 3.1.1 における  $\zeta^*$  を  $\zeta^{\mathbf{m}}$  に変更したもの.

定理 3.3.2 より連続準同型  $D_p: \overline{\mathcal{H}}[[t]] \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$  が well-defined に定まる ( $D_p(\zeta^{\mathbf{a}}(\mathbf{k})) = \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}), D_p(t) = p$ ).

**予想 3.3.4** (Hirose [4], Rosen [16, 17]).  $D_p$  は単射.

$\text{Im}(D_p) = \mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$  が示されており (Yasuda [27], Jarossay [9], Rosen [16, Theorem 3.3]), Akagi-Hirose-Yasuda 予想より  $D_p(\zeta_{\mathcal{S}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{k})) = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$  なので, 予想 3.3.4 はモチヴィック版の精密化 Kaneko-Zagier 予想である.

$D_p$  と整合的な  $D_p^1: \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{A}$  が自然に定義されるが, 次を証明することができる.

**定理 3.3.5.**  $D_p^1$  が単射であれば (すなわち, モチヴィック版 Kaneko-Zagier 予想が真であれば)  $D_p$  も単射となる.

**証明.** (by Hirose) 逆極限の左完全性から, 自然に定義される  $D_p^n: \overline{\mathcal{H}}[[t]]/t^n \rightarrow \mathcal{A}_n$  が任意の  $n \geq 1$  で単射であることを示せばよい.  $a = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} \in \overline{\mathcal{H}}[[t]]/t^n$  をとって,  $D_p^n(a) = 0$  と仮定する. このとき, 殆ど全ての素数  $p$  に対して

$$D_p(a_0) + D_p(a_1)p + \cdots + D_p(a_{n-1})p^{n-1} \equiv 0 \pmod{p^n \mathbb{Z}_p}$$

が成り立つ. 定理 3.3.2 より殆ど全ての  $p$  に対して  $D_p(a_i) \in \mathbb{Z}_p$  なので,  $D_p(a_0) \in p\mathbb{Z}_p$  が従う. よって,  $D_p^1$  が単射であれば  $a_0 = 0$  であり, この操作を繰り返していけば  $a = 0$  が従う.  $\square$

<sup>6</sup> $\mathcal{A}$  と表すことが多いが, 記号がかぶるのでここでは  $\overline{\mathcal{H}}$  を用いる.

以上の内容およびより深い内容を Rosen [16, 17] が考察している<sup>7</sup>.  $\text{mod } p$  の世界のみならず  $\text{mod } p^n$  の世界での有限多重ゼータ値の関係式についても ( $t$  を援用して) 通常の高重ゼータ値の言葉で表現できると予想できるということは興味深い<sup>8</sup>.  $\mathcal{A}$ -有限多重ゼータ値の関係式が実際に  $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値の関係式に常に lift されるか? (lifting conjecture [15, Conjecture A]), lift される場合はどのような関係式になるかについてはまだ十分にはわかっていない.

## 謝辞

世話人の田坂さん, 佐久川さん, 三柴さんには憧れの整数論サマースクールにおける講演機会を与えてくださり, 準備の段階でも多数のご助言を頂いたことを感謝致します. また, 旅費を援助していただきました佐久川さん, 古庄先生, 有限多重ゼータ値について普段から多数の議論をしてくださった小野さん, 講演に前後して  $\widehat{\mathcal{A}}$  に興味を持ってくださった村原さん, 小野塚さんに深く感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] K. Akagi, M. Hirose and S. Yasuda, *Integrality of  $p$ -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*, in preparation.
- [2] A. Chatzistamatiou, *On integrality of  $p$ -adic iterated integrals*, J. of Algebra, **474** (2017), 240–270.
- [3] 原隆, 『「実/複素ゼータの世界」から「 $p$ 進ゼータの世界」へ』, 本報告集.
- [4] M. Hirose, personal communication.
- [5] M. Hirose, *On the  $t$ -adic duality*, unpublished.
- [6] 広瀬稔, 『Brown による Hoffman 予想の証明の概略』, 本報告集.
- [7] D. Jarossay, *Une notion de multizêtas finis associée au Frobenius du groupe fondamental de  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$* , Comptes Rendus Mathematique, **353** (10), (2015), 877–882.
- [8] D. Jarossay, *An explicit theory of  $\pi_1^{un, crys}(\mathbb{P}^1 - \{0, \mu_N, \infty\})$ -II-1: Standard algebraic equations of prime weighted multiple harmonic sums and adjoint multiple zeta values*, arXiv:1412.5099v3.
- [9] D. Jarossay, *Algebraic relations, taylor coefficients of hyperlogarithms and images by frobenius - ii: Relations with other motives and the taylor period map*, arXiv:1601.01158.
- [10] D. Jarossay, *Indirect computation of  $p$ -adic cyclotomic multiple zeta values*, arXiv:1501.04893v4.
- [11] H. Murahara, T. Onozuka, *Derivation relation for finite multiple zeta values in  $\widehat{\mathcal{A}}$* , arXiv:1809.02752.
- [12] H. Murahara, T. Onozuka, S. Seki, *Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values in  $\mathcal{A}_2$* , arXiv:1810.10803.
- [13] M. Ono, S. Seki, personal communication.
- [14] 小野雅隆, 『「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値へ」』, 本報告集.
- [15] J. Rosen, *Asymptotic relations for truncated multiple zeta values*, J. Lond. Math. Soc. **91** (2015), no.2, 554–572.

<sup>7</sup>Jarossay [8] も本稿と被る仕事をしていると思われるが, 著者は力量不足により読み解けていない.

<sup>8</sup>なお,  $S_n$  はコンピュータによる計算手段を与えている.

- [16] J. Rosen, *The completed finite period map and Galois theory of supercongruences*, Int. Math. Res. Notices (to appear), arXiv:1703.04248.
- [17] J. Rosen, *Sequential periods of the crystalline Frobenius*, preprint, arXiv:1805.01885.
- [18] J. Rosen, personal communication.
- [19] K. Sakugawa, S. Seki, personal communication.
- [20] S. Seki, *The  $p$ -adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, to appear in Tohoku Math. J., arXiv:1605.06739.
- [21] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, doctoral dissertation.
- [22] S. Seki, S. Yamamoto, *Ohno-type identities for multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:1806.04785.
- [23] Z. H. Sun, *Congruences concerning Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials*, Disc. Appl. Math. **105** (2000), no. 1–3, 193–223.
- [24] R. Tauraso. *More congruences for central binomial coefficients*, J. Number Theory, **130** (2010), no. 12, 2639–2649.
- [25] L. C. Washington,  *$p$ -adic  $L$ -functions and sums of powers*, J. Number Theory, **69** (1998), 50–61.
- [26] J. Wolstenholme, *On certain properties of prime numbers*, Quart. J. Pure Appl. Math. **5** (1862), 35–39.
- [27] S. Yasuda, *Finite real multiple zeta values generate the whole space  $Z$* , International Journal of Number Theory, **12**(03), (2016), 787–812.
- [28] 安田正大, 『「 $p$ 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ』, 本報告集.
- [29] J. Zhao, *Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums*, Int. J. Number Theory **4** (2008), no. 1, 73–106.
- [30] J. Zhao, *Finite multiple zeta values and finite Euler sums*, preprint, arXiv:1507.04917.

# 多重ゼータ関数の解析接続と 負の整数点での極限值

小野塚友一 (九州大学)

## はじめに

本文では多変数複素関数における「正則」や「極」、「不確定特異点」などの用語がでてくる。これらは多変数複素関数論の教科書 [24] の定義に基づいているため、気になった読者はこの教科書を参照いただきたい。

## 1 多重ゼータ関数の定義と絶対収束領域

多重ゼータ関数は次の級数により定義される。

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) := \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \dots m_r^{s_r}} \quad (1.1)$$

ただし  $s_1, \dots, s_r$  は正の整数の組ではなく複素数の組  $\mathbb{C}^r$  をとるものとする。このように多重ゼータ値の変数を複素変数に変えて定義される多変数複素関数が多重ゼータ関数である。この講演ではこの関数の解析的な性質を概観していく。

最初に (1.1) の右辺の級数の収束性について次の事実が知られている。

**Proposition 1.1** (松本 [12]). 多重ゼータ関数  $\zeta(s_1, \dots, s_r)$  は次の全ての不等式を満たす  $\mathbb{C}^r$  の領域で絶対収束する。

$$\begin{aligned} \Re(s_r) &> 1 \\ \Re(s_{r-1} + s_r) &> 2 \\ &\vdots \\ \Re(s_1 + \dots + s_r) &> r \end{aligned}$$

**Proof.** 正の整数  $M$  と実数  $\sigma > 1$  に対して次の評価が成り立つ。

$$\sum_{M < m} \frac{1}{m^\sigma} \leq \int_M^\infty \frac{dx}{x^\sigma} = \frac{M^{1-\sigma}}{\sigma-1} \quad (1.2)$$

この評価を用いて証明する。以下では  $s_j = \sigma_j + it_j$  と書くこととし、証明には  $r$  についての帰納法を用いる。 $r = 1$  のとき

$$\zeta(s_1) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}}$$

はリーマンゼータ関数であり (1.2) より  $\sigma_1 > 1$  において絶対収束する。 $r - 1$  のときに Proposition 1.1 が成り立つと仮定し、 $r$  の場合を考える。 $\sigma_r > 1$  のとき (1.2) より

$$\begin{aligned} \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} m_2^{\sigma_2} \dots m_r^{\sigma_r}} &= \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} \dots m_{r-1}^{\sigma_{r-1}}} \sum_{m_{r-1} < m_r} \frac{1}{m_r^{\sigma_r}} \\ &\leq \frac{1}{\sigma_r - 1} \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} \dots m_{r-1}^{\sigma_{r-1} + \sigma_r - 1}} \end{aligned}$$

が成り立ち、最後の級数は帰納法の仮定より次の不等式を全て満たす領域で絶対収束する。

$$\begin{aligned}\sigma_{r-1} + \sigma_r - 1 &> 1 \\ \sigma_{r-2} + \sigma_{r-1} + \sigma_r - 1 &> 2 \\ &\vdots \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_r - 1 &> r - 1\end{aligned}$$

これらの不等式は次の不等式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\sigma_{r-1} + \sigma_r &> 2 \\ \sigma_{r-2} + \sigma_{r-1} + \sigma_r &> 3 \\ &\vdots \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_r &> r\end{aligned}$$

最終的に得られた不等式と (1.2) を適用するために用いた不等式  $\sigma_r > 1$  を合わせることで Proposition 1.1 を得る。□

**Remark.** Proposition 1.1 の不等式は、実際には絶対収束するための必要十分条件となっている。次章において

$$\begin{aligned}s_r &= 1 \\ s_{r-1} + s_r &= 2 \\ &\vdots \\ s_1 + \cdots + s_r &= r\end{aligned}$$

のいずれかの式を満たす点が多重ゼータ関数の極であることを述べるが、これらの式は Proposition 1.1 の領域とそれ以外の領域との境界になっており、この事実から必要十分であることが分かる。

## 2 多重ゼータ関数の有理型接続

前章では多重ゼータ関数の定義を与えたが、この定義は絶対収束領域上での定義でしかない。そうなるよりも広い範囲に解析接続できるのか、といった疑問がでてくるが、これは可能である。実際、Zhao[25] と秋山-江上-谷川 [1] はそれぞれ独立に多重ゼータ関数の解析接続を与えた。Zhao は超関数を用いて解析接続を与え、秋山-江上-谷川は Euler-Maclaurin の和公式を用いて解析接続を与えた。この章では秋山-江上-谷川の証明を紹介することにより、多重ゼータ関数の解析接続を与え、更には証明を追うことで極の位置も決定する。

**Proposition 2.1** (秋山-江上-谷川 [1]). 多重ゼータ関数  $\zeta(s_1, \dots, s_r)$  は  $\mathbb{C}^r$  上に有理型に接続できる。極は次の各式により与えられ、全て 1 位である。

$$\begin{aligned}s_r &= 1 \\ s_{r-1} + s_r &= 2, 1, 0, -2, -4, \dots \\ \sum_{j=1}^k s_{r-j+1} &\in \mathbb{Z}_{\leq k} \quad (k = 3, 4, \dots, r).\end{aligned}$$

**Remark.** 極が  $s_{r-1} + s_r = 2$  で与えられるとは、具体的には次の超平面上の点が全て極になっているということの意味する。

$$\{(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid s_{r-1} + s_r = 2\}$$

1変数複素関数論では極といえば“点”のイメージだったかもしれないが、多変数複素関数論では極は孤立せず、多重ゼータ関数の場合は極集合が“超平面”をなしている。

**Proof.** ここでは  $r = 2$  の場合についてのみ証明を与える。これから使う記号として次の2つを定義しておく。

$$(s)_l := s(s+1)\cdots(s+l-1) = \frac{\Gamma(s+l)}{\Gamma(s)}$$

$$B_l : \text{ベルヌーイ数} \quad \left( \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

$M \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  と  $L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し次の式で  $\phi_L(M, s)$  を定める。

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2M^s} + \sum_{l=1}^L (s)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{M^{s+l}} - \phi_L(M, s)$$

このとき左辺を  $\zeta(s) - \sum_{m=1}^M m^{-s}$  と置き換えることにより  $\phi_L(M, s)$  は整関数となることがわかる。また Euler-Maclaurin の和公式\* より  $\phi_L(M, s)$  は次のように評価される。

$$\phi_L(M, s) = O(|(s)_{L+1}| M^{-\sigma-L-1})$$

この式を2重ゼータ関数に代入することで次式を得る。

$$\begin{aligned} & \zeta(s_1, s_2) \\ &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \sum_{m_2=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{m_2^{s_2}} \\ &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \left( \frac{m_1^{1-s_2}}{s_2-1} - \frac{1}{2m_1^{s_2}} + \sum_{l=1}^L (s_2)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{m_1^{s_2+l}} - \phi_L(m_1, s_2) \right) \\ &= \frac{1}{s_2-1} \zeta(s_1 + s_2 - 1) - \frac{1}{2} \zeta(s_1 + s_2) + \sum_{l=1}^L (s_2)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \zeta(s_1 + s_2 + l) - \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{\phi_L(m_1, s_2)}{m_1^{s_1}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

最後の式がどの範囲で正則か見てみよう。初項は  $s_2 = 1$  と  $s_1 + s_2 = 2$  が極でそれ以外の場所では正則である。第2項は  $s_1 + s_2 = 1$  が極、第3項は  $s_1 + s_2 = 0, -2, -4, \dots$  が極になりそれ以外の場所では正則である。(  $B_3, B_5, \dots = 0$  より  $s_1 + s_2 = -1, -3, \dots$  は極にならないことに注意。) 最後の項は上から

$$O\left( \sum_{m_1=1}^{\infty} |(s_2)_{L+1}| m_1^{-\sigma_1 - \sigma_2 - L - 1} \right)$$

により評価できるので  $\sigma_1 + \sigma_2 > -L$  という範囲で正則になる。これはどんな非負整数  $L$  に対しても成り立つので  $L$  を十分大きく取ることにより必要な範囲の有理型接続が得られる。□

上の証明では  $r = 2$  の場合のみを扱ったが、一般の場合には (2.1) 式を

$$\begin{aligned} \zeta(s_1, \dots, s_r) &= \frac{1}{s_r - 1} \zeta(s_1, \dots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r - 1) - \frac{1}{2} \zeta(s_1, \dots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r) \\ &\quad + \sum_{l=1}^L (s_r)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \zeta(s_1, \dots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r + l) - \sum_{0 < m_1 < \dots < m_{r-1}} \frac{\phi_L(m_{r-1}, s_r)}{m_1^{s_1} \cdots m_{r-1}^{s_{r-1}}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

と書き換えて帰納法を走らせればよい。

\*これは級数  $\sum_{a < m \leq b} f(m)$  と積分  $\int_a^b f(x) dx$  の間の関係を与える公式である。今回の級数に適用すると次の式が得られる。

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2M^s} + \sum_{l=1}^L (s)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{M^{s+l}} - \frac{(s)_{L+1}}{(L+1)!} \int_M^{\infty} B_{L+1}(t - [t]) t^{-s-L-1} dt$$

ただし  $B_l(t)$  はベルヌーイ多項式であり、 $[t]$  は床関数である。(詳しくは Montgomery-Vaughan[19] の Appendix B を参照せよ。)

**Remark.** Proposition 2.1 では  $r \geq 3$  の場合に  $r < 3$  では現れなかった極が現れる. この極がどのように現れるか  $r = 3$  の場合に見てみよう. そのために,  $u_1 = s_1$ ,  $u_2 = s_2 + s_3$ ,  $u_3 = s_3$  と変数を置き換える. このとき (2.2) 式の右辺第 1 項から第 3 項は

$$\frac{1}{u_3 - 1} \zeta(u_1, u_2 - 1) - \frac{1}{2} \zeta(u_1, u_2) + \sum_{l=1}^L (u_3)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \zeta(u_1, u_2 + l)$$

となる. 初項と第 2 項から  $r < 3$  では現れなかった極  $u_1 + u_2 = s_1 + s_2 + s_3 \in \mathbb{Z}_{\leq 3}$  が現れることが確かめられる. 加えて第 3 項からも同様の極が現れる. これらの極が互いに打ち消しあっていないことを確かめる必要があるが, これは上の式を  $u_3$  の関数とみなして  $u_3$  の次数を比べることにより確かめられる.

### 3 多重ゼータ関数の負の整数での極限值

多重ゼータ関数が負の範囲まで接続できることを前章で見た. そこで負の整数点における多重ゼータ関数の値を調べてみたくなる. 実際, Zhao[25] と秋山-江上-谷川 [1] は解析接続を証明した後, 負の整数点での特殊値について論じている. (2.1) 式で  $L$  を十分大きくとることで, 2 重ゼータ関数の特別な場合については調べることができる. いま  $(s_1, s_2) = (-n_1, -n_2) \in (\mathbb{Z}_{\leq -1})^2$  という点での特殊値を考えてみよう. 極を避けるために  $n_1 + n_2 \equiv 1 \pmod{2}$  という条件を付けて (2.1) 式に代入すると, リーマンゼータ関数の自明な零点がほとんどの項を消し, また最後の項は  $(-n_2)_{L+1} = 0$  により 0 となり

$$\zeta(-n_1, -n_2) = -\frac{1}{2} \zeta(-n_1 - n_2) = \frac{B_{n_1+n_2+1}}{2(n_1 + n_2 + 1)}$$

が得られる. このように多重ゼータ関数の負の整数点での値をどんどん計算していけば良いのだが, そういうわけにはいかない. というのも, 今計算した点以外の負の整数点は Proposition 2.1 より極になっているからである. では全く調べられないのかというと, そういうわけではない. 実は負の整数点は多重ゼータ関数の不確定特異点になることが知られている. 例えば次のような式が示されている (佐々木 [23]).

$$\begin{aligned} \lim_{s_3 \rightarrow 0} \lim_{s_2 \rightarrow 0} \lim_{s_1 \rightarrow 0} \zeta(s_1, s_2, s_3) &= -\frac{3}{8} \\ \lim_{s_1 \rightarrow 0} \lim_{s_2 \rightarrow 0} \lim_{s_3 \rightarrow 0} \zeta(s_1, s_2, s_3) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

この例ではどちらも  $\zeta(s_1, s_2, s_3)$  の  $(0, 0, 0)$  への極限值を与えている.  $(0, 0, 0)$  は 3 重ゼータ関数の極であるが極限值を持っており, しかもその極限值は近づき方によって異なる値に収束する. このように非正の整数点は一般に多重ゼータ関数の極となるが, 極限值を考えることができ, その値は極限のとり方によって異なる.

こういった極限值についての結果を紹介するために, 次の記号を用意する.

$$\begin{aligned} n_r(j) &:= n_j + n_{j+1} + \cdots + n_r \\ p_r(j) &:= p_j + p_{j+1} + \cdots + p_r \\ \varepsilon_r(j) &:= \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_r \\ [a]_n &:= \begin{cases} a(n-1)! & (n \geq 1) \\ (-1)^n (-n)!^{-1} & (n \leq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

**Theorem 3.1** (O.[22]).  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \mathbb{C}$  は次の 3 条件を満たしながら極限  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \rightarrow (0, \dots, 0)$  をとるもの

とする.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r &\neq 0 \\ \varepsilon_r(1), \dots, \varepsilon_r(r) &\neq 0 \\ \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_r(j)} &= O(1) \quad ((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \rightarrow 0, 1 \leq j \leq k \leq r) \end{aligned}$$

このとき  $(-n_1, \dots, -n_r) \in (\mathbb{Z}_{\leq 0})^r$  への極限值は次のように表せる.

$$\begin{aligned} &\zeta(-n_1 + \varepsilon_1, \dots, -n_r + \varepsilon_r) \\ &= (-1)^{n_r} n_r! \sum'_{\substack{p_1 + \dots + p_r = n_r(1) + r \\ p_1, \dots, p_r \geq 0}} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \prod_{j=2}^r \frac{[\varepsilon_r(j)]_{-n_r(j) - r + j + p_r(j) - 1}}{[\varepsilon_r(j-1)]_{-n_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1}} + \sum_{j=1}^r O(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

ただし  $\sum'$  は次が成り立つような  $(p_1, \dots, p_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$  を走るものとする.

$$\text{全ての } j = 2, \dots, r \text{ に対し } (-n_r(j) - r + j + p_r(j) < 2 \text{ または } -n_r(j-1) - r + j + p_r(j) \geq 2)$$

以上が極限值についての定理であるが, 式が複雑なので具体例を以下に記す. まず 2 重ゼータ関数に対しては次のような極限值が得られる.

$$\begin{aligned} \zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \sum_{j=1}^2 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(-1 + \varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2) &= \frac{1}{360} + \frac{1}{720} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \sum_{j=1}^2 O(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

同様に 3 重ゼータ関数の場合は次のようになる.

$$\begin{aligned} \zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(-1 + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{17}{720} - \frac{1}{144} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \frac{1}{720} \cdot \frac{-\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(\varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{19}{360} + \frac{1}{360} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, -1 + \varepsilon_3) &= -\frac{3}{40} - \frac{1}{720} \cdot \frac{4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

ここまでの例では分母, 分子共に  $\varepsilon_j$  の 1 次式となっていた. 4 重ゼータ関数以降は 2 次式以上の項も登場する.

$$\begin{aligned} \zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{36} \cdot \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3 + \varepsilon_4} + \frac{1}{48} \cdot \frac{\varepsilon_3 + 2\varepsilon_4}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} \\ &\quad + \frac{1}{720} \cdot \frac{19\varepsilon_2 + 33\varepsilon_3 + 52\varepsilon_4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} + \frac{1}{144} \cdot \frac{\varepsilon_4(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} + \sum_{j=1}^4 O(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

**Proof.** ここでは証明のスケッチのみを述べるが, 特に極限値の求め方に的を絞って見ていくこととする. まず リーマンゼータ関数の場合と同様にして次の積分表示を導き出すことができる.

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1}}{\prod_{j=1}^r (e^{t_j} + \cdots + t_r - 1)} dt_1 \cdots dt_r$$

この積分に対して  $t_j = x_1 \cdots x_j(1 - x_{j+1})$  (ただし  $x_{r+1} = 0$ ) により変数変換すると

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty \prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r$$

この積分区間を次のように2つに分割する.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 + \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_1^\infty$$

すると極限值として現れるのは最初の積分区間のみで、後ろの積分区間は負の部分まで有理型接続でき誤差項になる. そのためここでは最初の積分区間のみ計算を進めていく. 最初の積分区間についてテイラー展開  $x/(e^x - 1) = \sum_{k=0}^\infty (B_k/k!)x^k$  ( $|x| < 2\pi$ ) を代入すると

$$\frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \left( \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} (x_1 \cdots x_j)^k \right) dx_1 \cdots dx_r$$

これにより積分の中に無限和が現れるが, その無限和を次のように2つに分割する.

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^r \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} (x_1 \cdots x_j)^k &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{p_1 + \cdots + p_r = k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \\ &= \sum_{p_1 + \cdots + p_r = n_r(1)+r} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \\ &\quad + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n_r(1)+r}}^\infty \sum_{p_1 + \cdots + p_r = k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \end{aligned}$$

このように2つの和に分けたとき, 極限値の主要項になるのは初項で, 第2項は負の部分まで有理型接続でき誤差項になる. そこで初項の積分のみを計算すると

$$\frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \sum_{p_1 + \cdots + p_r = n_r(1)+r} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \frac{1}{s_r(1) + n_r(1)} \prod_{j=2}^r \frac{\Gamma(s_r(j) - r + j + p_r(j) - 1) \Gamma(s_{j-1})}{\Gamma(s_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1)}$$

のようにガンマ関数で表せ, この表示により負の部分まで有理型接続できる.  $(s_1, \dots, s_r) = (-n_1 + \varepsilon_1, \dots, -n_r + \varepsilon_r)$  を代入し, 更に  $\Gamma(a+n) = (a)_n \Gamma(a)$  という式を使うことで, 次のように式変形できる.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \prod_{j=2}^r \frac{\Gamma(s_r(j) - r + j + p_r(j) - 1) \Gamma(s_{j-1})}{\Gamma(s_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1)} \\ &= \frac{1}{(\varepsilon_r)_{-n_r} \Gamma(\varepsilon_r(1))} \prod_{j=2}^r \frac{(\varepsilon_r(j))_{-n_r(j)-r+j+p_r(j)-1}}{(\varepsilon_r(j-1))_{-n_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1}} \end{aligned}$$

さらに右辺の最初の部分は  $(\varepsilon_r)_{-n_r} = \Gamma(\varepsilon_r - n_r)/\Gamma(\varepsilon_r) = \{(\varepsilon_r - n_r)(\varepsilon_r - n_r + 1) \cdots (\varepsilon_r - 1)\}^{-1}$  という式とガンマ関数の相反公式により次のように評価できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\varepsilon_r)_{-n_r} \Gamma(\varepsilon_r(1))} &= ((-1)^{n_r} n_r! + O(\varepsilon_r)) \left( \frac{\sin(\pi \varepsilon_r(1))}{\pi} \Gamma(1 - \varepsilon_r(1)) \right) \\ &= (-1)^{n_r} n_r! \varepsilon_r(1) + O(\varepsilon_r(1)^2) + O(\varepsilon_r(1) \varepsilon_r) \end{aligned}$$

これまでの計算をまとめ、次の式を得る.

$$\begin{aligned} & \zeta(-n_1 + \varepsilon_1, \dots, -n_r + \varepsilon_r) \\ &= (-1)^{n_r} n_r! \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_r = n_r(1+r) \\ p_1, \dots, p_r \geq 0}} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \prod_{j=2}^r \frac{(\varepsilon_r(j))_{-n_r(j)-r+j+p_r(j)-1}}{(\varepsilon_r(j-1))_{-n_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1}} + (\text{誤差}) \end{aligned}$$

これでほぼ証明が完了しており、定理の式に近い形となっている. 主要項の中に誤差となるべきものがまだ含まれており、それを取り除くために  $\sum'$  や  $[a]_n$  を用いる.  $\square$

**Remark.** この証明では主要項以外の項について、解析接続と整数点の周りでの評価を省略した. これらの詳しい解説は Appendix に載せてある.

## 4 最後に

この講演では多重ゼータ関数の絶対収束領域や解析接続など基本的なことのみを扱ったが、この他にも様々な研究が行われている. 歴史的に重要なものとして Atkinson の公式が挙げられる. Atkinson の公式とはリーマンゼータ関数の 2 乗平均値の漸近式

$$\int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^2 dt = T \log \frac{T}{2\pi} + (2\gamma - 1)T + E(T)$$

の誤差項  $E(T)$  を表す公式である. (長い式のためここでは単に  $E(T)$  と書く. 詳しい式を知りたい読者は [3, Theorem] を見よ.)  $\zeta(s)$  の絶対値の 2 乗は

$$|\zeta(s)|^2 = \zeta(s)\zeta(\bar{s}) = \zeta(s + \bar{s}) + \zeta(s, \bar{s}) + \zeta(\bar{s}, s)$$

と変形できるため、この式に  $s = 1/2 + it$  を代入して平均値を計算したくなるが、右辺の各項は  $s = 1/2 + it$  で極となるため計算できない. Atkinson は右辺の極の打ち消し合いを考察し、 $\zeta(s, \bar{s})$  からガンマ関数とリーマンゼータ関数によって作られる項を引いて積分した

$$\int_{1/2 - iT}^{1/2 + iT} \left( \zeta(s, \bar{s}) - \frac{\Gamma(s + \bar{s} - 1)\Gamma(1 - s)}{\Gamma(\bar{s})} \zeta(s + \bar{s} - 1) \right) ds$$

を用いてリーマンゼータ関数の 2 乗平均値が表せることを発見した. この積分を計算することにより Atkinson の公式が得られる.

このように多重ゼータ関数は多重ゼータ値の複素関数化という意味合いだけでなく、解析的整数論の研究の中からも自然に現れる. 多重ゼータ関数の歴史について詳しく知りたい方は [14] に書いてあるため是非一度目を通していただきたい.

多重ゼータ関数の研究は上で挙げたものの他に、例えば次のようなトピックが研究されている.

- 関数等式 [13]
- 平均値 [5, 7, 18]
- オーダー評価 [8, 9, 10, 11]
- 零点 [15, 16, 21]
- 普遍性 (ユニバーサルティ) [2, 20, 21]
- 関数関係式 [4, 6, 17]

以下では、それぞれの研究について簡単に述べる。

### ●関数等式

リーマンゼータ関数の関数等式については

$$\zeta(s) \longleftrightarrow \zeta(1-s)$$

というきれいな関係が存在することが知られている。一方、多重ゼータ関数の場合には2重ゼータ関数についてのみ関数等式が知られており

$$\zeta(s_1, s_2) \longleftrightarrow \zeta(1-s_2, 1-s_1)$$

という関係があるが、ゼータ関数以外の項が現れるため、リーマンゼータ関数のようなきれいな対称性は一般に存在しない(詳しくは [13] を参照)。しかし(ゼータ関数以外の項)=0 という超平面上では2重ゼータ関数も対称性を持つことが知られている。また、3重以上の多重ゼータ関数の関数等式は知られていない。

### ●平均値

リーマンゼータ関数の  $2k$  乗平均値といえば

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt$$

という積分であり、この積分は各  $\sigma \geq 1/2$  に対して  $O(T^{1+\varepsilon})$  と評価できるだろうと予想されている。ただし  $\varepsilon > 0$  は任意の実数であり、 $O$ -定数は  $k$  と  $\varepsilon$  に依存する。この予想は2乗と4乗の場合には既に解決されているが、6乗以上の平均値評価は未解決となっている。この問題の多重ゼータ関数への類似として

$$\int_2^T |\zeta(\sigma_1 + it_1, \dots, \sigma_r + it_r)|^2 dt_j$$

$$\int_2^T |\zeta(\sigma_1 + it, \sigma_2 + it)|^2 dt$$

といった形の2乗平均値が主に計算されている [5, 7, 18]。

### ●オーダー評価

リーマンゼータ関数の有名なオーダー評価として、 $|t| \rightarrow \infty$  のとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$|\zeta(\sigma + it)| = \begin{cases} O_\varepsilon(|t|^{(1-\sigma)/3+\varepsilon}) & (\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1) \\ O_\varepsilon(|t|^{(3-4\sigma)/6+\varepsilon}) & (0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

という結果が知られている<sup>†</sup>。(実際にはこの評価は様々な数学者により改良が重ねられている。) この評価は最終的に

$$|\zeta(\sigma + it)| = \begin{cases} O_\varepsilon(|t|^\varepsilon) & (\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1) \\ O_\varepsilon(|t|^{1/2-\sigma+\varepsilon}) & (0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

まで改善されるだろうと予想されている(Lindelöf 予想)。これらの評価の2重及び3重ゼータ関数版が研究されており、例えば3重の場合には、 $t_1, t_2, t_3$  をある条件の下で大きくしたときに

$$\zeta(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2, \sigma_3 + it_3)$$

$$= \begin{cases} O(|t_1|^2 \log^2 |t_1|) & (\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \\ O(|t_1|^{2-2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3} \log^3 |t_1|) & (0 \leq \sigma_j < 1 (j=1, 2, 3), \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 > 0) \end{cases}$$

<sup>†</sup> $O_\varepsilon$  とは  $O$ -定数が  $\varepsilon$  の取り方に依存していることを意味する。

という評価が成り立つことが示されている [10].

### ● 零点

リーマンゼータ関数の零点についてはリーマン予想があり、全ての非自明零点は臨界線上にあると予想されている。一方、多重ゼータ関数の場合には臨界線のような零点の並ぶ線はないことが知られている。実際、[21] では全ての変数を揃えた多重ゼータ関数  $\zeta(s, \dots, s)$  の非自明零点について扱っており、任意の  $1/2 < a < b < 1$  に対して  $\zeta(s, \dots, s)$  の零点が  $a < \sigma < b, 0 < t < T$  の範囲に  $\asymp T$  だけ存在することを示している<sup>‡</sup>。また、[15] と [16] では計算機を使って零点の位置を図示しているが、それを見るとリーマン予想のように零点がきれいに並びそうもないことが見て取れる。

### ● 普遍性

リーマンゼータ関数は普遍性（ユニバーサリティ）を持つことが知られている。リーマンゼータ関数の普遍性を簡単に説明すると次のような定理である。

$K$  を  $1/2 < \text{Re}(s) < 1$  内のコンパクト集合で補集合が連結であるものとし、 $f(x)$  は  $K$  上連続で零点を持たず、 $K$  の内部で正則な関数とする。このとき  $\zeta(s)$  の虚部方向への並行移動  $\zeta(s + it)$  によって  $f(x)$  を近似できる。すなわち任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $|\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon$  が全ての  $s \in K$  に対して成り立つ  $\tau > 0$  が存在する。（しかもこのような  $\tau$  が正の密度で存在することが知られている。）

この性質は  $\zeta(s)$  がどんな非零正則関数でも近似できることを主張しており、帯領域  $0 < \text{Re}(s) < 1$  におけるリーマンゼータ関数の把握しにくさを表している。

多重ゼータ関数も普遍性を持つかどうか調べられている。[21] では全ての変数を揃えた  $\zeta(s, \dots, s)$  の普遍性について述べており、[20] ではフルヴィッツ型をした多重ゼータ関数の普遍性についての結果を与えている。サマースクール期間中に多重ゼータ関数の普遍性を扱った原稿 [2] が arXiv にあがった。そのアブストラクトによると一般の多重ゼータ関数について普遍性が成り立つことを証明しているようであるが、講演者はこれが正しいかどうかを現時点で確認できていない。

### ● 関数関係式

多重ゼータ値の間の関係式についてはこれまでの講演でいくつも見てきた。これらの関係式が整数点のみでなくより広い範囲で成り立たないか、ということ調べるのが関数関係式の研究である。例えば  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$  に対して和公式

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 2}} \zeta(k_1, k_2) = \zeta(k)$$

が成り立つことが知られているが、これは  $\Re(s) > 1$  で成り立つ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta(s-n-2, n+2) - \zeta(-n, s+n)) = \zeta(s)$$

という関係式の  $s = k$  の部分となっている [4]。このように値の関係式がより広い範囲に拡張可能かどうか調べることがこの研究のメインテーマとなっている。[6] では単純な拡張ができないことが示されており、上の拡張のように無限和を取り入れたり、他の型の多重ゼータ関数を扱う必要がでてくるが、特殊値の関係式と関数の関係式を結ぶ面白い研究である。

各研究項目について軽く紹介したが、どの研究も道半ばであり調べるべきことがたくさん残っている。興味のある人は是非、多重ゼータ関数の研究に参加しよう！

<sup>‡</sup>  $f(T) \asymp T$  とは正定数  $C_1$  と  $C_2$  が存在して  $C_1 T < f(T) < C_2 T$  という意味である。

## 参考文献

- [1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa, *An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith., **98** (2001), 107–116.
- [2] J. Andersson, *Voronin Universality in several complex variables*, arXiv:1809.03444.
- [3] F. V. Atkinson, *The mean value of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **81** (1949), 353–376.
- [4] M. Hirose, H. Murahara, and T. Onozuka, *Sum formula for multiple zeta function*, arXiv:1808.01559.
- [5] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On certain mean values of multiple zeta-functions*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **64** (2015), 19–17.
- [6] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On the functional relations for the Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Tokyo J. Math., advance publication.
- [7] S. Ikeda, K. Matsuoka, and Y. Nagata, *On certain mean values of the double zeta-function*, Nagoya Math. Journal **217** (2015), 161–190.
- [8] H. Ishikawa and K. Matsumoto, *On the estimation of the order of Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Illinois J. Math., **47**, 2003, 1141–1166.
- [9] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, *Bounds for double zeta-functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, 2006, 445–464.
- [10] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, *Bounds for triple zeta-functions*, Indag. Mathem., **19**, 2008, 97–114.
- [11] I. Kiuchi, Y. Tanigawa, and W. Zhai, *Analytic properties of double zeta-functions*, Indag. Mathem., **21**, 2011, 16–29.
- [12] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millenium (Urbana, 2000), Vol. 11, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.
- [13] K. Matsumoto, *Functional equation for double zeta-functions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **136** (2004), 1–7.
- [14] K. Matsumoto, *多重ゼータ関数の解析的理論とその応用*, 数学 **59** (1) (2007), 24–45.
- [15] K. Matsumoto and M. Shōji, *Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function I*, Mosc. J. Comb. Number Theory **4** (2014), 21–39.
- [16] K. Matsumoto and M. Shōji, *Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function II*, arXiv:1606.03806.
- [17] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Functional relations for various multiple zeta-functions*, Analytic Number Theory (Kyoto, 2005), RIMS Kōkyūroku no.1512 (2006), 179–190.
- [18] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Mean value theorems for the double zeta-function*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 383–406.
- [19] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 97, Cambridge University Press (2006).

- [20] T. Nakamura, *Zeros and the universality for the Euler-Zagier-Hurwitz type of multiple zeta-functions*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), no. 4, 691–700.
- [21] T. Nakamura and L. Pańkowski, *On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions*, Math. Z. **284** (2016), 23–39.
- [22] T. Onozuka, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers*, Funct. Approx. Comment. Math., **49** (2013), 331–348.
- [23] Y. Sasaki, *Multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers*, Acta Arith. **136** (2009), 299–317.
- [24] I. Wakabayashi, 多変数関数論 (数学のかんどころ 21) , 共立出版 (2013).
- [25] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**, 2000, 1275–1283.

## Appendix

第3節の証明では主要項以外の項について、解析接続と整数点の周りでの評価を省略した。ここではそれらについて説明する。

### ●解析接続・その1

まず始めに  $\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_1^\infty$  積分, つまり

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_1^\infty \prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r$$

の解析接続を見る。この積分の正則な範囲は,  $x_2$  から  $x_r$  の積分の収束範囲を見ることにより次の条件で与えられる。

$$x_j \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1, \Re(s_{j-1} - 1) > -1 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

$x_2$  から  $x_r$  の積分区間を分割し,  $2^{r-1}$  個の和に書き直す。

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 = \left( \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right) \cdots \left( \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right)$$

これにより上で書いた  $x_2, \dots, x_r$  の収束範囲は, 各項に対して片方ずつでくる。例えば  $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$  積分についての収束範囲は次の条件で与えられる。

$$x_j \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

このように  $2^{r-1}$  個の各積分は各  $x_j$  に対して1つの不等式で収束範囲が与えられるので, この収束範囲を広げられればより広い範囲に接続できる。ここでは今, 例に挙げた  $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$  積分についての有理型接続を見ていこう。まず  $x_2$  積分の収束範囲を広げる。被積分関数を  $x_2^{s_r(2)-r}$  とそれ以外の部分の積だと思い, 部分積分を行う。(ただし  $s_j$  たちの実部は十分大きいものとする。)

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r \\ &= \frac{1}{s_r(2) - r + 1} \left( \frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+1} \\ & \times \left[ \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 dx_3 dx_4 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\ & - \frac{1}{s_r(2) - r + 1} \\ & \times \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 \cdots dx_r \end{aligned}$$

これにより初項からは  $x_2$  の積分がなくなり, 第2項の  $x_2$  の肩の数字が1大きくなり積分の収束範囲が1だけ広がる。(実際には  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  微分した部分の大きさを見なければ収束範囲の広がりには分からないが, これについては

後述する.) それに伴い  $s_r(2) - r + 1 = 0$  が 1 位の極としてでてくる. さらに第 2 項について部分積分を行うと

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r \\
&= \frac{1}{s_r(2) - r + 1} \left( \frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+1} \\
& \times \left[ \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 dx_3 dx_4 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\
& - \frac{1}{(s_r(2) - r + 1)_2} \left( \frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+2} \\
& \times \left[ \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 dx_3 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\
& + \frac{1}{(s_r(2) - r + 1)_2} \\
& \times \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r+2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 \cdots dx_r
\end{aligned}$$

この右辺を見てみると初項と第 2 項には  $x_2$  の積分がなく, 第 3 項の  $x_2$  の肩の数字が左辺より 2 大きくなり積分の収束範囲が 2 だけ広がる. それに伴い  $s_r(2) - r + 1 = 0$  と  $s_r(2) - r + 2 = 0$  が 1 位の極としてでてくる. このような部分積分を  $C_2$  回繰り返すことにより

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r \\
&= \sum_{J=1}^{C_2} (-1)^{J-1} \frac{1}{(s_r(2) - r + 1)_J} \left( \frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+J} \\
& \times \left[ \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial^{J-1}}{\partial x_2^{J-1}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 dx_3 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\
& + \frac{(-1)^{C_2}}{(s_r(2) - r + 1)_{C_2}} \\
& \times \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r+C_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial^{C_2}}{\partial x_2^{C_2}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 \cdots dx_r
\end{aligned}$$

これにより  $x_2$  の積分に関する収束範囲が  $C_2$  だけ広がり, それに伴い  $s_r(2) - r + 1 = 0, \dots, s_r(2) - r + C_2 = 0$  が 1 位の極としてでてくる. いま右辺は  $C_2 + 1$  個の多重積分の和となっているが, これら全ての  $x_3$  積分に対して同様の部分積分を  $C_3$  回繰り返すと, 上の議論と同様に  $x_3$  積分の収束範囲が  $C_3$  だけ広がり,  $s_r(3) - r + 2 = 0, \dots, s_r(3) - r + 1 + C_3 = 0$  が 1 位の極が現れる. これを  $x_4$  積分,  $x_5$  積分, ... と  $x_r$  積分まで繰り返すことに

より、最終的に解析接続が得られ、接続範囲は次のようになる。

$$x_j \text{の積分の収束範囲} \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1 - C_j \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

$$x_j \text{の積分から現れる極} \cdots s_r(j) - r + j - 2 + 1 = 0, \dots, s_r(j) - r + j - 2 + C_j = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

最後に

$$\frac{\partial^{k_2+\dots+k_r}}{\partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\}$$

の大きさの評価について見る。\$(1-x\_j)^{s\_{j-1}-1}\$ と \$x\_1 \cdots x\_j / (e^{x\_1 \cdots x\_j} - 1)\$ の積の微分になっているが、\$(1-x\_j)^{s\_{j-1}-1}\$ は何回微分しても \$[0, 1/2]\$ 区間で有限な値をとり積分の収束性には影響しない。\$x\_1 \cdots x\_j / (e^{x\_1 \cdots x\_j} - 1)\$ は \$t / (e^t - 1)\$ と \$t = x\_1 \cdots x\_j\$ の合成関数の微分となっている。まずはじめに \$x\_1 \cdots x\_j\$ の方を考えると、\$x\_1 \cdots x\_j / (e^{x\_1 \cdots x\_j} - 1)\$ を複数回微分して \$x\_1 \cdots x\_j\$ とその微分が複数個でてきても高々多項式オーダーであり、\$x\_2\$ から \$x\_r\$ の積分の収束性には影響なく、\$x\_1\$ については \$x\_1 \to \infty\$ のとき多項式オーダーで増大する。次に \$t / (e^t - 1)\$ についての微分だが、これは \$t = 0\$ を含む小さな複素開近傍上で正則関数であるため何度微分しても正則関数になり、そのため \$t / (e^t - 1)\$ を何回微分しても \$t = 0\$ で発散しない。また \$k\$ 回微分したときには “\$(e^t\$ と \$t\$ の多項式) / \$(e^t - 1)^{k+1}\$” という形で書けるが、このとき分子の \$e^t\$ の次数は \$k\$ 以下であることが容易に示せるため、\$t / (e^t - 1)\$ の微分は \$t\$ が大きいところでは指数オーダーで減衰していく。よってこの部分も \$x\_2\$ から \$x\_r\$ の積分の収束性に影響を与えない。また、\$x\_2\$ から \$x\_r\$ について微分しても \$x\_1 / (e^{x\_1} - 1)\$ は残っており、この部分が指数オーダーで減衰するため \$x\_1\$ についての積分はいつでも収束する。以上より、部分積分によりでてくる微分は各積分の収束性に影響を与えないことが分かる。

今見たのは \$\int\_0^{1/2} \cdots \int\_0^{1/2}\$ 積分であった。もし \$x\_j\$ について \$\int\_{1/2}^1\$ 積分の方の解析接続を見なければ、\$x\_j^{s\_r(j)-r+j-2}\$ と \$(1-x\_j)^{s\_{j-1}-1}\$ の役割を替えて部分積分すればよい。一般に \$x\_{j\_k}\$ について \$\int\_0^{1/2}\$ 積分をし、\$x\_{j\_l}\$ について \$\int\_{1/2}^1\$ 積分をした項について同様の部分積分を行うと次の収束範囲と極が得られる。

$$x_{j_k} \text{の積分の収束範囲} \cdots \Re(s_r(j_k) - r + j_k - 2) > -1 - C_{j_k}$$

$$x_{j_l} \text{の積分の収束範囲} \cdots \Re(s_{j_l-1} - 1) > -1 - C_{j_l}$$

$$x_{j_k} \text{の積分から現れる極} \cdots s_r(j_k) - r + j_k - 2 + 1 = 0, \dots, s_r(j_k) - r + j_k - 2 + C_{j_k} = 0$$

$$x_{j_l} \text{の積分から現れる極} \cdots s_{j_l-1} - 1 + 1 = 0, \dots, s_{j_l-1} - 1 + C_{j_k} = 0$$

## ● 解析接続・その2

次に

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \left( \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} - \sum_{k=0}^{n_r(1)+r} \sum_{p_1+\dots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) dx_1 \cdots dx_r$$

の解析接続を見る。この積分は次の範囲で収束し正則である。

$$x_1 \text{の積分の収束範囲} \cdots \Re(s_r(1) + n_r(1)) > -1$$

$$x_j \text{の積分の収束範囲} \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1, \Re(s_{j-1} - 1) > -1 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

\$x\_1\$ 積分の収束範囲は次のように積分を書き直したときに、後半部分が \$[0, 1]^r\$ 上で有界な関数であることから分

かる。

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{s_r(1)+n_r(1)} \prod_{j=2}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_j-1} \\
& \left( \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} - \sum_{k=0}^{n_r(1)+r} \sum_{p_1+\cdots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) x_1^{-n_r(1)-r-1} dx_1 \cdots dx_r \\
& = \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{s_r(1)+n_r(1)} \prod_{j=2}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_j-1} \\
& \left( \sum_{k=n_r(1)+r+1}^{\infty} \sum_{p_1+\cdots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)-n_r(1)-r-1} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) dx_1 \cdots dx_r
\end{aligned}$$

先ほど同様、 $x_2$  から  $x_r$  までの積分を  $\int_0^{1/2}$  と  $\int_{1/2}^1$  に分けるが、ここではまた  $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$  について見てみることにする。先ほどと同様に部分積分を繰り返せば  $x_2$  から  $x_r$  の積分の収束範囲は  $C_2$  から  $C_r$  だけそれぞれ広がる。またそれに伴い先ほどと同様の 1 位の極がでてくる。微分されたもの

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{k_2+\cdots+k_r}}{\partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_j-1} \right. \\
& \quad \times \left. \left( \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} - \sum_{k=0}^{n_r(1)+r} \sum_{p_1+\cdots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) x_1^{-n_r(1)-r-1} \right\}
\end{aligned}$$

のオーダーを調べる。微分される前の関数は  $[0, 1/2]^r$  を含む小さな複素開集合上で正則なため、微分したものは  $[0, 1/2]^r$  上で有界となる。このことからこの微分は積分の収束性に影響を与えない。

$\int_{1/2}^1$  積分の方の解析接続を見たければ、 $x_j^{s_r(j)-r+j-2}$  と  $(1-x_j)^{s_j-1}$  の役割を入れ替えて部分積分すればよい。 $x_{j_k}$  について  $\int_0^{1/2}$  積分をし、 $x_{j_i}$  について  $\int_{1/2}^1$  積分をした項について、最終的には次の収束範囲と極が出る。

$$\begin{aligned}
& x_1 \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(1) + n_r(1)) > -1 \\
& x_{j_k} \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j_k) - r + j_k - 2) > -1 - C_{j_k} \\
& x_{j_i} \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_{j_i-1} - 1) > -1 - C_{j_i} \\
& x_{j_k} \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_r(j_k) - r + j_k - 2 + 1 = 0, \dots, s_r(j_k) - r + j_k - 2 + C_{j_k} = 0 \\
& x_{j_i} \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_{j_i-1} - 1 + 1 = 0, \dots, s_{j_i-1} - 1 + C_{j_i} = 0
\end{aligned}$$

### ● 負の整数点の周りでの評価

Theorem 3.1 の証明で、解析接続・その 1 とその 2 に登場する積分たちは負の整数点  $(-n_1, \dots, -n_r)$  の周りで誤差項に含まれると述べた。そのことを確かめよう。上の議論により、各積分からは 1 位の極がたくさん出てきていたが、極の位置は 1 ずつ異なっていたので、各  $x_j$  積分 ( $j = 2, 3, \dots, r$ ) からでてくる極で整数点  $(-n_1, \dots, -n_r)$  を通るものは多くても 1 つである。そのため  $(-n_1, \dots, -n_r)$  は多くても  $r-1$  個の極の通り道になっている。いま  $r-1$  個の極が通っている場合を考えよう。 $\int_0^{1/2}$  積分により現れる極因子は  $(s_r(j) + n_r(j))^{-1}$  であり、 $\int_{1/2}^1$  積分により現れる極因子は  $(s_{j-1} + n_{j-1})^{-1}$  である。一方、もともとの積分の前には  $(\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r))^{-1}$  が掛けられていたことを思い出そう。ガンマ関数は非正の整数点で (1 位の) 極なので、その逆数は零点である。つまり

$$(\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r))^{-1} = O(|(s_1 + n_1) \cdots (s_r + n_r)|)$$

と評価できる。状況をわかりやすくするために  $s_j + n_j = \varepsilon_j$  とおき、 $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$  積分の積分区間が  $\int_0^{1/2}$  で、他

の変数の積分区間が  $\int_{1/2}^1$  だったとしよう ( $j_1 < \dots < j_K$ ). このとき極因子と零点因子の積は

$$\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r \cdot \prod_{k=1}^K \frac{1}{\varepsilon_r(j_k)} \cdot \prod_{\substack{2 \leq j \leq r \\ j \neq j_k (1 \leq k \leq K)}} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} = \prod_{k=1}^K \frac{\varepsilon_{j_k-1}}{\varepsilon_r(j_k)} \cdot \varepsilon_r = \varepsilon_{j_1-1} \prod_{k=1}^{K-1} \frac{\varepsilon_{j_{k+1}-1}}{\varepsilon_r(j_k)} \cdot \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r(j_K)}$$

となる.  $j_{k+1} - 1 \geq j_k$  なので Theorem 3.1 の仮定より  $\varepsilon_{j_{k+1}-1}/\varepsilon_r(j_k) = O(1)$  及び  $\varepsilon_r/\varepsilon_r(j_K) = O(1)$  が成り立ち, この項は  $O(\varepsilon_{j_1-1})$  と評価でき誤差項となる.

# 特異点解消法と繰込み法

小見山尚 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D2)

## 0 Introduction

以下に与えられる級数を多重ゼータ関数 (以下 MZF と書く) と呼ぶ:

$$\zeta(s_1, \dots, s_n) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_n^{s_n}},$$

(ここで、 $s_1, \dots, s_n$  は複素数を取る)。この級数は、

$$\{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re(s_{n-k+1} + \dots + s_n) > k \ (1 \leq k \leq n)\}$$

において絶対収束することが知られており、2000年の初頭、Zhao([11])と秋山, 江上, 谷川([1])が独立にこの関数が $\mathbb{C}^n$ 上に有理型接続できることを示した。[1]では特に次のようにMZFの具体的な特異点を与えている。

**命題 0.1** ([1]). 関数 $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ の特異点の集合は次で与えられる。

$$\left\{ (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \left| \begin{array}{l} s_n = 1, \ s_{n-1} + s_n = 2, 1, 0, -2, -4, \dots, \\ s_{n-k+1} + \dots + s_n = k - r \ (3 \leq k \leq n, \ r \in \mathbb{N}_0) \end{array} \right. \right\}.$$

この命題から $n \geq 2$ に対しては $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ の特異点が無数に存在することが分かる( $n \geq 3$ では非正整数点はすべて特異点になる)。

非正整数点における“適切な”特殊値を定めるために、Guo, Zhang([6])によって繰込み法が導入された。これはMZFの正の整数点における特殊値が満たす関係式を満たすように負の整数点での値を定める手法である。Guo, Zhangの後、彼等の方法に倣ってManchon, Paycha([10])やEbrahimi-Fard, Manchon, Zinger([3],[4])などによる異なる繰込み法も導入されている。また、繰込み法とは独立に古庄, 小森, 松本, 津村([5])による特異点解消法と呼ばれる手法も導入されている。この手法は上記のように無数に存在するMZFの特異点を一斉に解消するように与えられている。

このように幾つかの異なる手法が与えられているが、取り分けEbrahimi-Fard, Manchon, Zinger([3])による繰込み法で与えられる特殊値と、古庄, 小森, 松本, 津村([5])による特異点解消法で与えられる特殊値の間には明示的な関係が与えられている([7])。また、この関係から特異点解消法による値が繰込み法の満たす関係式を満たすことも分かる([8])。以下では2つの導入法についての解説とその性質について述べる。

# 1 特異点解消法

特異点解消法は多重ゼータ関数の無数の特異点を一斉に消失させることを目的に導入された方法で、これにより  $\mathbb{C}^n$  上正則関数が与えられる。以下で [5] の基本的な事項を確認しておこう。

まず  $c \in \mathbb{R}$  に対して母関数  $\tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \dots, t_n; c) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$  を次のように定める ([5] Definition 1.9)。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \dots, t_n; c) &:= \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{\exp\left(\sum_{k=j}^n t_k\right) - 1} - \frac{c}{\exp\left(c \sum_{k=j}^n t_k\right) - 1} \right) \\ &= \prod_{j=1}^n \left( \sum_{m=1}^{\infty} (1 - c^m) B_m \frac{\left(\sum_{k=j}^n t_k\right)^{m-1}}{m!} \right). \end{aligned}$$

ここで、 $B_m$  ( $m \geq 0$ ) はベルヌーイ数で

$$\frac{x}{e^x - 1} := \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} x^m$$

によって与えられるとする。

**定義 1.1** ([5] Definition 3.1).  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  に対し、

$$\begin{aligned} &\zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_n) \\ &:= \lim_{\substack{c \rightarrow 1 \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}} \frac{1}{(1-c)^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(e^{2\pi i s_k} - 1) \Gamma(s_k)} \int_{\mathcal{C}^n} \tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \dots, t_n; c) \prod_{k=1}^n t_k^{s_k-1} dt_k \end{aligned} \quad (1)$$

と定めこれを **desingularized MZF** と呼ぶ。ここで  $\mathcal{C}$  は実軸上を無限大から  $\varepsilon$  まで動き原点の周りを反時計回りに一周回って無限大へ帰るような経路とする。

**注意 1.2.** *desingularized MZF* の定義は一見すると *MZF* と関係ないように見えるが、式 (1) において  $c$  の極限を  $c \rightarrow 1$  から  $c \rightarrow 0$  に置き換えて形式的に計算すると *MZF* の積分表示が得られる。

この desingularized MZF は次のような性質を持つ。

**命題 1.3** ([5] Theorem 3.4). desingularized MZF は整関数として  $\mathbb{C}^n$  上に解析接続できる。

さて、desingularized MZF のもう一つの性質を述べるため次の母関数を導入する。不定元  $u_j, v_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) に対し  $\mathcal{G}((u_j), (v_j)) \in \mathbb{Z}[u_j, v_j^{\pm 1} | 1 \leq j \leq n]$  を

$$\mathcal{G}((u_j), (v_j)) := \prod_{j=1}^n (1 - (u_j v_j + \cdots + u_n v_n)(v_j^{-1} - v_{j-1}^{-1}))$$

とする。ただし  $v_0^{-1} := 0$  としておく。また整数の集合  $\{a_{\mathbf{l}, \mathbf{m}}\}$  を

$$\mathcal{G}((u_j), (v_j)) = \sum_{\substack{\mathbf{l}=(l_j) \in \mathbb{N}_0^n \\ \mathbf{m}=(m_j) \in \mathbb{Z}^n \\ \sum_{j=1}^n m_j=0}} a_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \prod_{j=1}^n u_j^{l_j} v_j^{m_j}$$

によって与える ( $\mathcal{G}((u_j), (v_j))$  の各因子における  $v_j$  の指数の和は 0 になるので、和の条件に  $\sum_{j=1}^n m_j = 0$  がある)。このとき、次が成り立つ。

**命題 1.4** ([5] Theorem 3.8). 任意の  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$  に対し、

$$\zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\substack{\mathbf{l}=(l_j) \in \mathbb{N}_0^n \\ \mathbf{m}=(m_j) \in \mathbb{Z}^n \\ \sum_{j=1}^n m_j=0}} a_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \left( \prod_{j=1}^n (s_j)_{l_j} \right) \zeta(s_1 + m_1, \dots, s_n + m_n).$$

ただし  $(s)_k$  は Pochhammer 記号で、 $(s)_0 := 1$  かつ  $k \in \mathbb{N}$  と  $s \in \mathbb{C}$  に対し、 $(s)_k := s(s+1) \cdots (s+k-1)$  で与えられるものとする。

**例 1.5.** 簡単な場合を具体的に書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{FKMT}}(s) &= (1-s)\zeta(s), \\ \zeta_{\text{FKMT}}(s_1, s_2) &= (s_1-1)(s_2-1)\zeta(s_1, s_2) + s_2(s_2+1-s_1)\zeta(s_1-1, s_2+1) \\ &\quad - s_2(s_2+1)\zeta(s_1-2, s_2+2). \end{aligned}$$

**定義 1.6** ([5]). desingularized MZF の  $(s_1, \dots, s_n) = (-k_1, \dots, -k_n)$  での値  $\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n)$  を特異点解消値 (desingularized value) と呼ぶ。

この特異点解消値の母関数  $Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$  を

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) := \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(-t_1)^{k_1} \dots (-t_n)^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n) \quad (2)$$

と定めるとき、次が成り立つ。

**命題 1.7** ([5] Theorem 3.7). 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し、

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{(1 - t_i - \dots - t_n) e^{t_i + \dots + t_n} - 1}{(e^{t_i + \dots + t_n} - 1)^2}.$$

この母関数の形から次のような特異点解消値の間の漸化式を得る。

**系 1.8** ([7]). 任意の  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  に対し、

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) = Z_{\text{FKMT}}(t_2, \dots, t_n) \cdot Z_{\text{FKMT}}(t_1 + \dots + t_n). \quad (3)$$

これを  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  として  $\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n)$  で書き換えると

$$\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n) = \sum_{\substack{i_2 + j_2 = k_2 \\ \vdots \\ i_n + j_n = k_n}} \prod_{a=2}^n \binom{k_a}{i_a} \zeta_{\text{FKMT}}(-i_2, \dots, -i_n) \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1 - j_2 - \dots - j_n) \quad (4)$$

を得る。但しここで  $\binom{k_a}{i_a} := \frac{k_a!}{i_a!(k_a - i_a)!}$  とした。

## 2 繰込み法

次に繰込み法について見て行こう。繰込み法 (**Renormalization**) とは、そもそも量子場理論において値が発散してしまう計算結果に対し発散項を適切に除去することでその発散を解消する操作の事である。Connes と Kreimer は [2] において、Hopf 代数の言葉を用いて renormalization が行えることを示した。そして Guo, Zhang はこの方法に基づいて MZF の特殊値を導入したため、彼らの手法にはこの名が冠せられている。以下では [3] の繰込み値の構成について簡潔に述べていく。

文字  $d, y$  の語で生成される  $\mathbb{Q}$  上ベクトル空間  $\mathbb{Q}\langle d, y \rangle$  を考える ( $\mathbb{Q}\langle d, y \rangle$  は empty word  $\mathbf{1}$  を含むとする)。

**定義 2.1.** ベクトル空間  $\mathbb{Q}\langle d, y \rangle$  の部分ベクトル空間  $\mathcal{A} := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\langle d, y \rangle y$  に対し線形写像  $\sqcup_0 : \mathcal{A}^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{A}$  を次のように帰納的に定義する:

$$\mathbf{1} \sqcup_0 w := w \sqcup_0 \mathbf{1} := w, \quad (5)$$

$$yu \sqcup_0 v := u \sqcup_0 yv := y(u \sqcup_0 v), \quad (6)$$

$$du \sqcup_0 dv := d(u \sqcup_0 dv) - u \sqcup_0 d^2v, \quad (7)$$

ただし、 $u, v, w$  は  $d, y$  の語とする。すると  $(\mathcal{A}, \sqcup_0)$  は非可換代数になる。

この非可換代数  $(\mathcal{A}, \sqcup_0)$  の両側イデアル  $\mathcal{I}$  を

$$\{d^k \{d(u \sqcup_0 v) - du \sqcup_0 v - u \sqcup_0 dv\} \mid u, v \text{ は末尾が } y \text{ の } d, y \text{ の語}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

によって生成される両側イデアルとして、それによる  $\mathcal{A}$  の商を

$$\mathcal{H} := \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

とすると [3, Proposition 3.5] により  $\mathcal{H}$  は可換代数になる。

さて、 $\delta = t \frac{d}{dt}$ 、 $x = \frac{t}{1-t}$  と置くと  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\delta^{k_n} x \cdots \delta^{k_1} x = \text{Li}_{-k_1, \dots, -k_n}(t)$$

となることが分かる。ここで、 $\text{Li}_{k_1, \dots, k_n}(t)$  は多重ポリログで

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_n}(t) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_n} \frac{t^{m_n}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

$(k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z})$  と定義される関数であり、 $|t| < 1$  において絶対収束する。また、ライプニッツルールにより  $t$  の関数  $f, g$  に対して

$$\delta(f)\delta(g) = \delta(f\delta(g)) - f\delta^2(g)$$

となり、これは定義 2.1 の式 (7) に相当している。よって次が成り立つ。

**定理 2.2.** 可換代数  $\mathcal{H}$  は非正整数点のインデックスを持つ多重ポリログたちのなす代数と同型になる。

**注意 2.3.** 代数射  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes 2}$  を

$$\Delta(d) := 1 \otimes d + d \otimes 1, \quad \Delta(y) := 1 \otimes y + y \otimes 1$$

として定める。 $\mathcal{I}$  は *coideal* なので代数射  $\tilde{\Delta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes 2}$  を誘導する。この写像  $\tilde{\Delta}$  により  $\mathcal{H}$  はホップ代数になる (すなわち  $\tilde{\Delta}$  は  $\mathcal{H}$  の余積になる)。

上記の  $\mathcal{H}$  について、次の定理が成り立つ。

**定理 2.4** ([2], [3], [9]: **algebraic Birkhoff decomposition**). 代数射  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$  に対して、

$$\phi = \phi_-^{*(-1)} * \phi_+ \quad (8)$$

を満たす代数射  $\phi_- : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[\frac{1}{z}]$  と  $\phi_+ : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]]$  が一意に存在する。

**注意 2.5.** 代数射  $f, g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$  に対し、代数射  $f * g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$  を

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \tilde{\Delta}$$

と定める (これを **convolution product** と呼ぶ)。ここで  $m$  は  $\mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$  の積で、 $\tilde{\Delta}$  は  $\mathcal{H}$  の余積である。また、集合

$$G := \{f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]; \text{代数射}\}$$

は  $*$  により群になる。式 (8) の  $\phi_-^{*(-1)}$  は  $G$  における  $\phi_-$  の逆元を表す。

さて、 $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  に対し  $\mathbb{Q}$ -線形写像  $\phi_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$  を次のように定めよう。

$$d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y \mapsto \phi_0(d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y)(z) := \partial_z^{k_1} (x(e^z) \partial_z^{k_2}) \cdots (x(e^z) \partial_z^{k_n}) (x(e^z)).$$

但し、 $\phi_0(1) := 1$  であり  $\partial_z$  は  $z$  による微分とする。

**命題 2.6.** 線形写像  $\phi_0$  は代数射になる。

*Proof.* 写像  $\phi_0$  は2つの写像

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{Q}(t); d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y \longmapsto \delta^{k_1}x \cdots \delta^{k_n}x, \\ \xi : \text{Im}\psi &\longrightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]; t \longmapsto e^z \end{aligned}$$

によって

$$\phi_0 = \xi \circ \psi$$

と表せる。ここで、 $\psi$  の  $\delta, y$  は定理 2.2 の上の議論の  $\delta = t \frac{d}{dt}$ ,  $x = \frac{t}{1-t}$  である。定理 2.2 の上で述べた事から  $\psi$  は代数射であるので  $\phi_0$  も代数射になる。□

定理 2.4 と命題 2.6 により、写像  $\phi_0$  から代数射  $\phi_{0,+} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]]$  を得る。

定義 2.7 ([3] §4.2).  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, \dots, -k_n) := \lim_{z \rightarrow 0} \phi_{0,+}(d^{k_n} y \cdots d^{k_1} y)(z)$$

を繰込み値 (renormalized value) と呼ぶ。

写像  $\phi_{0,+}$  は代数射なので、 $\zeta_{\text{EMS}}$  には積和公式<sup>1</sup>が成り立つ。積和公式のより一般の場合については、特異点解消値の場合と併せて次節 (命題 3.4) で述べることにして、ここでは簡単な例だけを挙げておく。

例 2.8.  $a, b, c \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{EMS}}(-a)\zeta_{\text{EMS}}(-b) &= \sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{b}{k} \zeta_{\text{EMS}}(-a-k, -b+k), \\ \zeta_{\text{FKMT}}(-a, -b) \cdot \zeta_{\text{FKMT}}(-c) &= \sum_{k=0}^c (-1)^k \binom{c}{k} \zeta_{\text{FKMT}}(-a, -b-k, -c+k). \end{aligned}$$

また、この繰込み値については次のような性質がある。

命題 2.9 ([3] Theorem 4.3). 任意の  $k_1 \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k) = \zeta(-k)$$

が成り立つ。また、 $k_1 + k_2$  が奇数になる  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, -k_2) = \zeta(-k_1, -k_2)$$

が成り立つ。

(これは、MZP の非正整数な正則点での値と繰込み値が一致することを示している。)

### 3 特異点解消値と繰込み値の関係

前節までに説明した特異点解消値と繰込み値の間関係について述べよう。まず繰込み値の母関数  $Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$  を

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) := \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(-t_1)^{k_1} \cdots (-t_n)^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} \zeta_{\text{EMS}}(-k_1, \dots, -k_n)$$

とする。このとき、次が成り立つ。

<sup>1</sup>積和公式とは二つの  $\zeta_{\text{EMS}}$  の積を  $\zeta_{\text{EMS}}$  の線形和に書き換える等式を指す。

定理 3.1 ([7]). 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - e^{-t_i - \dots - t_n}}{t_i + \dots + t_n} \cdot Z_{\text{FKMT}}(-t_1, \dots, -t_n)$$

が成り立つ。

この定理は、 $\zeta_{\text{FKMT}}$  と  $\zeta_{\text{EMS}}$  が互いに有限線形和で表し合えることを表す。

例 3.2.  $k \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} \frac{(-1)^j}{i+1} \zeta_{\text{FKMT}}(-j),$$

$$\zeta_{\text{FKMT}}(-k) = (-1)^k \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} B_i \cdot \zeta_{\text{EMS}}(-j).$$

命題 1.7 と定理 3.1 から次の系を得る。

系 3.3 ([7]). 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{(t_i + \dots + t_n) - (e^{t_i + \dots + t_n} - 1)}{(t_i + \dots + t_n)(e^{t_i + \dots + t_n} - 1)}$$

が成り立つ。

この母関数の明示式から  $Z_{\text{EMS}}$  も式 (3) を満たすことが分かる、すなわち

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) = Z_{\text{FKMT}}(t_2, \dots, t_n) \cdot Z_{\text{FKMT}}(t_1 + \dots + t_n). \quad (9)$$

この式と式 (3) から次を得る。

命題 3.4 ([8]).  $\zeta_{\text{FKMT}}$  は  $\zeta_{\text{EMS}}$  と同じ積和公式を満たす、すなわち、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_p) \zeta_{\text{FKMT}}(-l_1, \dots, -l_q) \\ &= \sum_{\substack{i_1 + j_1 = l_1 \\ \vdots \\ i_q + j_q = l_q}} \prod_{a=1}^q (-1)^{i_a} \binom{l_a}{i_a} \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_{p-1}, -k_p - i_1 - \dots - i_q, -j_1, \dots, -j_q). \end{aligned}$$

*Proof.*  $\bullet = \text{FKMT}$  (or EMS) とする。このとき、式 (3) (or 式 (9)) を繰り返し用いることで、次を得る。

$$\begin{aligned} & Z_{\bullet}(s_1, \dots, s_p) Z_{\bullet}(t_1, \dots, t_q) \\ &= Z_{\bullet}(s_1, \dots, s_{p-1}, s_p - t_1 - \dots - t_q, t_1, \dots, t_q) \end{aligned}$$

両辺の係数を比較することで命題の主張を得る。  $\square$

命題 3.4 は非正整数点のインデックス同士の積についてだが、片一方を複素数にまで拡張した形のものも成り立つ。

**命題 3.5** ([8]).  $s_1, \dots, s_p \in \mathbb{C}$  と  $l \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$\zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_p) \zeta_{\text{FKMT}}(-l) = \sum_{i+j=l} (-1)^i \binom{l}{i} \zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_{p-1}, s_p - i, -j).$$

## 参考文献

- [1] S. Akiyama, S. Egami, Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta. Arith. 2001, no. 2, 107–116.
- [2] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, 2000, Comm. Math. Phys. 210(1):249–273.
- [3] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, J. Singer, *The Hopf algebra of (q)multiple polylogarithms with non-positive arguments*, Int. Math. Res. Notices, 2017, Vol. 16, 4882–4922.
- [4] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, J. Singer, *Renormalization of q-regularised multiple zeta values*, 2016, Lett. Math. Phys. 106, no. 3, 365–380.
- [5] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto, H. Tsumura, *Desingularization of complex multiple zeta-functions*, Amer. J. Math. 139 (2017), 147–173

- [6] L. Guo, B. Zhang, *Renormalization of multiple zeta values*, 2008, J. Algebra **319**, no. 9, 3770–3809.
- [7] N. Komiyama, *Equivalence between desingularized and renormalized values of multiple zeta functions at negative arguments*, to appear in IMRN.
- [8] N. Komiyama, *Shuffle-type product formulae of desingularized values of multiple zeta-functions*, arXiv:1804.05568
- [9] D. Manchon, *Hopf algebras in renormalization*, 2008, Handbook of algebra, Vol.5, 365–427.
- [10] D. Manchon, S. Paycha, *Nested sums of symbols and renormalized multiple zeta values*, 2010, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 24, 4628–4697.
- [11] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 2000, no. 5, 1275–1283.

# 多重ゼータ値と $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群

山本 修司 (慶應義塾大学・KiPAS)

## 0 序論

この記事の目的は、多重ゼータ値をコホモロジー論的な立場で取り扱うための枠組みを定式化することである\*1。その出発点は、多重ゼータ値の反復積分表示

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \cdots \frac{dt_k}{t_k} \quad (k = k_1 + \dots + k_r)$$

である。

多様体上の曲線に沿った微分形式の積分とコホモロジー論との関係といえば、まず思いつくのは de Rham の定理

$$\begin{aligned} H_{dR}^1(M, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H_1^B(M, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ [\omega] &\mapsto ([\gamma] \mapsto \int_{\gamma} \omega) \end{aligned}$$

であろう。ここで  $H_{dR}^1$ ,  $H_1^B$  はそれぞれ 1 次 de Rham コホモロジーと特異ホモロジー\*2を表す。この同型を、反復積分によって拡張したのが「Chen の比較定理」であり、この定理を  $M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  という多様体の場合に定式化するのが我々の目標となる。

まず第 1 節で同型の右辺 (Betti side) の定義を行う。 $H_1^B$  は 1 次元サイクルのホモロジー類のなす群だったが、反復積分はホモロジー類に対して well-defined でなくなるので、ホモロジーの代わりにホモトピーを使うことになる。また多重ゼータ値の積分表示では 0 から 1 までを結ぶ線分を使うが、その両端点は多様体  $M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  に属さないなので、接基点という考え方を使得って対応する必要がある。

第 2 節では、同型の左辺 (de Rham side) を定義する。Chen の定理の一般的な定式化にはバー複体というものを使うが、我々に必要な場合は直接記述できるので、ここでは天下一りに定義してしまうことにした。

---

\*1 と言いつつ、最終的な比較同型 (定理 3.1) の両辺は何かのコホモロジーとして現れるわけではない。できるだけ初等的に話をまとめようとしたためにそのような書き方になったが、実はこれらを何らかの意味でコホモロジーとして捉えることも可能である。例えば Betti side の群をコホモロジーとして表す構成法とそれに基づく Chen の定理の証明が [1, §3.5] で解説されている。

\*2 数論幾何の分野ではしばしば Betti ホモロジーと呼ばれる。添字  $B$  は Betti の頭文字である。

最後に第3節で、比較定理の主張を述べる。同型写像が反復積分で与えられることは想定通りであるが、曲線の端点が多様体に属さないことから、積分が発散してしまう場合がある。そこから有限の値を取り出すための「正規化」の手続きを説明する。また比較同型によって、積や余積などの代数構造がどのように対応するか、ということも述べておいた。

本稿を書くにあたっては、主に [1] 第3章と [3] 第5章の記述を参考にした。一般の場合の定式化や証明の詳細、原論文の情報などについては、これらの文献を見ていただくのがよいと思う。

## 1 基本群と接基点 (Betti side)

### 1.1 道の空間と基本群

$M$  を可微分多様体とする。区分的に滑らかな連続写像  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  を  $M$  の道 (path) と呼ぶ。 $\gamma(0), \gamma(1)$  をそれぞれ道  $\gamma$  の始点, 終点という。点  $x, y \in M$  に対して,  $x$  を始点,  $y$  を終点とする道全体の集合を  $\mathcal{P}(M; y, x)$  で表す\*3。またそのホモトピー類の集合を  $\pi(M; y, x)$  で表す:

$$\pi(M; y, x) := \mathcal{P}(M; y, x) / \sim.$$

ここで  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{P}(M; y, x)$  がホモトピック ( $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ) とは, ある連続写像  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  に対して  $H_u(t) = H(u, t)$  と書くとき

$$H_u \in \mathcal{P}(M; y, x) \quad (\forall u \in [0, 1]), \quad H_0 = \gamma_0, \quad H_1 = \gamma_1$$

が成り立つことをいう。

$\gamma \in \mathcal{P}(M; y, x), \gamma' \in \mathcal{P}(M; z, y)$  に対して

$$\gamma'\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ \gamma'(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

とおくと, 道の合成  $\gamma'\gamma \in \mathcal{P}(M; z, x)$  が定まり, さらにホモトピー類の間にも  $[\gamma'][\gamma] = [\gamma'\gamma]$  とすることで合成が誘導される:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M; z, y) \times \mathcal{P}(M; y, x) &\longrightarrow \mathcal{P}(M; z, x) \\ \rightsquigarrow \pi(M; z, y) \times \pi(M; y, x) &\longrightarrow \pi(M; z, x). \end{aligned}$$

これにより, 全ての  $x, y \in M$  に対して集合  $\pi(M; y, x)$  を集めた族  $\pi(M) = (\pi(M; y, x))_{x, y \in M}$  には亜群の構造が入る (基本亜群)。特に  $x \in M$  に対して  $\pi_1(M; x) = \pi(M; x, x)$  とおくと, これは群となる (基本群)。

### 1.2 接基点

以下では話を簡単にするため,  $M = \mathbb{C} \setminus S$ , ただし  $S$  は  $\mathbb{C}$  の有限部分集合, とする。

---

\*3  $\mathcal{P}(M; x, y)$  のように, 始点と終点の順序を逆に書く流儀もある。

$s \in S$  と,  $s$  における  $\mathbb{C}$  の接ベクトル  $v \neq 0$  との組  $(s, v)$  を  $M$  の接基点と呼ぶ. 以下この組を  $v_s$  と書く. また自然な同一視により, 接ベクトル  $v$  を  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  の元とみなす. 例えば  $1_0$  とは, 複素平面の点  $0$  における接ベクトル  $1$  のことである. 以下,  $M$  の点および  $S$  の点における接基点全体の集合を  $\tilde{M}$  で表す.

$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を区分的に滑らかな連続写像とする.  $t \in [0, 1]$  に対して,

$$\frac{d^\pm \gamma}{dt}(t) = \lim_{t' \rightarrow t \pm 0} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \quad (\text{複号同順})$$

と書く.

**定義 1.1.** (1) 区分的に滑らかな連続写像  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が次の条件を満たすとき,  $\gamma$  を  $M$  の尖った道 (cuspidal path) という:

- $\gamma(t_0) \in S$  なる  $t_0 \in [0, 1]$  は高々有限個である.
- $\gamma(t_0) \in S$  なる任意の  $t_0$  に対して, ある  $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  が存在し

$$\frac{d^+ \gamma}{dt}(t_0) = v = -\frac{d^- \gamma}{dt}(t_0)$$

が成り立つ. ただし  $t_0 = 0$  (resp.  $t_0 = 1$ ) のときは  $\frac{d^- \gamma}{dt}(t_0)$  (resp.  $\frac{d^+ \gamma}{dt}(t_0)$ ) の条件は考えない.

- (2) (1) において,  $x = \gamma(0)$  が  $S$  に属するとき,  $v = \frac{d^+ \gamma}{dt}(0)$  を接ベクトルとする接基点  $v_x$  を  $\gamma$  の始点とよぶ. また  $y = \gamma(1)$  が  $S$  に属するとき,  $w = -\frac{d^- \gamma}{dt}(1)$  を接ベクトルとする接基点  $w_y$  を  $\gamma$  の終点とよぶ.
- (3) 尖った道  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が, 始点と終点を除いて  $S$  の点を通らないとき, 整った道 (clean path) という.
- (4)  $x, y \in \tilde{M}$  に対して,  $x$  を始点,  $y$  を終点とする尖った道全体の集合を  $\mathcal{P}(\tilde{M}; y, x)$  と書く. また整った道全体のなす部分集合を  $\mathcal{P}^\circ(\tilde{M}; y, x)$  と書く.

二つの整った道がホモトピックであるという関係は, 通常の場合と同様に定義される ( $\mathcal{P}^\circ(\tilde{M}; y, x)$  の中での連続変形を考えればよい). そのホモトピー類の集合を  $\pi(\tilde{M}; y, x)$  とおく. 一方, 尖った道の合成

$$\mathcal{P}(\tilde{M}; z, y) \times \mathcal{P}(\tilde{M}; y, x) \longrightarrow \mathcal{P}(\tilde{M}; z, x)$$

は通常の道の合成と同様に定義されるが,  $y$  が接基点の場合整った道同士の合成でも整った道にならない. この状況でホモトピー類の合成を考えるために, 次のようにして尖った道を整える:  $\gamma \in \mathcal{P}(\tilde{M}; y, x)$  が  $t_0 \in (0, 1)$  において接基点  $v_s$  を通るとする. すなわち

$$\gamma(t_0) = s \in S, \quad \frac{d^+ \gamma}{dt}(t_0) = v = -\frac{d^- \gamma}{dt}(t_0).$$

十分小さな  $\varepsilon > 0$  をとって, 円板  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - s| \leq \varepsilon\}$  が  $s$  以外の  $S$  の点を含まないようにする. また必要なら  $\varepsilon$  をさらに小さくして,  $t_0$  の前後で  $\gamma(t)$  が一度は  $D$  の外に出るようにして

おき,

$$t_- = \inf\{t < t_0 \mid \gamma([t, t_0]) \subset D\}, \quad t_+ = \sup\{t > t_0 \mid \gamma([t_0, t]) \subset D\}$$

とおく.  $t_- < t < t_+$  なる  $t$  で,  $\gamma(t) = s$  となる点が  $t_0$  以外にもある場合には, さらに  $\varepsilon$  を小さくすることで ( $t_{\pm}$  を  $t_0$  に近付けて) それらを排除する. このとき

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(t) & (t < t_- \text{ または } t > t_+), \\ \varepsilon \frac{\gamma(t) - s}{|\gamma(t) - s|} + s & (t_- < t < t_0 \text{ または } t_0 < t < t_+), \\ \varepsilon \frac{v}{|v|} + s & (t = t_0) \end{cases}$$

と定義すると,  $\gamma$  から  $t_0$  における接基点  $v_s$  を除外した道  $\gamma' \in \mathcal{P}(\tilde{M}; y, x)$  を作ることができる. この操作を始点と終点以外の全ての接基点で繰り返して得られる整った道を  $\gamma^\circ$  とおく.  $\gamma^\circ$  は各段階での  $\varepsilon > 0$  の取り方に依存するが, ホモトピー類  $[\gamma^\circ]$  はそれらに依存せず, 写像

$$\mathcal{P}(\tilde{M}; y, x) \longrightarrow \pi(\tilde{M}; y, x); \quad \gamma \longmapsto [\gamma^\circ]$$

が自然に定義される.

上の写像を使うと,  $x, y, z \in \tilde{M}$  に対して道のホモトピー類の合成

$$\pi(\tilde{M}; z, y) \times \pi(\tilde{M}; y, x) \longrightarrow \pi(\tilde{M}; z, x)$$

を  $[\gamma'][\gamma] = [(\gamma'\gamma)^\circ]$  によって定めることができ, 基本亜群  $\pi(\tilde{M}) = (\pi(\tilde{M}; y, x))_{x, y \in \tilde{M}}$  や基本群  $\pi_1(\tilde{M}; x) = \pi(\tilde{M}; x, x)$  が定義される.

なおこの先は, 接基点を考える場合でも  $\tilde{\phantom{M}}$  を省略して  $\pi(M; y, x)$  などと書くことにする.

### 1.3 群環

$x \in \tilde{M}$  を一つとる. 基本群  $\pi_1(M; x)$  の群環  $\mathbb{Q}[\pi_1(M; x)]$  において,  $\mathbb{Q}$  代数の準同型

$$\epsilon: \mathbb{Q}[\pi_1(M; x)] \longrightarrow \mathbb{Q}; \quad \sum_{\gamma} a_{\gamma} \gamma \longmapsto \sum_{\gamma} a_{\gamma}$$

の核を  $J_x$  とおく ( $\epsilon$  は群環の augmentation,  $J_x$  は augmentation ideal と呼ばれる).

$x, y \in \tilde{M}$  に対して, 道のホモトピー類の合成

$$\pi(M; y, x) \times \pi(M; x, x) \longrightarrow \pi(M; y, x)$$

または

$$\pi(M; y, y) \times \pi(M; y, x) \longrightarrow \pi(M; y, x)$$

により,  $\pi(M; y, x)$  が生成する  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間  $\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]$  は左  $\mathbb{Q}[\pi_1(M; y)]$  加群および右  $\mathbb{Q}[\pi_1(M; x)]$  加群の構造を持つ.

**補題 1.2.** 整数  $N \geq 0$  に対し,  $J_y^N \cdot \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] = \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \cdot J_x^N$  が成り立つ.

証明.  $\alpha \in J_y^N, \gamma \in \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]$  とすると  $\gamma^{-1}\alpha\gamma \in J_x^N$  より  $\alpha\gamma = \gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) \in \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \cdot J_x^N$  となり,  $J_y^N \cdot \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \subset \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \cdot J_x^N$  を得る. 逆の包含も同様である.  $\square$

これ以後は  $J_x$  をしばしば単に  $J$  と書く. また商ベクトル空間

$$\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] / (J_y^N \cdot \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]) = \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] / (\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \cdot J_x^N)$$

を  $\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] / J^N$  と略記する.

## 2 微分形式の代数 (de Rham side)

前節に引き続き,  $S$  を  $\mathbb{C}$  の有限部分集合とし,  $M = \mathbb{C} \setminus S$  という空間を考える.

### 2.1 アフィンスキームとしての $M = \mathbb{C} \setminus S$

まずアフィンスキーム (の関手としての解釈) についてごく簡単に説明しておく.

$K$  を体として,  $K$  係数の二変数多項式  $f(x, y) \in K[x, y]$  をとると, 方程式  $f(a, b) = 0$  を満たす点  $(a, b)$  の全体は座標平面内の図形を定めると考えられる. ここで  $a, b$  は  $K$  の元である必要はなく, 一般に  $K$  代数  $R$  に対して「 $R$  有理点の集合」 $\{(a, b) \in R^2 \mid f(a, b) = 0\}$  を考えることができる. この集合は  $K$  代数  $K[x, y]/(f)$  から  $R$  への  $K$  準同型全体の集合と自然に対応付けることができる:

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[x, y]/(f), R) \xrightarrow{\cong} \{(a, b) \in R^2 \mid f(a, b) = 0\}; \varphi \mapsto (\varphi(x), \varphi(y)).$$

つまり  $A = K[x, y]/(f)$  という  $K$  代数が, 任意の  $K$  代数  $R$  に対して, 「方程式  $f = 0$  が定める図形」 $R$  有理点の集合  $\mathrm{Hom}_K(A, R)$  を与えている.

そこで一般に, 任意の  $K$  代数  $A$  はある「図形」に対応していると考え, その図形を  $X = \mathrm{Spec} A$  と書く.  $X$  の  $R$  有理点の集合は  $X(R) = \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(A, R)$  で与えられる. これを  $A$  で表現される  $K$  上のアフィンスキームという\*4.

**例 2.1.**  $n$  変数多項式環  $K[x_1, \dots, x_n]$  で表現されるアフィンスキームを  $\mathbb{A}_K^n$  と書き,  $n$  次元アフィン空間という.  $n = 1$  のときはアフィン直線,  $n = 2$  のときはアフィン平面である. 有理点の集合は  $\mathbb{A}_K^n(R) = R^n$  である.

さて,  $K$  を  $\mathbb{C}$  の部分体とし, 有限集合  $S$  は  $K$  に含まれているとする. このとき  $K$  代数  $A$  を  $A = K[x, (x - s)^{-1} \mid s \in S]$  で定めると, アフィンスキーム  $X = \mathrm{Spec} A$  の  $R$  有理点集合は

$$X(R) = \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[x, (x - s)^{-1} \mid s \in S], R) \xrightarrow{\cong} \{a \in R \mid a - s \in R^\times (\forall s \in S)\}; \varphi \mapsto \varphi(x)$$

\*4 約言すれば,  $K$  上のアフィンスキームとは  $K$  代数の圏における表現可能な共変関手である, というのがここでの立場である. これに対し, 素イデアルの集合に位相と構造層を乗せた局所環付き空間としての定義もあり, というかむしろそちらが普通の定義だが, さしあたりここでの目的には必要ない.

なる全単射によって  $R$  の部分集合と同一視される．特に  $R$  が体であれば，この集合は  $R \setminus S$  に他ならない．そこで  $X = \mathbb{A}_K^1 \setminus S$  と書いてもよからう\*<sup>5</sup>．特に  $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus S = M$  であり，空間  $M$  が  $K$  上のアフィンスキーム  $X$  の  $\mathbb{C}$  有理点の集合として解釈されたことになる．

## 2.2 微分形式で生成される代数

次に  $X = \mathbb{A}_K^1 \setminus S$  の代数的 de Rham コホモロジーを考える．今の場合\*<sup>6</sup>，これは単に

$$0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

ただし

$$\Omega^0 = A = K[x, (x-s)^{-1} \mid s \in S], \quad \Omega^1 = A \cdot dx$$

という複体のコホモロジーとして表される ( $d$  は通常の微分計算と同じ)．実際に計算すると，

$$H_{dR}^0(X/K) = K, \quad H_{dR}^1(X/K) = \bigoplus_{s \in S} K\omega_s \quad \left( \omega_s := \frac{dx}{x-s} \right)$$

を得る．

道のホモロジー類に対して線積分を扱うだけなら  $H_{dR}^1(X/K)$  を考えれば十分である (de Rham の定理\*<sup>7</sup>)．ここでは反復積分を扱うために，天下りのだが，次の  $K$  ベクトル空間を考える：

$$A^{dR} = A^{dR}(X) = K\langle \omega_s \mid s \in S \rangle.$$

右辺は  $\omega_s$  ( $s \in S$ ) を形式的な文字とみたときの非可換多項式全体を表す． $S$  の元の有限列  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  に対して，対応する単項式を  $\omega_\alpha = \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k}$  と書けば

$$A^{dR} = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{\alpha \in S^k} K\omega_\alpha$$

となる．これらの単項式の次数を使って， $A^{dR}$  上の length filtration を

$$L_N A^{dR} = \bigoplus_{0 \leq k \leq N} \bigoplus_{\alpha \in S^k} K\omega_\alpha$$

と定義する．

\*<sup>5</sup> Spec を素イデアルの集合と考える立場であれば， $s \in S$  に対応する  $\mathbb{A}_K^1$  の点，すなわち多項式環  $K[x]$  の極大イデアル  $(x-s)$  を  $\mathbb{A}_K^1$  から抜いたのが  $X$  である．したがって  $X = \mathbb{A}_K^1 \setminus S$  という記法はより直接的な意味を持つ．なお，射影直線  $\mathbb{P}_K^1$  が  $\mathbb{A}_K^1$  に無限遠点を付け加えたものであることから， $X = \mathbb{P}_K^1 \setminus (S \cup \{\infty\})$  と書くこともできる．むしろ後者の書き方のほうが一般的なもので，タイトルではそちらに従った．

\*<sup>6</sup> 代数多様体が高次元だったり，アフィンでなかったり，特異点があったりすると，事情はより複雑になる．

\*<sup>7</sup> 厳密にいえば，ここでは代数的 de Rham コホモロジーを考えているので，通常の可微分多様体に対する de Rham の定理とは区別する必要がある．例えば [2] 参照．もっとも，この  $X$  の場合には直接確かめるのも容易である．

### 3 比較定理

#### 3.1 反復積分と比較同型

以上の準備のもとで、 $X = \mathbb{A}^1 \setminus S$  の場合の比較同型定理を述べる。より一般の多様体に対する定理の定式化や証明については、[1] の Theorem 3.138 および Theorem 3.229, または [3] の定理 5.1.3 などを参照されたい。

**定理 3.1.**  $K$  を  $\mathbb{C}$  の部分体,  $S$  を  $K$  の有限部分集合として,  $X = \mathbb{A}_K^1 \setminus S$ ,  $M = X(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus S$  とおく. また  $x, y \in \tilde{M}$  をとる. このとき任意の整数  $N \geq 0$  に対して,  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の同型写像

$$\text{comp}_{B,dR}: L_N A^{dR}(X) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]/J^{N+1}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \quad (3.1)$$

が, 正規化された反復積分を通じて与えられる:

$$\omega_{\alpha} \mapsto \left( \gamma \mapsto \int_{\gamma}^{\text{reg}} \omega_{\alpha} \right).$$

ここで反復積分の正規化について説明しておこう. 微分形式の単項式  $\omega_{\alpha} = \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k}$  の, 整った道  $\gamma \in \mathcal{P}^0(M; y, x)$  に沿った反復積分  $\int_{\gamma} \omega_{\alpha}$  を定義したい. まず  $x, y$  が接基点でなく通常の  $M$  の点であれば, 普通の反復積分

$$\int_{\gamma} \omega_{\alpha} = \int_{0 < t_1 < \cdots < t_k < 1} \omega_{\alpha_1}(\gamma(t_1)) \cdots \omega_{\alpha_k}(\gamma(t_k))$$

を考えればよい (ただし, これが  $\gamma$  のホモトピー類にしかよらないこと, さらに  $k \leq N$  であれば  $J^{N+1}$  での剰余類にしかよらないことは証明を要する). 次に  $x, y$  の一方または両方が接基点であるとする.  $0 < \eta < \frac{1}{2}$  に対して

$$\gamma_{\eta}(t) = \gamma((1 - \eta)t + \eta(1 - t))$$

とおくと,  $\gamma_{\eta}$  は  $M$  の道になるので, 上のように通常の反復積分が定義できる. これにより,

$$f(\eta) = \int_{\gamma_{\eta}} \omega_{\alpha}$$

なる関数が定まるが, この関数は  $\eta \rightarrow 0$  において

$$f(\eta) = \sum_{i=0}^k a_i (\log \eta)^i + O(\eta^{\varepsilon}) \quad (\exists \varepsilon > 0)$$

という形の漸近展開を持つことがいえる. そこでこの漸近展開の定数項をとって

$$\int_{\gamma}^{\text{reg}} \omega_{\alpha} := a_0$$

と定める.

**注意 3.2.** 写像の構成からすぐ分かるように、定理 3.1 の  $\text{comp}_{B,dR}$  は  $N$  に関する帰納系の同型を与えている。したがって

$${}_y A_x^B := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ N}} \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]/J^{N+1}, \mathbb{Q})$$

とおくと、同型

$$\text{comp}_{B,dR}: A^{dR} \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} {}_y A_x^B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \quad (3.2)$$

を得る。

**例 3.3.**  $S = \{0, 1\}$ ,  $K = \mathbb{Q}$  として、整った道  $\text{dch}$  を  $\text{dch}(t) = t$  で定める\*<sup>8</sup>。  $\text{dch}$  の始点は接基点  $1_0$ , 終点は接基点  $-1_1$  である。これらの接基点をそれぞれ  $\mathbf{0}, \mathbf{1}$  と書き,  $\text{dch} \in \mathcal{P}^0(M; \mathbf{1}, \mathbf{0})$  のホモトピー類を同じ記号  $\text{dch} \in \pi(M; \mathbf{1}, \mathbf{0})$  で表す。

このとき、収束インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対する多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k})$  は  $\omega(\mathbf{k}) := \omega_1 \omega_0^{k_1-1} \dots \omega_1 \omega_0^{k_r-1} \in A^{dR}$  を用いて

$$\zeta(\mathbf{k}) = (-1)^r \int_{\text{dch}} \omega(\mathbf{k}) = (-1)^r \text{comp}_{dR,B}(\omega(\mathbf{k}))(\text{dch})$$

と書ける。収束インデックスでない場合には、シャッフル正規化 (の定数項)  $\zeta_{\text{sh}}(\mathbf{k})$  について

$$\zeta_{\text{sh}}(\mathbf{k}) = (-1)^r \int_{\text{dch}}^{\text{reg}} \omega(\mathbf{k}) = (-1)^r \text{comp}_{dR,B}(\omega(\mathbf{k}))(\text{dch})$$

が成り立つ。

## 3.2 構造の対応

$\mathbb{Q}$  ベクトル空間  ${}_y A_x^B$  および  $K$  ベクトル空間  $A^{dR}$  は、以下に列挙する代数的な付加構造を持っている。ここで  $*$  =  $B$  または  $dR$  に対して  ${}_y A_x^*$  などと書くが、 ${}_y A_x^{dR}$  とは単に  $A^{dR}$  のことで、実際は添字  $x, y$  によらない。

- 積  ${}_y A_x^* \otimes {}_y A_x^* \longrightarrow {}_y A_x^*$   
 $B: \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \longrightarrow \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \otimes \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]; \gamma \longmapsto \gamma \otimes \gamma$  の双対  
 $dR: \text{文字 } \omega_s (s \in S) \text{ に関するシャッフル積}$
- 単位射  $\mathbb{Q} \longrightarrow {}_y A_x^*$   
 $B: \mathbb{Q}[\pi(M; y, x)] \longrightarrow \mathbb{Q}; \gamma \longmapsto 1$  の双対  
 $dR: \text{自然な埋め込み } \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\langle \omega_s \mid s \in S \rangle$
- 余積  ${}_z A_x^* \longrightarrow {}_z A_y^* \otimes {}_y A_x^*$   
 $B: \text{合成 } \pi(M; z, y) \times \pi(M; y, x) \longrightarrow \pi(M; z, x) \text{ が定める線型写像の双対}$   
 $dR: \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} \longmapsto \sum_{i=0}^k \omega_{\alpha_{i+1}} \cdots \omega_{\alpha_k} \otimes \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_i}$

\*<sup>8</sup>  $\text{dch}$  は *droit chemin* (まっすぐな道) の略である。

- 余単位射  ${}_x A_x^* \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $B: \text{自然な埋め込み } \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(M; x)] \text{ の双対}$   
 $dR: \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} \mapsto \begin{cases} 1 & (k = 0), \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$
- 対合射  ${}_y A_x^* \rightarrow {}_x A_y^*$   
 $B: \gamma \mapsto \gamma^{-1} \text{ の双対}$   
 $dR: \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} \mapsto (-1)^k \omega_{\alpha_k} \cdots \omega_{\alpha_1}$

反復積分の性質により, (3.2) の同型写像  $\text{comp}_{B, dR}$  はこれらの付加構造を保つ. 例えば積と余積が保たれることは, それぞれ

$$\int_{\gamma} \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} \cdot \int_{\gamma} \omega_{\beta_1} \cdots \omega_{\beta_l} = \int_{\gamma} (\omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} \amalg \omega_{\beta_1} \cdots \omega_{\beta_l}),$$

$$\int_{\gamma' \gamma} \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^k \int_{\gamma'} \omega_{\alpha_{i+1}} \cdots \omega_{\alpha_k} \cdot \int_{\gamma} \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_i}$$

という等式の帰結である.

**注意 3.4.**  $A^{dR}$  の余積は, 通常 deconcatenation  $\omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k} \mapsto \sum_{i=0}^k \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_i} \otimes \omega_{\alpha_{i+1}} \cdots \omega_{\alpha_k}$  と比べてテンソルの左右が逆になっているので注意. もっとも, これは道の合成の順序と反復積分の変数の順序を逆にしてしまったためで, どちらかを逆順に定義すれば解消する問題である.

## 参考文献

- [1] J. I. Burgos Gil, J. Fresán, *Multiple zeta values: from numbers to motives*, Clay Mathematics Proceedings, to appear.
- [2] F. El Zein, L. Tu, From sheaf cohomology to the algebraic de Rham theorem, in *Hodge Theory*, edited by E. Cattani, F. El Zein, P. A. Griffiths and Lê D. T., Princeton University Press, 2014, 69–121.
- [3] 河野俊丈, 反復積分の幾何学, シュプリンガー・ジャパン, 2009.

# ホッジ理論で次元評価したら失敗した件について

京都大学数理解析研究所 佐久川憲児

## 1 導入

本原稿は第26回整数論サマースクール「多重ゼータ値」における同名講演の報告です。

### 1.1 計画

本サマースクールにおける大きな目標のひとつは、多重ゼータ値のはる  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間の次元評価の概要の解説です (Deligne-Goncharov-Terasoma の定理). ここでは、直前の山本さんの講演までに明らかとなった情報とホッジ理論 (これは良く知られている!) の結果を用いて次元評価を試みます. より具体的には、以下のような戦略によって次元の評価を試みます:

**Step 1**  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間  $\mathrm{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)$  を混合ホッジ・テイト構造の圏から構成する.

**Step 2** 多重ゼータ値の空間  $\mathcal{Z}$  のホッジ理論的持ち上げである  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間  $\mathcal{Z}_H$  を  $\mathrm{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)^\vee$  の部分空間<sup>\*1</sup>として定義する.

**Step 3**  $\mathrm{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)$  の次元の評価をする (試みる).

さて、実際にこの方法によって次元評価を試みしてみると、Step 1,2 は割合自然な方法によって目的は達成されますが、Step 3 がとんでもなく難しい (失敗する...) ことになります. どういうことかという、混合ホッジ・テイト構造の圏があまりにも「大きすぎる」<sup>\*2</sup>ので空間の次元が全く評価できないのです. この問題は次の萩原さんの稿により解消されることになります.

### 1.2 いいわけ

本稿は実話 (佐久川の) に基づいたものであり、専門家 (佐久川) や関係者 (佐久川) の証言をもとに構成されています<sup>\*3</sup>. このような失敗談をサマースクールでお話するのは少し問題があると思われるかたも多々いらっしゃると思いますので、ここではなぜこのような話をしようと考えたかを書きたいと思います.

一つ目の理由は、いきなりモチーフの話をするとう話が (一見) 飛びすぎてしまうので、軟着陸させる為にこの話をした、というものです. 実際に以下を見ていただければわかるように、証明の途中までは全く同様にうまくいっており、しかも我々がこれから構成する多重ゼータの持ち上げは悪くない<sup>\*4</sup>ものであるので、紹介する価値はあるかと考えたわけです.

もう一つ、実際にはこちらの方が圧倒的に大きな理由なのですが、モチーフを使わないようなアプローチもあり得るということを伝えたかった、ということがあります. 講演中はあまり伝わらなかったと思いますので、以下で講演者が当時どういったことを考えていたのかを書き記したいと思

<sup>\*1</sup> 明らかではないが、実際には部分  $\mathbf{Q}$  代数の構造を持つ.

<sup>\*2</sup> 勿論この時点ではこの言説は意味不明である. 第五章を見よ.

<sup>\*3</sup> 勿論脚色されています. この方針では無理なことは最初からわかっていましたし、実際にはより一般の周期について考察していました.

<sup>\*4</sup> というよりモチーフ的多重ゼータ値と等価となります.

います。多重ゼータ値の理論は、代数多様体の混合テイトモチーフの圏が存在するという「奇跡」に相当依っている部分があります\*5。より具体的に言うと、(モチーフ的) 多重ゼータ値のはる空間の構造を計算するためには、現状では代数体の代数的 K 群の計算が少なくともテンソル  $\mathbf{Q}$  すれば完全になされているという奇跡を利用するほかない、ということです。従って多重ゼータ値でできたような話を一般化しようと思うと(例えば楕円曲線でやる)、直ちにこの「奇跡」が起こらない、あるいは自ら起こさなくてはならない、という困難さに直面します\*6。一方で最初から混合ホッジ構造の中だけで考えることにして、その「小さな部分圏」\*7の中に最初から現れる対象を決めてしまう、という立場もあります。今回の我々の立場は陰にそのようなものであることは注意すべきでしょう。この立場だと「奇跡」を仮定する必要も無く、途中までは話がうまくいくのですが、実際には圏の構造を計算することが一般的には極めて困難\*8なのです。ここで思い出してほしいのですが、この業界では伝統的に以下の問題が考察されてきました:

**問題:** 多重ゼータ値のはる空間の次元を予想次元まで落とすような、具体的な関係式を見つけよ。

ここまでの話を振り返れば、この問題は数論幾何的にも非常に興味深い問題であることが理解されるかと思えます。言い換えれば、「代数的 K 群の計算をしなくて、 $\mathbf{Z}$  上の混合テイトモチーフの圏を構成せよ」という問題とも思えるのです。なので、もしこの問題が肯定的に解決されるならば、より高次元多様体から定まるモチーフの圏も奇跡抜きに構成できる可能性が生まれる\*9... ような気がします。

このような立場・方法のさらなる発展形として、近年「Nori の混合モチーフ」と呼ばれる、Voevodsky 等のモチーフとは異なるタイプのモチーフの研究が活発化しています。これに関しましては、最近 Huber と Müller-Stach による教科書 [6] が出版されましたので、興味がある読者は参照されると得るところ大かと思われます。

謝辞 このような講演をするようそそのかして下さった愛知県立大学の田坂浩二氏に感謝申し上げます。また、本稿の初稿を注意深く読んでくださり、様々な誤植や間違いを指摘して下さった福岡工業大学の三柴善範氏に深く感謝申し上げます。

## 2 $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造

**定義 2.1.**  $k$  を体とする。

(1)  $V$  を有限次元  $k$  ベクトル空間とする。  $V$  の上昇フィルターとは、部分空間の列

$$0 \subset \cdots \subset W_n V \subset W_{n+1} V \subset \cdots \subset V \quad (1)$$

であって、十分大きな  $n$  では  $W_n V = V$  となり、十分小さな  $n$  では  $W_n V = 0$  となるものこととする。添え字が偶数でのみジャンプするとき、即ち任意の  $m$  に対し  $W_{2m} V = W_{2m+1} V$  であるとき、このフィルター付きベクトル空間は偶数で添え字付けら

\*5 実際には奇跡ではなく恐らく必然ですが、我々にそれを確かめるすべは今のところない(証明のアイデアもない!)

\*6 代数的 K 群に関する、Beilinson-Soulé の消滅予想を解く、という極めて困難な仕事を実行しなくてはなりません...

\*7 予想としてはモチーフの圏。

\*8 具体的には例えば拡大群の計算が実行できない。

\*9 その結果これまで手がでなかった予想群に対する新しいアプローチが発生するかもしれません。

れている, ということにする.

- (2)  $E, R$  を  $\mathbf{R}$  の部分体とする.  $R$  上の  $E$  混合ホッジ・テイト構造とは,
- 偶数で添え字付けられた上昇フィルター付き  $E$  ベクトル空間  $H_B = (H_B, W_\bullet H_B)$ ,
  - 二回合成すると恒等写像となる  $E$  線型写像  $c = c_H: H_B \xrightarrow{\sim} H_B$  (対合と呼ぶ),
  - 次数付き  $R$  ベクトル空間  $H_{dR} = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} H_{dR, j}$ ,
  - 比較同型と呼ばれる  $\mathbf{C}$  ベクトル空間の同型

$$\text{comp}_{B, dR}^H: H_{dR} \otimes_R \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H_B \otimes_E \mathbf{C}$$

であって, 以下の条件 (a), (b) を満たす組  $H := (H_B, c, H_{dR}, \text{comp}_{B, dR}^H)$  のことである.

(a)  $\text{comp}_{B, dR}^H$  は任意の整数  $i$  に対して同型

$$\bigoplus_{j \geq -i} H_{dR, j} \otimes_R \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} W_{2i} H_B \otimes_E \mathbf{C}$$

を誘導する.

- (b)  $c_B, c_{dR}$  をそれぞれ,  $\mathbf{C}$  の複素共役が引き起こす  $H_B \otimes_E \mathbf{C}$ ,  $H_{dR} \otimes_R \mathbf{C}$  上の  $\mathbf{R}$  線型写像とする. このとき, 同型  $\text{comp}_{B, dR}^H$  による同一視のもとで,  $(c \otimes \text{id}_{\mathbf{C}}) \circ c_B = c_{dR}$  が成立する.

$R$  上の  $E$  混合ホッジ・テイト構造の間の射  $H \rightarrow H'$  とは二つの線型写像  $H_B \rightarrow H'_B$ ,  $H_{dR} \rightarrow H'_{dR}$  の組であって, 各々の比較同型, 重さフィルトレーション, 対合, 次数と両立するものをさすこととする.  $R$  上の  $E$  混合ホッジ・テイト構造のなす圏を  $\text{MHT}_E(R)$  で表す<sup>\*10</sup>.  $E = R = \mathbf{Q}$  の時は単に  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  と書き, この対象を  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造と呼ぶこととする.

**注意 2.2.**  $\text{MHT}_E(R)$  は  $E \cap R$  線型アーベル圏となる.

講演の際は, この対象を複素共役付きの混合ホッジ・テイト構造と呼んでいたが, ここでは Fontaine–Perrin–Riou に従ってこのように呼ぶこととする.  $E, R$  と二つ  $\mathbf{C}$  の部分体が出てくるが, この二つの果たしている役割は全く違う事に注意しておく. どういうことかという,  $E$  はホッジ構造の「係数体」であり, 一方  $R$  はホッジ構造の「定義体」である, ということである. <sup>\*11</sup> 以下いくつか例を見てみる.

**例 2.3.**

- (1)  $n$  を整数としたとき  $\mathbf{Q}(n)_B, \mathbf{Q}(n)_{dR}$  を

$$\mathbf{Q}(n)_B := \mathbf{Q}(2\pi\sqrt{-1})^n \quad (\subset \mathbf{C}), \quad \mathbf{Q}(n)_{dR} := \mathbf{Q}$$

により定める. さて  $\mathbf{Q}(n)_B$  上のフィルトレーションを

$$0 = W_{-2n-2} \mathbf{Q}(n)_B \subset W_{-2n} \mathbf{Q}(n)_B = \mathbf{Q}(n)_B$$

<sup>\*10</sup> 通常のホッジ構造の定義については, 例えば [9] を参照されたい.

<sup>\*11</sup> 個人的意見であるが, 筆者は定義体に関しては「 $\sim$ 上の」という言葉を使うべきであると考えているし, 係数体に対しては「 $\sim$ 線型」又は何もつけない方がまぎれが無いと思っている. 例えば虚二次体  $K$  の整数環で虚数乘法をもつ, 代数体  $F$  上定義された楕円曲線  $X$  から定まるモチーフ  $h^1(X)$  は「 $F$  上の  $K$  線型モチーフ」と呼ぶほうが明らかに紛れが少ない. これを虚二次体上のモチーフというのは間違いの原因になるように思う.

で, 対合  $c$  を複素共役から誘導されるものとし,  $1 \in \mathbf{Q}(n)_{\text{dR}} = \mathbf{Q}$  の次数は  $n$  であると定める. 更に, 比較同型は複素数体の積写像から誘導される同型

$$\text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}}^{\mathbf{Q}(n)}: \mathbf{Q}(n)_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C} \xleftarrow{\sim} \mathbf{Q}(n)_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

を取る. この時, これらの組は  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造を定め, これを  $\mathbf{Q}(n)$  と書くことにする.  $n = 0$  の時は特別に  $n$  を省略して書くのが普通である. 即ち,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0)$ .

(2) 山本氏の講演に於いて出てきた三つ組みが  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造の一部となることを見よう.  $X = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0, 1\} = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  とし, 非負整数  $N$  を固定する. まず  $1A_{\mathbf{0}, N}^{\mathbf{B}} := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi(X(\mathbf{C}); \mathbf{1}, \mathbf{0})]/J^{N+1}, \mathbf{Q})$  に上昇フィルトレーションを

$$W_{2j}(1A_{\mathbf{0}, N}^{\mathbf{B}}) := 1A_{\mathbf{0}, j}^{\mathbf{B}} = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi(X(\mathbf{C}); \mathbf{1}, \mathbf{0})]/J^{j+1}, \mathbf{Q}), \quad 0 \leq j \leq N$$

で定め, 更に対合  $c$  を  $X(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$  上の複素共役から誘導される線型写像としてとる. また,  $1A_{\mathbf{0}, N}^{\text{dR}} := L_N 1A_{\mathbf{0}}^{\text{dR}}$  上に次数付きベクトル空間の構造を, 次数  $l$  部分が

$$1A_{\mathbf{0}, N, l}^{\text{dR}} := \bigoplus_{\alpha_i \in \{0, 1\}} \mathbf{Q} \omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \cdots \omega_{\alpha_l}$$

となるように定める. 山本氏の講演では比較同型と呼ばれる同型写像

$$\text{comp}_{\text{dR}, \mathbf{B}}^{1A_{\mathbf{0}, N}^{\text{H}}} := \text{comp}_{\text{dR}, \mathbf{B}}: A_{\mathbf{0}, N}^{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} A_{\mathbf{0}, N}^{\mathbf{B}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

がシャッフル正規化された逐次積分を用いて構成されていたことを思い出そう. このとき, これらのなす組

$$1A_{\mathbf{0}, N}^{\text{H}} := (1A_{\mathbf{0}, N}^{\mathbf{B}}, c, 1A_{\mathbf{0}, N}^{\text{dR}}, \text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}})$$

は  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造を定める. 更に  $N$  について帰納系をなしており, その帰納極限を

$$1A_{\mathbf{0}} := 1A_{\mathbf{0}}^{\text{H}} := \varinjlim_N 1A_{\mathbf{0}, N}^{\text{H}}$$

と書くことにする.

(3)  $E, R$  を定義 2.1 と同様にとる.  $X$  を  $R$  上の滑らかで有理的な<sup>\*12</sup>代数多様体とする. このとき, 任意の非負整数  $i$  に対して組

$$h^i(X/R; E) := (H_{\mathbf{B}}^i(X; E), H_{\text{dR}}^i(X/R), R, \text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}}^{h^i(X/R; E)})$$

を考えることにする. ただし,  $H_{\mathbf{B}}^i(X; E)$  は位相多様体  $X(\mathbf{C})$  上の定数層  $E$  の  $i$  次コホモロジー,  $H_{\text{dR}}^i(X/R)$  は  $R$  上の代数多様体  $X$  の代数的ド・ラームコホモロジー

$$H_{\text{dR}}^i(X/R) := H^i(X, \Omega_{X/R}^{\bullet})$$

であり,  $\text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}}^{h^i(X/R; E)}$  はベッチ・コホモロジーとド・ラームコホモロジーの比較同型

$$H_{\text{dR}}^i(X/R) \otimes_R \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathbf{B}}^i(X; E) \otimes_E \mathbf{C}$$

<sup>\*12</sup> この仮定はホッジ構造を混合テイト的にするためだけに使われています.

のこととする. このとき標準的方法で上のベクトル空間に重さフィルトレーションを定めることができ, また  $H_{\text{dR}}^i(X/R)$  にホッジフィルトレーションを定めることができる ([9, Theorem 4.2]). また  $R$  が複素共役で固定されるので, 複素共役  $c: \mathbf{C} \cong \mathbf{C}$  は位相多様体  $X(\mathbf{C})$  の自己同相写像を定め, 従ってコホモロジー  $H_{\mathbf{B}}^i(X; E)$  への  $E$  自己同型を定める. 明らかにこれは対合である. すると, 組  $h^i(X/R; E)$  は  $R$  上の  $E$  混合ホッジ・テイト構造を定める. 例えば,

$$h^2(\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1/\mathbf{Q}; \mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}(-1)$$

が成り立っている.

後の計算で使うので, 一次の拡大群だけ計算しておこう\*13.  $H$  を  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造としたとき, 拡大群  $\text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, H)$  とは,  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  における拡大

$$0 \rightarrow H \rightarrow H' \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow 0$$

の同値類がなす群のことであった. 簡単のため真ん中の  $H'$  だけでこの拡大を表すことにすると, 二つの拡大  $H'$  と  $H''$  が同値であるとは, 次の可換図式が存在するときに言うのであった:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & \mathbf{Q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H'' & \longrightarrow & \mathbf{Q} \longrightarrow 0. \end{array}$$

任意の部分集合  $V \subset H_{\mathbf{B}, \mathbf{C}} := H_{\mathbf{B}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$  に対し,  $V^+$  で  $V$  に含まれかつ  $(c \otimes \text{id}_{\mathbf{C}}) \circ c_{\mathbf{B}}$  で固定される元のなす  $V$  の部分集合を表すことにする:

$$V^+ := \{v \in V \mid (c \otimes \text{id}_{\mathbf{C}}) \circ c_{\mathbf{B}} v = v\}.$$

例えば, 定義から

$$\text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}}^H(H_{\text{dR}})^+ = \text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}}^H(H_{\text{dR}})$$

が成立している.

**補題 2.4.**  $H$  を  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造としたとき,  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間の同型

$$\phi: \text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, H) \xrightarrow{\sim} W_0 H_{\mathbf{B}, \mathbf{C}}^+ / (\text{comp}_{\mathbf{B}, \text{dR}}^H(H_{\text{dR}, 0}) + W_0 H_{\mathbf{B}}^+)$$

が存在する.

*Proof.* 証明は極めて標準的であるが (例えば [9, Theorem 3.31] 参照), 適当な文献を発見できなかったので, ここでは証明を与えたいと思う.

まず,  $\mathbf{Q}$  の  $H$  による拡大

$$H' = (0 \rightarrow H \rightarrow H' \xrightarrow{\text{pr}} \mathbf{Q} \rightarrow 0)$$

が与えられたとき, 以下の二つの情報を選ぶ:

\*13 この結果は最後の章まで使わないので, 忙しい人は読み飛ばしても結構です.

- 重さフィルトレーションと  $c$  の双方と両立するような  $\text{pr}_B$  の切断

$$s: \mathbf{Q}_B \hookrightarrow H'_B.$$

- 次数と両立するような  $\text{pr}_{\text{dR}}$  の切断

$$e: \mathbf{Q}_{\text{dR}} \hookrightarrow H'_{\text{dR}}.$$

ここで  $\phi(H', s, e) \in H_{B,C}$  を以下の等式で定義する:

$$\phi(H', s, e) := \text{comp}_{B,\text{dR}}^{H'}(e(1)) - s(1).$$

$\phi(H', s, e)$  が実際  $H_{B,C}$  に含まれることは

$$\text{pr}_B \circ \text{comp}_{B,\text{dR}}^{H'}(e(1)) = \text{comp}_{B,\text{dR}}^{\mathbf{Q}} \circ \text{pr}_{\text{dR}}(e(1)) = 1$$

によりわかる. また,  $s$  と  $e$  の取り方から

$$\phi(H', s, e) \in W_0 H_{B,C}^+$$

も容易にわかる. ここで,  $s, e$  の取り方にどのくらいの自由度があるかを考えよう. まず  $s$  であるが, 任意の  $W_0 H_B^+$  の元  $v$  をとると,

$$s_v: \mathbf{Q}_B \rightarrow H'_B; \quad 1 \mapsto s(1) + v$$

も再び  $s$  と同様の条件を満たし, また条件を満たすような切断はこのかたちのものしかないということがわかる. 次に  $e$  の取り方であるが, これも同様に任意の  $w \in H_{\text{dR},0}$  に対して  $e_w$  を

$$e_w: \mathbf{Q}_{\text{dR}} \rightarrow H'_{\text{dR}}; \quad 1 \mapsto e(1) + w$$

で定めるとこれは  $e$  と同様の条件を満たし, 更に条件を満たす切断はこのかたちのものしかない. このような取り換えによって  $\phi(H', s, e)$  がどのように変動するかは簡単に計算できて, 具体的には

$$\begin{aligned} \phi(H', s_v, e) &= \phi(H', s, e) - v, \\ \phi(H', s, e_w) &= \phi(H', s, e) + \text{comp}_{B,\text{dR}}^H(w) \end{aligned}$$

が成立することが確かめられる. さて  $H''$  を  $H'$  と同値であるような拡大として,  $\alpha: H' \xrightarrow{\sim} H''$  を拡大の同値を与える  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造の同型とする. すると, 定義に従って計算すると

$$\phi(H', s, e) = \phi(H'', \alpha_B \circ s, \alpha_{\text{dR}} \circ e)$$

が成り立つことがわかる. そこで  $\phi$  を

$$\phi([H']) := \phi(H', s, e) \pmod{(\text{comp}_{B,\text{dR}}^H(H_{\text{dR},0}) + W_0 H_B^+)}$$

と定義すれば, これは拡大の同型類にしか依存しないので, 確かに補題に現れるような準同型を定めていることがわかる.

$\phi$  が全単射であることを示す. 単射性は明らかなので, 全射性を示そう.  $v \in W_0 H_{B,C}^+$  を一つとり,

$$\begin{aligned} H'_B &:= \mathbf{Q}e_B \bigoplus H_B, & H'_{dR} &:= \mathbf{Q}e_{dR} \bigoplus H_{dR}, \\ \text{comp}_{B,dR}^{H'}: H'_{dR} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} &\xrightarrow{\sim} H'_{B,C}; & (e_{dR}, w) &\mapsto (e_B, v + \text{comp}_{B,dR}^H(w)) \end{aligned} \quad (2)$$

を考える. ここで,  $\mathbf{Q}e_B, \mathbf{Q}e_{dR}$  は形式的な基底  $e_B, e_{dR}$  で生成される一次元  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間である.  $H'_B$  上に対合  $c_{H'}$  を  $(\text{id}_{\mathbf{Q}e_B}, c_H)$  で定めれば, これらの組は明らかな方法で拡大

$$0 \rightarrow H \rightarrow H'' \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow 0$$

を与えることがわかり, 更にその拡大群の中で定める類の  $\phi$  での像は  $v$  の像と一致することが構成から直ちにわかる. 従って  $\phi$  は全射で主張は示された.  $\square$

### 3 $\zeta^H(\mathbf{k})$

定義 3.1. (1)  $\bullet$  をシンボル  $B$  又は  $dR$  とする. このとき,  $\mathbf{Q}$  線型アーベル圏の間の関手

$$\omega_\bullet: \text{MHT}_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}$$

を  $\omega_\bullet(H) := H_\bullet$  で定める.

(2)  $\text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)$  で,  $\mathbf{Q}$  線型自然変換  $\omega_{dR} \rightarrow \omega_B$  の集合を表すことにする. 即ち,  $\text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)$  の元  $\alpha$  とは  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  の対象で添え字付けられた,  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  の射と両立する線型写像

$$\alpha^H: \omega_{dR}(H) := H_{dR} \rightarrow \omega_B(H) := H_B$$

の集合  $\{\alpha^H\}_{H \in \text{Obj}(\text{MHT}_{\mathbf{Q}})}$  のことである.

(3)  $\mathbf{k}$  をインデックスとしたとき,  $\mathbf{Q}$  線型写像

$$\zeta^H(\mathbf{k}): \text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B) \rightarrow \mathbf{Q}$$

を

$$\zeta^H(\mathbf{k})(\alpha) := (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \langle \alpha^{1A_0}(\omega(\mathbf{k})), \text{dch} \rangle \quad (3)$$

で定める\*14. ここで,  $\omega(\mathbf{k}) \in {}_1A_0^{\text{dR}}$  はインデックス  $\mathbf{k}$  に対応する微分形式,  $\text{dch}$  は 0 から 1 までのまっすぐな道とし (山本氏の講演参照),  $\langle , \rangle$  は自然なペアリング

$${}_1A_0^B \times ({}_1A_0^B)^\vee \rightarrow \mathbf{Q}$$

である.  $\zeta^H(\mathbf{k})$  で生成される  $\text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)^\vee$  の  $\mathbf{Q}$  部分空間を  $\mathcal{Z}_H$  で表すことにする:

$$\mathcal{Z}_H := \sum_{\mathbf{k}: \text{indices}} \mathbf{Q} \zeta^H(\mathbf{k}) \subset \text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)^\vee.$$

\*14  ${}_1A_0$  はホッジ・テイト構造ではない (その順極限) が, 以下の双対の定義により代入可能であることがわかる.

**注意 3.2.** 上の双対  $\text{Hom}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})^\vee$  は以下のようにして定義する.  $\mathcal{C}_\lambda$  を  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  の, 対象が有限個であるような忠実充満部分圏の族であって,  $2\text{-colim}_\lambda \mathcal{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  を満たすものとし,  $\omega_\bullet^\lambda$  で  $\omega_\bullet$  の  $\mathcal{C}_\lambda$  への制限をあらわすことにする. このとき

$$\text{Hom}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})^\vee := \varinjlim_\lambda \text{Hom}(\omega_{\text{dR}}^\lambda, \omega_{\text{B}}^\lambda)^\vee$$

で双対を定義する. 但し, 右辺に現れる双対は, 有限次元ベクトル空間の通常の変換である.

$\omega_{\text{dR},k}: \text{MHT}_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}$  を  $\omega_{\text{dR}}$  と次数  $k$  部分を取り出す関手の合成とする<sup>\*15</sup>. すると, 定義から自然な直和分解

$$\omega_{\text{dR}} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \omega_{\text{dR},k}$$

が存在し, これから再び自然な直和分解

$$\text{Hom}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})^\vee = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \text{Hom}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})_k^\vee = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \text{Hom}(\omega_{\text{dR},k}, \omega_{\text{B}})^\vee \quad (4)$$

を得る. この直和分解は  $\mathcal{Z}_{\text{H}}$  の直和分解

$$\mathcal{Z}_{\text{H}} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{Z}_{\text{H},k} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \sum_{\mathbf{k}: \text{indices, wt}=k} \mathbf{Q}\zeta^{\text{H}}(\mathbf{k})$$

を誘導することが定義から容易に確かめられる.

さて, 任意の可換環  $R$  と  $\bullet = \text{B}$  又は  $\text{dR}$  に対して, 関手  $\omega_{\bullet,R}$  を  $\omega_\bullet$  の  $R$  線型拡張とする:

$$\omega_{\bullet,R}: \text{MHT}_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Mod}_R; \quad H \mapsto H_\bullet \otimes_{\mathbf{Q}} R.$$

また,  $\text{Hom}(\omega_{\text{dR},R}, \omega_{\text{B},R})$  を上と同様に  $\omega_{\text{dR},R}$  と  $\omega_{\text{B},R}$  の間の  $R$  線型な自然変換のなす集合とする. すると, 定義より  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  の各対象  $H$  に備え付けられている比較写像  $\text{comp}_{\text{B},\text{dR}}^H$  のなす集合

$$\text{comp}_{\text{B},\text{dR}} := \{\text{comp}_{\text{B},\text{dR}}^H\}_{H \in \text{MHT}_{\mathbf{Q}}}$$

は  $\text{Hom}(\omega_{\text{dR},\mathbf{C}}, \omega_{\text{B},\mathbf{C}})$  の元を定めている. さて,  $\text{comp}_{\text{B},\text{dR}}$  から定まる代入写像  $\text{comp}^*$  を

$$\text{comp}^*: \text{Hom}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})^\vee \rightarrow \mathbf{C}; \quad F \mapsto F(\text{comp}_{\text{B},\text{dR}})$$

で定める.

**命題 3.3.** 任意のインデックス  $\mathbf{k}$  に対し, 次の等式が成立する:

$$\text{comp}^*(\zeta^{\text{H}}(\mathbf{k})) = \zeta_{\square}(\mathbf{k}).$$

但し右辺はシャッフル正規化多重ゼータ値とする.

*Proof.* 山本氏の原稿の例 3.3 と構成から明らか. □

---

<sup>\*15</sup> これはファイバー関手ではない.

言い換えると、我々は次の可換図式を得たことになる：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{H}^1 & \xrightarrow{\zeta^H} & \text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)^\vee =: \mathcal{O}(P_{B,dR}^H) \\
 & \searrow \zeta_\omega & \swarrow \text{comp}^* \\
 & \mathbf{R} &
 \end{array} \quad (5)$$

$\mathfrak{H}^1$  はいわゆる Hoffman 代数  $\mathfrak{H}$  のインデックスたちに対応する部分代数としており、唐突に現れた  $P_{B,dR}^H$  については後で解説するが一言でいえばド・ラーム側からベッチ側への「道のホモトピー類」のなす空間である。今  $\mathfrak{H} = {}_1A_0^{dR}$  と見做している。この図式から、 $\zeta^H$  はシャッフル正規化多重ゼータ値のホッジ理論的持ち上げと呼ぶにふさわしいものであることが了解されるかと思う。

**注意 3.4.** 定義から  $\mathfrak{H}^1$  上でしか  $\zeta^H$  は定義されていないが、定義式 (3) の右辺には明らかにインデックスに対応する微分形式  $\omega(\mathbf{k})$  以外の任意の  ${}_1A_0^{dR} = \mathfrak{H}$  の元も代入可能なので、上の図式は

$$\begin{array}{ccc}
 {}_1A_0^{dR} = \mathfrak{H} & \xrightarrow{\zeta^H} & \text{Hom}(\omega_{dR}, \omega_B)^\vee =: \mathcal{O}(P_{B,dR}^H) \\
 & \searrow \zeta_\omega & \swarrow \text{comp}^* \\
 & \mathbf{R} &
 \end{array} \quad (6)$$

まで拡張できる。記号の濫用ではあるが、現れる写像は全て同じ記号であらわすことにする。

## 4 淡中圏

以下アファイン群スキームの基礎知識は仮定する。詳細は例えば [11] を参照されたい。[3] も参考となるかと思われる。 $\mathcal{T}$  を  $\mathbf{Q}$  線型アーベル圏としたとき、 $\mathcal{T}$  の結合的、単位的かつ可換なテンソル構造とは、 $\mathbf{Q}$  双線型関手

$$\otimes: \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$$

と単位的対象  $\mathbf{1}$  の組  $(\otimes, \mathbf{1})$  であって「結合法則」を満足し  $\mathbf{1}$  が  $\otimes$  の「単位元」となり、更に「可換」となるときに言った。正確な定義は [3] を参照されたい。本稿に於いて現れるテンソル構造は全て「結合的」、「単位的」かつ「可換」であるので、以下この三つの言葉は全て省略してしまうことにしよう。 $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$  を  $\mathbf{Q}$  線型テンソリアルアーベル圏と呼ぶ。更に記号を軽くするために後ろの  $\otimes$  と  $\mathbf{1}$  は省略してしまうことにする。

$\mathcal{T}$  を  $\mathbf{Q}$  線型テンソリアルアーベル圏で、任意の二つの対象  $X, Y$  に対し  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$  が有限次元  $\mathbf{K}$  ベクトル空間となるようなものとする。 $V, W$  を  $\mathcal{T}$  の対象とする。このとき、関手

$$\mathcal{T} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}; \quad V' \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{T}}(V' \otimes V, W) \quad (7)$$

が表現可能であるとき、(7) を表現する対象を  $V$  と  $W$  の内部準同型とよび、 $\underline{\text{Hom}}(V, W)$  と書く。 $W = \mathbf{1}$  のときには慣例に従って  $V^\vee := \underline{\text{Hom}}(V, \mathbf{1})$  と書き、 $V$  の双対と呼ぶことにする。

**定義 4.1.**  $\mathbf{Q}$  線型ニュートラル淡中圏とは、 $\mathbf{Q}$  線型テンソリアルアーベル圏であって以下の条件を満たすものをいう：

**Ref** 任意の対象  $V, W$  に対して, 内部準同型  $\underline{\text{Hom}}(V, W)$  は存在し, 自然な射

$$V \rightarrow (V^\vee)^\vee$$

は同型.

**Rig** 任意の対象  $V, W$  に対し, 自然な射

$$V^\vee \otimes W \rightarrow \underline{\text{Hom}}(V, W)$$

は同型であり, 更に双対を取る操作とテンソル積は関手的に可換である:

$$(V \otimes W)^\vee \cong V^\vee \otimes W^\vee.$$

**Fib** 自然な射  $\mathbf{Q} \rightarrow \text{End}(\mathbf{1})$  は同型であり, 完全でテンソル構造を両立させる  $\mathbf{Q}$  線型関手

$$\omega: \mathcal{T} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}$$

が存在する. このような関手のことをファイバー関手と呼ぶ.

**例 4.2.** (1)  $\text{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}$  を有限次元次数付き  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間とすると, これは  $\mathbf{Q}$  線型ニュートラル淡中圏となる. 次数を忘れる関手はファイバー関手となっている.

(2) 前節に於いて現れた  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  は  $\mathbf{Q}$  線型ニュートラル淡中圏であり, 二つの関手

$$\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}}: \text{MHT}_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}$$

はそのファイバー関手となっている.

**定理 4.3** (淡中圏論の基本定理).  $\mathcal{T}$  を  $\mathbf{Q}$  線型ニュートラル淡中圏とし,  $\omega, \omega'$  を  $\mathcal{T}$  のファイバー関手とする.

(1) 関手  $P_{\omega', \omega}: \text{Alg}_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Set}$  を

$$P_{\omega', \omega}(R) := \{ \alpha \in \text{Hom}_R(\omega_R, \omega'_R) \mid \alpha \text{ はテンソル構造と両立する} \}$$

で定めると, これは  $\mathbf{Q}$  上のアフアインスキームとなる. 特に  $\omega = \omega'$  の時には  $P_{\omega, \omega}(R) = \text{Aut}_{\mathcal{T}}^{\otimes}(\omega)(R)$  に自然な群構造が入るので,  $G_{\omega} := P_{\omega, \omega}$  は  $\mathbf{Q}$  上のアフアイン群スキームとなる. 更に, 自然な同型

$$\mathcal{O}(P_{\omega', \omega}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Q}}(\omega, \omega')^\vee \quad (8)$$

が存在する.

(2) ファイバー関手  $\omega$  は圏同値

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbf{Q}}(G_{\omega}); \quad V \mapsto \omega(V)$$

を誘導する.  $G_{\omega}$  はしばしば  $\pi_1(\mathcal{T}, \omega)$  と書かれ,  $\omega$  を基点とする  $\mathcal{T}$  の淡中基本群と呼ばれる.

(3)  $G$  をアフアイン群スキームとする.  $\mathcal{T} = \text{Rep}_{\mathbf{Q}}(G)$  で  $\omega$  が忘却関手であるとき,  $G$  と  $\pi_1(\mathcal{T}, \omega)$  は自然に同型となる.

例 4.4.  $\mathcal{T} = \text{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}$ ,  $\omega = \omega_f :=$  忘却関手であるとき,

$$\pi_1(\text{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\text{fin}}, \omega_f) = \mathbf{G}_m$$

となる. 上の定理から, 有限次元  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間に次数を付けることと  $\mathbf{G}_m$  の作用を考える事は同値となることがわかる. 具体的な対応については萩原氏の報告集も参照されたい.

アファインスキーム  $P_{\omega', \omega}$  が  $\mathbf{Q}$  有理点  $t$  をもつならば, アファインスキームの同型

$$G_{\omega} \xrightarrow{\sim} P_{\omega', \omega}; \quad \sigma \mapsto t \circ \sigma \quad (9)$$

が存在する.

例 4.5.  $\mathcal{T}$  として  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  を,  $\omega, \omega'$  として  $\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}}$  をとろう. また,  $\mathbf{Q}$  上のアファイン (resp. 群) スキーム  $P_{\text{B}, \text{dR}}^{\text{H}}$  (resp.  $G_{\text{dR}}^{\text{H}}$ ) を

$$P_{\text{B}, \text{dR}}^{\text{H}} := P_{\omega_{\text{B}}, \omega_{\text{dR}}}, \quad G_{\text{dR}}^{\text{H}} := G_{\omega_{\text{dR}}}$$

で定義する. すると, 定理 4.3 (1) より, 自然な同型

$$\text{Hom}_{\mathbf{Q}}(\omega_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}})^{\vee} \cong \mathcal{O}(P_{\text{B}, \text{dR}}^{\text{H}})$$

が存在する. 実は  $P_{\text{B}, \text{dR}}^{\text{H}}$  には  $\mathbf{Q}$  有理点が稠密に存在し, 適当にそのなかのどれかを選べば関数環の次数を保つ同型

$$G_{\text{dR}}^{\text{H}} \xrightarrow{\sim} P_{\text{B}, \text{dR}}^{\text{H}} \quad (10)$$

が存在することがわかる. 従って上の二つの事実を合わせると,  $\mathcal{O}(P_{\text{B}, \text{dR}}^{\text{H}})_k^{\vee}$  の次元を評価することと  $\mathcal{O}(G_{\text{dR}}^{\text{H}})_k$  の次元を評価することは同値であることがわかる\*16.

観察 4.6.  $\mathcal{O}(G_{\text{dR}}^{\text{H}})_k$  が仮に次元が小さい  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間であれば, その部分空間である  $\mathcal{Z}_{\text{H}, k}$  も次元が小さい  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間である.

## 5 $\mathcal{Z}_{\text{H}, k}$ の評価への挑戦

まず冪単代数群  $U$  が与えられているとする.

補題 5.1. 次の自然な同型が存在する:

$$\mathcal{O}(U) \cong \widehat{U}(\text{Lie}(U))^*.$$

但し  $\widehat{U}(\text{Lie}(U))$  は  $\text{Lie}(U)$  の完備普遍包絡環とし,  $*$  は位相双対を意味する (付録 A 参照).

この補題より,  $U$  の関数環を調べることと  $\text{Lie}(U)$  を調べることは同値である. さて,  $G$  を  $\mathbf{Q}$  上のアファイン群スキームであって半直積

$$G = U \rtimes \mathbf{G}_m \quad (11)$$

で書けているものとする.

---

\*16 次数については (4) を参照.

補題 5.2. 任意の非負整数  $i$  に対して次の  $\mathbf{G}_m$  加群としての自然な同型が存在する:

$$H^i(\mathrm{Lie}(U)) := H^i(\mathrm{Lie}(U), \mathbf{Q}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}(G)}^i(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n). \quad (12)$$

ここで,  $\mathbf{Q}(n)$  に  $G$  は自然な全射  $G \rightarrow \mathbf{G}_m$  を経由して作用しているとする.

*Proof.* 明らかに同型

$$H^0(\mathbf{G}_m, H^i(\mathrm{Lie}(U)) \otimes \mathbf{Q}(n)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}(G)}^i(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$$

を任意の整数  $n$  に示せば十分である. まず,  $U$  が冪単であることから自然な  $\mathbf{Q}$  線型圏アーベル圏の同値

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathrm{Lie}(U)) \cong \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(U)$$

があることに注意する. ここで  $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathrm{Lie}(U))$  は有限次元  $\mathrm{Lie}(U)$  加群のなす圏とする. 詳細は付録 A, B を参照していただきたい. これから, 自然な同型

$$H^0(\mathbf{G}_m, H^i(\mathrm{Lie}(U)) \otimes \mathbf{Q}(n)) \cong H^0(\mathbf{G}_m, H^i(U) \otimes \mathbf{Q}(n))$$

が導かれる. 但し,  $H^i(U)$  は  $U$  の自明表現  $\mathbf{Q}$  から定まる標準複体  $\mathcal{C}^\bullet(U, \mathbf{Q})$  (定義は [5, (3.2)] 参照) の  $i$  番目のコホモロジーとして定義されるベクトル空間であり, 自然な同型

$$H^i(U) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(U)}^i(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$$

が存在する. さて, ここで Grothedieck スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{G}_m, H^q(U) \otimes \mathbf{Q}(n)) \Rightarrow H^{p+q}(G, \mathbf{Q}(n))$$

を考える.  $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{G}_m)$  が反単純なアーベル圏, 即ち任意の対象が単純対象の直和に分解する, という圏であるので  $\mathbf{G}_m$  の高次のコホモロジーは消えていることに注意すると, 上のスペクトル系列は  $E_2$  で退化し, 更に同型

$$H^0(\mathbf{G}_m, H^q(U) \otimes \mathbf{Q}(n)) \cong H^q(G, \mathbf{Q}(n))$$

を得る. 右辺は  $\mathbf{Q}$  線型アーベル圏  $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(G)$  における拡大群を計算するので, 欲しい同型が得られた.  $\square$

さて,  $i = 1, 2$  の時にリー代数のコホモロジー  $H^i(\mathrm{Lie}(U))$  の意味を思い出す. まず  $i = 1$  の時, 自然な全射

$$\mathrm{Lie}(U) \rightarrow H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee \quad (13)$$

が存在する. 更に, (13) は次のような性質を持っている:

(Gen)  $\{l_i\}_i \subset \mathrm{Lie}(U)$  を (13) での像が一次独立でベクトル空間  $H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee$  を生成しているのであれば,  $\{l_i\}$  は  $\mathrm{Lie}(U)$  を生成する.

即ち,  $H^1(\mathrm{Lie}(U))$  は  $\mathrm{Lie}(U)$  の極小生成系のはるベクトル空間の双対と同一視できる. 次に  $i = 2$  の時を考えよう.  $H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee$  の基底  $\{l_i\}_i$  を一つ固定し, それらで生成される自由リー代数を  $\mathfrak{f}$  と書くことにする. 性質 (Gen) から, 自然な全射

$$\mathfrak{f} \rightarrow \mathrm{Lie}(U) \quad (14)$$

が存在するが, この核を  $\mathfrak{t}$  とかくことにしよう<sup>\*17</sup>. すると自然な同型

$$(\mathfrak{t}/[\mathfrak{f}, \mathfrak{t}])^\vee \cong H^2(\mathrm{Lie}(U)) \quad (15)$$

が存在することが示せる. (15) の左辺の双対の中身は  $\mathrm{Lie}(U)$  の本質的な関係式のなす空間とみなせることに注意すれば,  $H^2(\mathrm{Lie}(U))$  は  $\mathrm{Lie}(U)$  の本質的な関係式の双対空間と同一視できることがわかる. この事実の証明を知りたい読者は付録 A を参照されたい (定理付録 A.19).

さて, もともとの状況に戻ることにする.  $U_{\mathrm{dR}}$  を  $G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}}$  の副単根基としたとき, 自然な同一視

$$G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} = U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} \rtimes \mathbf{G}_m \quad (16)$$

が存在することが知られている.  $\mathbf{Q}(1)$  を含む  $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$  の忠実充満部分淡中圏の族  $\mathcal{C}_i$  であって,

$$2\text{-colom}_i \mathcal{C}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$$

を満たし, 更にその淡中基本群が代数群となるようなものを取ることにする<sup>\*18</sup>.  $\mathbf{Q}(1)$  が  $\mathcal{C}_i$  の対象であるから, ある単代数群  $U_i$  があって

$$\pi_1(\mathcal{C}_i) = U_i \rtimes \mathbf{G}_m$$

と書け, 自然な同型

$$U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i U_i, \quad \mathrm{Lie}(U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathrm{Lie}(U_i) \quad (17)$$

が成立することは容易に確かめられる. リー代数  $\mathrm{Lie}(U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})$  の位相はこの同型によって右辺に離散位相の逆極限位相を入れたものと一致していることに注意しておく. 従って,  $\mathrm{Lie}(U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})$  の極小位相的生成系は

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Lie}(U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})) &:= \varinjlim_i H^1(\mathrm{Lie}(U_i)) \\ &\cong \varinjlim_i \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_i}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \\ &\cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \end{aligned} \quad (18)$$

の位相的双対と同一視でき, それらの間の関係式の位相双対は

$$\begin{aligned} H^2(\mathrm{Lie}(U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})) &:= \varinjlim_i H^2(\mathrm{Lie}(U_i)) \\ &\cong \varinjlim_i \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_i}^2(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \\ &\cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}^2(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \end{aligned} \quad (19)$$

と同一視できる. 但し, これら二つの  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間の位相は各々の二行目に現れる順極限によって定義している<sup>\*19</sup>. 以上から,  $\mathrm{Lie}(U_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})$  の構造を決定するためには  $\mathbf{Q}$  混合ホッジ・テイト構造の圏における拡大群を計算すればよいことがわかる. 実際に計算してみると以下のようなになる:

<sup>\*17</sup> つまりこれは生成元たちの間の関係式のなす空間である.

<sup>\*18</sup> このような族は存在する. 証明は難しくないので演習問題とする.

<sup>\*19</sup> 極限の中に現れる各直和成分は  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間として全て有限次元であることは明らか.

**補題 5.3.** (1) 任意の整数  $n$  に対し,  $\text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^2(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$  は消滅する.

(2) 任意の非正整数  $n$  に対し,  $\text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$  は消滅する.

(3) 任意の 1 以上の整数  $n$  に対し, 以下の自然な同型が存在する:

$$\text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{C}/(2\pi\sqrt{-1})^n \mathbf{Q})^+. \quad (20)$$

*Proof.* 主張の (2) と (3) は補題 2.4 の直接の帰結である. 同じ補題より, 任意の  $\mathbf{Q}$  ホッジ・テイト構造の全射  $H_1 \rightarrow H_2$  は拡大群の間の全射

$$\text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, H_1) \rightarrow \text{Ext}_{\text{MHT}_{\mathbf{Q}}}^1(\mathbf{Q}, H_2)$$

を誘導することがわかる. 実際  $+$  を取る操作は明らかに全射を保つからである. (1) の主張はこの事実と [9, Lemma A.33] から直ちにわかる (系付録 A.14 の証明も参照されたい).  $\square$

**系 5.4.**  $\text{Lie}(U_{\text{dR}}^{\text{H}})$  は  $\mathbf{Q}$  上非可算生成自由リー代数の副冪零完備化と同型である. 更に, 任意の正整数  $k$  に対して  $\mathcal{O}(U_{\text{dR}}^{\text{H}})_k$  は非可算次元  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間である. 特に

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_{\text{H},k} \leq \aleph.$$

従って, 残念ながらこの方法では  $\mathcal{Z}_{\text{H},k}$  が有限次元であることさえ帰結されない\*20!

## 6 まとめ, なぜ混合テイトモチーフなのか

(現実) 「大きな」圏=拡大群の次元が大きな淡中圏  $\Rightarrow \mathcal{O}(U_{\text{dR}}^{\text{H}})_k$  が巨大  $\Rightarrow$  MZVs は評価できない.

$\updownarrow$

(理想) 「小さな」圏=拡大群の次元が小さな淡中圏  $\Rightarrow$  “ $\mathcal{O}(U_{\text{dR}}^{\text{H}})_k$ ” が小さい  $\Rightarrow$  MZVs が評価できるかも?

適切な  $\text{MHT}_{\mathbf{Q}}$  の小さな部分圏を見つければ, 「同様な方法」で多重ゼータ値を持ち上げることで次元評価ができる\*21. この目的に適しているのが混合テイトモチーフの圏である (萩原氏の講演参照).

**注意 6.1.**  $\mathcal{Z}_{\text{mot},k}$  を重さ  $k$  のモチーフ的多重ゼータ値の空間とすると, 自然な同型

$$\mathcal{Z}_{\text{mot},k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{\text{H},k}$$

が存在する. 実は我々の構成した持ち上げ自体は非常に良いものなのである. この事実は混合テイトモチーフの圏からのホッジ実現函手が忠実充満であり, 更にその本質的像は部分対象を取る操作に対し閉じているという事実 ([2, Proposition 2.14]) から従う.

## 付録 A リー代数コホモロジー

この章では本文中で証明無しで使われたリー代数の結果を証明する. 記述を簡素にするために, 以下では導来圏に関する基本事項を仮定しておく. それらに関する参考書として [8] を挙げておく.

\*20 重さ  $k$  の指数は有限個しかないのだから, 有限次元であることは明らかなのである.

\*21 実際にはより難しい.  $\mathbf{G}_m$  の部分が実はかなり悪さをするので, 「部分コンパクト化」することによりその悪い部分を消しておく必要がある.

以下  $k$  は標数 0 の体とする. リー  $k$  代数とは,  $k$  ベクトル空間  $\mathfrak{g}$  と, 反射律とヤコビ律を満たすようなリー括弧積と呼ばれる  $k$  双線型写像

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

の組  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  のことであつた. 通常の記法に従つて, 括弧積の方は省略して書くことにしよう.

**定義 付録 A.1.**  $\mathfrak{g}$  加群とは,  $k$  ベクトル空間  $V$  と  $V$  への  $\mathfrak{g}$  の作用, 即ちリー代数の射

$$a: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k(V)$$

の組  $(V, a)$  のことである. 但し,  $\text{End}_k(V)$  上のリー括弧積は

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \text{End}_k(V)$$

で定めている. 簡単のため,  $a$  は省略することにする.  $V_1, V_2$  を  $\mathfrak{g}$  加群としたとき,  $V_1$  から  $V_2$  への  $\mathfrak{g}$  加群としての射とは,  $k$  線型写像

$$V_1 \rightarrow V_2$$

であつて  $\mathfrak{g}$  の作用と可換となっているものごとをさす.  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  が有限次元であるとは,  $k$  上有限次元であるときに言う.  $\text{Mod}(\mathfrak{g})$  で  $\mathfrak{g}$  加群の圏を,  $\text{Mod}^{\text{fg}}(\mathfrak{g})$  で有限次元  $\mathfrak{g}$  加群の圏を表すことにする.

簡単な例を見てみよう.

**例 付録 A.2.** (1)  $k$  と零射

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(k) = k$$

の組のことを自明な  $\mathfrak{g}$  加群と呼び,  $k$  とかく.

(2)  $\mathfrak{g}$  に  $\mathfrak{g}$  の作用をアジョイント作用で定義する:

$$\text{Ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k(\mathfrak{g}); \quad X \mapsto [X, -].$$

これは  $\mathfrak{g}$  加群  $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$  を定める.

もう一つ重要な概念を定義しよう.

**定義 付録 A.3.**  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  が代数的であるとは,  $V$  が有限次元  $\mathfrak{g}$  加群の順極限として書けるときにいう. 言い換えれば,  $V$  が代数的であるとは, 条件

$$\dim_k \langle v \rangle_{\mathfrak{g}} < +\infty, \quad \forall v \in V$$

が成立するときに言う. ここで,  $\langle v \rangle_{\mathfrak{g}}$  は  $v$  を含む最小の部分  $\mathfrak{g}$  加群のこととする.  $\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})$  で代数的な  $\mathfrak{g}$  加群のなす圏をあらわすことにする.

定義から  $k$  線型アーベル圏の“包含関係”

$$\text{Mod}^{\text{fg}}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \text{Mod}(\mathfrak{g})$$

があることがわかる.

注意 付録 A.4. (1)  $\mathfrak{g}$  が 0 でない限り  $\text{Mod}^{\text{fg}}(\mathfrak{g})$  は十分豊富に単射的対象をもたない. 一方で  $\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}), \text{Mod}(\mathfrak{g})$  はいわゆる Grothendieck のアーベル圏 ([8, Definition 8.3.24]) とよばれるものになることが確かめられるので, 十分豊富に単射的対象を持つことが分かる ([8, Theorem 9.6.2]).

(2)  $\mathfrak{g}$  が有限生成であるならば, 任意の  $\mathfrak{g}$  加群は代数的である. 即ち

$$\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\mathfrak{g}).$$

一般にはこの二つは圏同値にならない.

$V_1, V_2$  を  $\text{Mod}(\mathfrak{g})$  の対象としたとき,  $V_1 \otimes_k V_2$  に  $\mathfrak{g}$  の作用を

$$X(v_1 \otimes v_2) := Xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Xv_2$$

で定義する. また,  $k$  ベクトル空間としての準同型がなす空間  $\text{Hom}_k(V_1, V_2)$  に  $\mathfrak{g}$  の作用を

$$Xf: V_1 \rightarrow V_2; \quad v \mapsto Xf(v) - f(Xv)$$

で定める. この  $\mathfrak{g}$  加群のことを, 内部準同型と呼ぶことにする.  $\text{Mod}^{\text{fg}}(\mathfrak{g})$  は明らかに上で定めたテンソルと内部準同型に対して閉じている. 一方で  $\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})$  はテンソルで閉じるが, 内部準同型では一般には閉じないことに注意しよう. しかし,  $V_1$  が有限次元であれば  $\text{Hom}_k(V_1, V_2)$  は再び代数的となる.

リー代数コホモロジーを定義しよう. 函手

$$H^0(\mathfrak{g}, -): \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Vec}_k$$

を

$$H^0(\mathfrak{g}, V) := \text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(k, V)$$

で定義する.  $H^0(\mathfrak{g}, -)$  は左完全函手であることが確かめられる.

定義 付録 A.5.  $i$  を非負整数とする. このとき函手

$$H^i(\mathfrak{g}, -): \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Vec}_k$$

を  $H^0(\mathfrak{g}, -)$  の  $i$  次右導来函手として定める.

リー代数コホモロジーのより具体的な表示を与えよう.  $\mathfrak{g}$  の普遍包絡環  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  を

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}) / (X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g})$$

で定義する. ここで  $T(\mathfrak{g})$  は  $k$  ベクトル空間  $\mathfrak{g}$  から定まるテンソル代数

$$T(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overbrace{\mathfrak{g} \otimes_k \cdots \otimes_k \mathfrak{g}}^n$$

とし,  $(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g})$  は  $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$  達で生成される  $T(\mathfrak{g})$  の両側イデアルとする. 自明ではないが  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  とみなせ, リー代数準同型  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k(V)$  は  $k$  代数の準同型  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k(V)$  へ一意的に延長される. この対応により, 我々は函手

$$\text{Mod}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \tag{21}$$

を得るが、これは圏同値を与えている。実際、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  加群  $V$  が与えられたとしたとき、 $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  で  $\mathfrak{g}$  の各元の  $V$  への作用を定義すると、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の定義からこれは  $\mathfrak{g}$  の作用を定義しており、この自然な対応が擬逆函手を与える。例えば左からの積により  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  を自分自身の左加群とみなしたとき、対応する  $\mathfrak{g}$  の  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  への作用は単に左からの掛け算

$$X \cdot \xi := X\xi, \quad X \in \mathfrak{g}, \xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

により与えられている。さて、(21) によって  $\text{Mod}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$  にも自然なテンソル構造を入れることが出来るが、それは具体的に表記すると以下のようにになっている。 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の余積  $\Delta: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$  を

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

を満たすただ一つの  $k$  代数の準同型として定義する。 $V_1, V_2$  を  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  加群としたとき、そのテンソル  $V_1 \otimes_k V_2$  上に  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の作用を

$$\xi(v_1 \otimes v_2) := \Delta(\xi)(v_1 \otimes v_2), \quad \forall \xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

で定義する。 $\Delta$  の定義からこれが well-defined であることと (21) と両立的であることがわかる。また、オーギュメンテーション写像と呼ばれる環準同型  $\text{aug}$  を

$$\text{aug}: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow k; \quad \mathfrak{g} \ni X \mapsto 0$$

を満たすように定める。すると組  $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \Delta, \text{aug})$  はホップ  $k$  代数となることが容易に確かめられる。これから、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の  $k$  双対

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^\vee := \text{Hom}_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), k)$$

には自然にホップ  $k$  代数の構造が入る。しかも、 $\Delta$  の定義からこの積構造は可換である。

代数的な  $\mathfrak{g}$  加群を扱う際には、この普遍包絡環を完備化する必要がある。

**定義 付録 A.6.**  $\mathfrak{g}$  の完備普遍包絡環  $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$  は以下の射影極限で定義される位相  $k$  代数のことである:

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) := \varprojlim_I \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I.$$

ここで  $I$  は  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の余次元有限両側イデアルを走り、 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$  には各有限次元商には離散位相を入れてその射影極限位相が入っているとみなして位相環だと思ふことにする。

定義から、 $\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})$  は  $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$  が連続に作用する離散位相付き  $k$  ベクトル空間の圏と同値となっている。特に、任意の有限次元  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  が与えられたとき、作用  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k(V)$  は自然な連続環準同型

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k(V) \tag{22}$$

に伸びる。但し  $\text{End}_k(V)$  には離散位相を入れている。以下では任意の有限次元ベクトル空間に対して「その位相」と言うときは、離散位相をさすことにしよう。以前定義した  $\Delta, \text{aug}$  はこの完備化された普遍包絡環に自然に伸びることに注意しておこう。

$$\Delta: \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \hat{\otimes}_k \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), \quad \text{aug}: \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \rightarrow k.$$

但し  $\hat{\otimes}$  は完備テンソル積のこととする:

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \hat{\otimes}_k \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) := \varprojlim_{I, I': \text{余次元有限両側イデアル}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'.$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の場合と同じ様に,  $(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), \Delta, \text{aug})$  は位相ホップ  $k$  代数となることが確かめられる.  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$  の連続双対  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$  を

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^* := \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), k)$$

で定義することにする\*22と,  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$  が可換ホップ  $k$  代数の構造を持つことは明らかであろう. また位相の定義により  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$  は代数的な  $\mathfrak{g}$  加群となっている.

**補題 付録 A.7.**  $V$  を一次元  $\mathfrak{g}$  加群とし,  $\nu: \mathfrak{g} \rightarrow k = \text{End}_k(V)$  を与えられた作用とする. これから誘導される連続準同型  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \rightarrow k$  も同様の記号  $\nu$  で表すことにしよう. このとき,  $\nu \in \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$  は可換環  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$  の単元である.

*Proof.*  $-\nu: \mathfrak{g} \rightarrow k = \text{End}(V)$  を  $\nu$  に  $-1$  を掛けて得られるリー代数射とする. 一般にはリー代数の射の  $-1$  倍はリー代数の射ではないが,  $k$  がアーベルなリー代数であるのでこのような操作をしても差し支えないことに注意しよう. 前と同様に

$$-\nu: \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \rightarrow k$$

で誘導される連続準同型を表すことにしよう. すると,  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$  の積の定義から  $\nu$  と  $-\nu$  の積は零射

$$0: \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\} \subset k = \text{End}(V)$$

から誘導される連続環準同型であることがわかり, それはすなわちオーギュメンテーションである:

$$(\nu) \times (-\nu) = \text{aug} \in \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*.$$

$\text{aug}$  は環  $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$  の乗法に関する単位元であったので, 主張は示せた.  $\square$

**補題 付録 A.8.** 任意の代数的  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  と正の整数  $n$  に対して,  $\mathfrak{g}$  加群  $\text{Hom}_k^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes} n}, V)$  は単射的  $\mathfrak{g}$  加群である.

*Proof.* 以下の証明は Fontaine による議論 ([4, Proposition 1.4.2]) を参考にした.  $n$  が 2 以上のとき, 自然なアジョイント射

$$\text{Hom}_k^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes} (n-1)}, V)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes} n}, V)$$

は  $\mathfrak{g}$  の作用と両立的であることが分かる. 従って  $n = 1$  の場合に主張を示せば十分である. ここで, 任意の有限次元  $\mathfrak{g}$  加群の順系  $\{V_j\}_{j \in J}$  の極限としてかける  $\mathfrak{g}$  加群  $V = \varinjlim_{j \in J} V_j$  と代数的  $\mathfrak{g}$  加群の順系  $\{W_i\}_{i \in I}$  に対し,

$$\text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})} \left( V, \varinjlim_{i \in I} W_i \right) \cong \varprojlim_{j \in J} \varprojlim_{i \in I} \text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(V_j, W_i)$$

\*22 勿論  $k$  には離散位相が入っていると考えている.

が成立していることに注意する。\$W\_i\$ が単射的であるならば \$j\$ についての射影系 \$\varinjlim\_{i \in I} \text{Hom}\_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(V\_j, W\_i)\$ は Mittag-Leffler 条件を満たしていることに注意すれば、函手 \$\text{Hom}\_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(-, \varinjlim\_{i \in I} W\_i)\$ は完全函手であることがわかる。即ち、\$\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})\$ に於いては単射の対象は順極限で保たれることがわかる。従って最初から \$V\$ は有限次元であると仮定してよい。

\$V^{\mathfrak{f}}\$ で \$V\$ から \$\mathfrak{g}\$ 作用を自明にして得られる \$\mathfrak{g}\$ 加群を表すことにする。さて、\$v \in V\$ に対して、\$\text{Hom}\_{\mathfrak{g}}^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)\$ の元 \$f\_v\$ を \$f\_v(1) := v\$ で定義する。すると、明らかに対応 \$v \mapsto f\_v\$ は \$\mathfrak{g}\$ 加群の間の単射

$$V^{\mathfrak{f}} \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V) \subset \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)$$

を定める。この射を自然に伸ばして得られる \$\mathfrak{g}\$ 加群の射

$$V^{\mathfrak{f}} \otimes \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^* \rightarrow \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V); \quad v \otimes f \mapsto [u \mapsto f(u)uv] \quad (23)$$

を考えよう。これが同型である事が示せれば任意の \$\mathfrak{g}\$ 加群 \$W\$ に対して

$$\text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(W, \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)) \cong \text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), k) \otimes_k (W^{\vee} \otimes_k V)^{\mathfrak{f}}$$

が成立するので、(23) の右辺は単射的对象であることがわかる。

以下 (23) の同型性を示そう。\$\mathcal{R} := \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^\*\$ と置き、以下自然な同型

$$\mathcal{R} \otimes_k V = \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^* \otimes_k V \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)$$

によりこれら二つの \$k\$ ベクトル空間を同一視する。まず \$V\$ が一次元である場合を考える。\$v\$ を \$V\$ の基底とし、射 (23) における \$v \otimes 1\$ の行き先を \$\alpha \otimes v \in \mathcal{R} \otimes\_k V\$ と書く。\$\mathcal{R} \otimes\_k V\$ は \$1 \otimes v\$ で生成される階数 1 の自由 \$\mathcal{R}\$ 加群なので、(23) が同型である必要十分条件は \$\alpha \in \mathcal{R}^{\times}\$ である。\$\nu: \mathfrak{g} \rightarrow k = \text{End}\_k(V)\$ を与えられた \$\mathfrak{g}\$ の表現とすれば、定義より \$\alpha \in \mathcal{R} = \text{Hom}\_k^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), k)\$ は \$\nu\$ より誘導された環準同型であることがわかる。即ち、

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(X\xi) = \nu(X)\alpha(\xi), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \xi \in \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}).$$

補題付録 A.7 によればそのような \$\alpha\$ は \$\mathcal{R}\$ の単元であるから、以上で \$V\$ の次元が 1 の場合の証明は完了した。

次に一般次元の場合を考えよう。\$v\_1, \dots, v\_n\$ を \$V\$ の基底とすると、任意の \$F \in \mathcal{R} \otimes\_k V\$ は

$$F = \sum_i f_i v_i, \quad f_i \in \mathcal{R}$$

と一意的に書けることに注意しよう。そこで

$$f_{v_i} = \sum_{j=1}^n f_{ij} v_j, \quad f_{ij} \in \mathcal{R}$$

と表示したとき、行列式 \$\det(f\_{ij}) \in \mathcal{R}\$ が単元であることを示せば良い。これは、\$\mathfrak{g}\$ 加群 \$\det\_k(V)\$ を \$V\$ の最高次外積として定義したとき、自然な射

$$\det_k(V)^{\mathfrak{f}} \otimes_k \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \otimes_k \det_k(V)$$

が同型であることと同値である。この場合は既に示したので、以上で証明が完了した。 \$\square\$

定義 付録 A.9.  $V$  を  $\mathfrak{g}$  加群としたとき, 任意の非負整数  $n$  に対して  $k$  ベクトル空間  $C^n(\mathfrak{g}, V)$  を

$$C^n(\mathfrak{g}, V) := \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\widehat{\otimes}(n+1)}, V)$$

で定める. また  $k$  線型写像

$$d^n: C^n(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$$

を等式

$$d^n f(\xi_0 \otimes \xi_1 \cdots \otimes \xi_{n+1}) := \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \text{aug}(\xi_j) f(\xi_0 \otimes \cdots \otimes \xi_{j-1} \otimes \xi_{j+1} \otimes \cdots)$$

で定める.

補題 付録 A.10. 任意の非負整数  $n$  に対して  $d^n$  は  $\mathfrak{g}$  加群の射となる. 更に,  $\mathfrak{g}$  加群の射  $d^{-1}: V \rightarrow C^0(\mathfrak{g}, V)$  を

$$d^{-1}(v): \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \rightarrow V; \quad \xi \mapsto \text{aug}(\xi)v$$

で定めると,  $\mathfrak{g}$  加群の列

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{d^{-1}} C^0(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^1} \cdots \rightarrow C^n(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

は完全列となる.

*Proof.* 証明は極めて標準的なので, 読者の演習問題とする. □

定義 付録 A.11. 代数的  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  に対して,  $\mathfrak{g}$  加群のなす複体  $C^\bullet(\mathfrak{g}, V) := (C^n(\mathfrak{g}, V), d^n)_{n \geq 0}$  のことを  $V$  の標準分解と呼ぶ. 補題付録 A.8 と付録 A.10 より, これは  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  の単射分解を与えている.

以上の議論により, 自然な同型

$$H^i(\mathfrak{g}, V) \cong H^i(H^0(\mathfrak{g}, C^\bullet(\mathfrak{g}, V))) \quad (24)$$

があることが分かる. 即ち,  $Z^i(\mathfrak{g}, V)$ ,  $B^i(\mathfrak{g}, V)$  を

$$\begin{aligned} Z^i(\mathfrak{g}, V) &:= H^0(\mathfrak{g}, C^i(\mathfrak{g}, V)) \cap \text{Ker}(d^i), \\ B^i(\mathfrak{g}, V) &:= \begin{cases} d^{i-1}H^0(\mathfrak{g}, C^{i-1}(\mathfrak{g}, V)), & i > 0, \\ 0, & i = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

と置くと, 自然な同型

$$H^i(\mathfrak{g}, V) \cong Z^i(\mathfrak{g}, V)/B^i(\mathfrak{g}, V)$$

を得る.

定義から  $H^0(\mathfrak{g}, -)$  は明らかになっているが, 1 次のコホモロジーまでは比較的易しく計算できる.

命題 付録 A.12.  $V$  を代数的  $\mathfrak{g}$  加群としたとき, 以下の自然な同型が存在する:

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{g}, V) &\cong \{f: \mathfrak{g} \rightarrow V \mid \text{連続 } k \text{ 線型}, f([X, Y]) = Xf(Y) - Yf(X), \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}, \\ B^1(\mathfrak{g}, V) &\cong \{f_v: \mathfrak{g} \rightarrow V; X \mapsto Xv \mid v \in V\}. \end{aligned} \quad (26)$$

ここで,  $\mathfrak{g}$  の位相は  $\mathfrak{g} \rightarrow \widehat{U}(\mathfrak{g})$  による相対位相を取る.

*Proof.* 命題の右辺に現れる  $k$  ベクトル空間をそれぞれ  $\widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$ ,  $\widetilde{B}^1(\mathfrak{g}, V)$  と表すことにする.  $C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$  は  $n$  が 1 以上の項では完全列であるので, 定義から

$$Z^1(\mathfrak{g}, V) = H^0(\mathfrak{g}, \text{Im}(d^0))$$

は明らかであろう. そこで  $d^0(f) \in H^0(\mathfrak{g}, \text{Im}(d^0))$  を取ると,  $\mathfrak{g}$  の作用と  $d^0$  の定義から, 以下の等式が成立することが分かる:

$$\begin{aligned} 0 &= (Xd^0(f))(\xi \otimes \eta) = X(d^0(f)(\xi \otimes \eta)) - d^0f(X\xi \otimes \eta + \xi \otimes X\eta) \\ &= \text{aug}(\xi)Xf(\eta) - \text{aug}(\eta)Xf(\xi) + \text{aug}(\eta)f(X\xi) - \text{aug}(\xi)f(X\eta). \end{aligned} \quad (27)$$

ここで  $\xi = Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\eta = 1$  と置くと,

$$d^0(f)(XY \otimes 1) = -f(XY) = -Xf(Y) = Xd^0(f)(Y \otimes 1) \quad (28)$$

を得る. そこで  $k$  線型写像  $\alpha: Z^1(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$  を

$$\alpha(g): \mathfrak{g} \rightarrow V; \quad X \mapsto g(X \otimes 1)$$

で定めると,  $\alpha$  は well-defined であることが, 等式 (28) からわかる. 逆に  $f \in \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$  を取ったときに,  $k$  線型写像  $\tilde{f}: \widehat{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow V$  を

$$\tilde{f}(X\xi) = X\tilde{f}(\xi), \quad \tilde{f}(X) = f(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \xi \in \widehat{U}(\mathfrak{g})$$

を満たすように定義することが可能であることが,  $\widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$  の定義と帰納的議論からわかる. そこで  $\beta$  を

$$\beta: \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V) \rightarrow Z^1(\mathfrak{g}, V); \quad f \mapsto d^0(\tilde{f})$$

により定義するとこれが  $\alpha$  の逆写像を与える.  $B$  達に関する証明は易しいので省略する.  $\square$

$V$  として自明な  $\mathfrak{g}$  加群を取ると, 右辺の表示はより易しく書ける.

系 付録 A.13. 以下の自然な同型が存在する:

$$H^1(\mathfrak{g}, k) = \text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}, k) = \text{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\text{ab}}, k).$$

ここで  $\mathfrak{g}^{\text{ab}}$  は  $\mathfrak{g}$  のアーベル化  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  のこととする. 特に,  $\mathfrak{g}$  が  $k$  上有限生成であれば双対空間  $H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee = \mathfrak{g}^{\text{ab}}$  の任意の基底の持ち上げは  $\mathfrak{g}$  の極小生成系となる.

*Proof.* これは命題付録 A.12 の右辺に自明な  $\mathfrak{g}$  加群  $k$  を代入すれば直ちに得られる.  $\square$

系 付録 A.14.  $\mathfrak{g}$  を  $k$  上の自由リー代数とする. このとき, 任意の代数的  $\mathfrak{g}$  加群の間の全射  $V \twoheadrightarrow V'$  は, 一次のコホモロジーの間の全射

$$H^1(\mathfrak{g}, V) \twoheadrightarrow H^1(\mathfrak{g}, V')$$

を誘導する. 特に,

$$H^i(\mathfrak{g}, V) = 0, \quad \forall i \geq 2, \forall V \in \text{Obj}(\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}))$$

が成立する.

*Proof.* まず最初の主張を示す.  $\{X_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{g}$  を自由リー代数  $\mathfrak{g}$  の自由生成系とする. このとき, 自然な同型

$$\Phi_V: \tilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\sim} V^{\oplus I}; \quad f \mapsto (f(X_i))_{i \in I}$$

が存在することに注意する. すると, 定義から次の図式が可換になっていることが直ちにわかる:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathfrak{g}, V) & \longleftarrow & \tilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\Phi_V} & V^{\oplus I} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathfrak{g}, V') & \longleftarrow & \tilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V') & \xrightarrow{\Phi_{V'}} & V'^{\oplus I}. \end{array}$$

$\Phi_V, \Phi_{V'}$  は同型であるので, 左端の縦の射もやはり全射であることがわかる.

二つ目の主張を示そう. 任意の代数的  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  は単射的な  $\mathfrak{g}$  加群  $\tilde{V}$  に埋め込むことができる事を思い出す:

$$V \hookrightarrow \tilde{V}$$

(例えば  $\tilde{V}$  として  $C^0(\mathfrak{g}, V)$  を取ればよい). すると  $\tilde{V}$  が単射的であることから任意の正の整数  $i$  に対して  $H^i(\mathfrak{g}, \tilde{V}) = 0$  となるので, 全ての 1 以上の整数  $i$  に対して単完全列

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/V \rightarrow 0$$

から導かれる連結準同型は同型

$$H^i(\mathfrak{g}, \tilde{V}/V) \xrightarrow{\cong} H^{i+1}(\mathfrak{g}, V) \quad (29)$$

を引き起こすことが直ちにわかる. 一方で最初の主張によると  $H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}/V)$  なので,  $H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}/V) = 0$  が  $H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}) = 0$  より従う. 従って  $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$  が任意の代数的  $\mathfrak{g}$  加群に対して示せた. 一般の  $i$  に対しては (29) と帰納的な議論により容易に結論が導かれる.  $\square$

さて, リー代数の全射

$$\mathfrak{g}' \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$$

が与えられているとし, この核であるリーイデアルを  $\mathfrak{r}$  と書くことにする.

**補題 付録 A.15.** 函手

$$H^0(\mathfrak{r}, -): \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}') \rightarrow \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}); \quad V \mapsto H^0(\mathfrak{r}, V)$$

は単射的対象を保つ.

*Proof.* これは, 自然な引き戻し函手

$$\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}'); \quad V \mapsto V$$

が  $H^0(\mathfrak{r}, -)$  の左随伴函手であり, 更に完全函手であることから直ちに従う.  $\square$

任意の代数的  $\mathfrak{g}'$  加群  $V$  に対して, 明らかに

$$H^0(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{r}, V)) = H^0(\mathfrak{g}', V)$$

が成立するので, 補題付録 A.15 より Grothendieck のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, H^q(\mathfrak{r}, V)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{g}', V) \quad (30)$$

が存在する. このスペクトル系列と, スペクトル系列の一般論から完全列

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{r}, V)) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}', V) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, V)) \xrightarrow{d_{0,1}^2} H^2(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{r}, V)) \quad (31)$$

を得る. 更にこのスペクトル系列で  $p, q$  が負の項は 0 なので,  $d_{0,1}^2$  の余核が  $E_\infty^{2,0}$  となることも直ちにわかる:

$$\text{Cok}(d_{0,1}^2) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{2,0}. \quad (32)$$

**命題 付録 A.16.**  $\{X_i\}_{i \in I}$  を  $\mathfrak{g}$  の生成系で,  $\mathfrak{g}^{\text{ab}}$  での像が  $k$  上一次独立となっているものとする.  $\mathfrak{g}'$  を集合  $I$  で生成される自由リー  $k$  代数とし,

$$\pi: \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}; \quad i \mapsto X_i$$

を自然な全射とする.  $\mathfrak{r} := \text{Ker}(\pi)$  と置くと, スペクトル系列 (30) は自然な同型

$$d_{0,1}^2: H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{g}, k)$$

を引き起こす.

*Proof.* まず,  $\mathfrak{g}'$  の定義から, 全射  $\pi$  は同型

$$H^1(\mathfrak{g}, k) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{g}', k)$$

を引き起こすことに注意する. 従って, これと完全列 (31) から  $d_{0,1}^2$  は単射であることがわかる:

$$d_{0,1}^2: H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \hookrightarrow H^2(\mathfrak{g}, k).$$

一方で系付録 A.14 より, 任意の  $p+q \geq 2$  を満たす非負整数  $p, q$  に対して  $E_\infty^{p,q} = 0$  であることがわかる.  $d_{0,1}^2$  の余核が  $E_\infty^{2,0}$  であったから (式 (32) 参照),  $d_{0,1}^2$  は全射であることもわかる. 以上で命題は証明された.  $\square$

次の補題は計算に於いて重要であるが, 証明は若干面倒であるので, ここでは省略したいと思う.

**補題 付録 A.17.** [7, Proposition 3.10, 5.7, 5.8] 自然な制限関手

$$\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g}') \rightarrow \text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{r}); \quad V \mapsto V$$

は完全であり, 更に単射の対象を保つ.

さて, 命題付録 A.16 の左辺を計算しよう.

補題 付録 A.18. 記号は命題付録 A.16 と同様とする. このとき, 自然な同型

$$H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \cong (\mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}'])^\vee$$

が存在する.

*Proof.* 系付録 A.13 から, 以下の自然な同型が存在することは直ちにわかる:

$$H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \cong \text{Hom}_{\text{Mod}^{\text{alg}}(\mathfrak{g})}(k, \text{Hom}_k(\mathfrak{r}^{\text{ab}}, k)) \cong \text{Hom}_k(H_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{r}^{\text{ab}}), k).$$

但し任意の  $\mathfrak{g}$  加群  $V$  に対して  $H_0(\mathfrak{g}, V)$  を  $V$  の最大  $\mathfrak{g}$  自明商として定義している. 即ち,

$$H_0(\mathfrak{g}, V) := V/\mathcal{U}(\mathfrak{g})V.$$

$\mathfrak{g}$  の  $\mathfrak{r}$  への作用は各元のアジョイント作用と同一視できることが標準分解の定義と補題付録 A.17 から確認できるので, 自然な同一視

$$\{Xy \mid X \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{r}^{\text{ab}}\} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{g}', \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{r}]$$

を得る. 従って主張は示せた. □

以上をまとめると, 結局我々は次の結果を得たことになる:

定理 付録 A.19.  $k$  を体とし,  $\mathfrak{g}$  を有限生成リー  $k$  代数とする.

- (1)  $H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee$  は  $\mathfrak{g}$  の極小生成系と同一視できる. 即ち,  $\mathfrak{f} := \text{Lie}(H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee)$  で  $k$  ベクトル空間  $H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee$  の基底で生成されるリー  $k$  代数を表すことにすると, アーベル化が同型であるような自然な全射

$$\pi: \mathfrak{f} := \text{Lie}(H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee) \twoheadrightarrow \mathfrak{g} \tag{33}$$

が存在する.

- (2)  $\mathfrak{r} := \text{Ker}(\pi)$  と置くと, 自然な同型

$$(\mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}])^\vee \cong H^2(\mathfrak{g}, k)$$

が存在する. 特に,  $H^2(\mathfrak{g}, k) = 0$  であれば  $\pi$  は同型である.

## 参考文献

- [1] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, Galois groups over  $\mathbf{Q}$  (Berkeley, CA, 1987), 79–297, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **16**, Springer, New York, 1989.
- [2] P. Deligne, A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **38** (2005), 1–56.
- [3] P. Deligne, J. Milne, Tannakian categories, in Hodge Cycles, Motives and Shimura varieties, *Lecture Notes in Math.*, **900**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [4] J.-M. Fontaine, Représentations  $p$ -adiques semi-stables, *Periodes  $p$ -adiques* (Bures-sur-Yvette, 1988), *Astérisque*, no. **223** (1994), 113–184.

- [5] R. Hain, Deligne-Beilinson cohomology of affine group schemes, in *Hodge theory and  $L^2$  methods* edited by Lizhen Ji and Steven Zucker, International Press, 377–418.
- [6] A. Huber, S. Müller-Stach, Periods and Nori motives, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*.
- [7] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. **131**, Academic Press, 1987.
- [8] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and sheaves*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. **332**.
- [9] C. Peters, J. Steenbrink, *Mixed Hodge Structures*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. **52** (2008).
- [10] J. P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Second edition, *Lecture Notes in Mathematics*, **1500** Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [11] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Reprint of the 1998 second edition, in *Modern Birkhäuser Classics*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

# 「多重ゼータ値」から「モチヴィック多重ゼータ値」へ

萩原 啓 (理化学研究所・慶應義塾大学)

## 0. 記号と約束事

- 記号  $\mathbb{N}, \mathbb{N}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  はそれぞれ非負整数、正整数、整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。
- 本稿では環といえば単位的可換環のことを指し、環  $R$  に対し  $R$  代数と言えは  $R$  からの環準同型が指定された環のことを指す。
- 関手は常に共変なもののみを考える。圏  $\mathcal{C}$  から圏  $\mathcal{D}$  への反変関手を考えたいときは、反圏  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  からの関手を考える。
- 記号  $\mathfrak{h}$  は Hoffman 代数  $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  を表す。これは、シャッフル積および  $\deg e_i = 1$  という次数付けによって次数付  $\mathbb{Q}$  代数とみる。また、 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}_+^r$  に対し  $e_{\mathbf{k}} = e_1 e_0^{k_1-1} \dots e_1 e_0^{k_r-1}$ 、 $\text{dep}(\mathbf{k}) = r$  とおく。
- 集合全体のなす圏を **Set** で表す。
- 体  $K$  に対し  $\mathbf{Vec}_K$ 、 $\mathbf{Vec}_K^{\text{fin}}$ 、 $\mathbf{GrVec}_K$ 、 $\mathbf{GrVec}_K^{\text{fin}}$  でそれぞれ  $K$  ベクトル空間の圏、有限次元  $K$  ベクトル空間の圏、次数付  $K$  ベクトル空間の圏、次数付  $K$  ベクトル空間で次数付けを忘れたときに有限次元であるようなものの圏を表す。また環  $R$  に対し  $\mathbf{Mod}_R$ 、 $\mathbf{Alg}_R$ 、 $\mathbf{AffSch}/R$  で  $R$  加群、 $R$  代数、 $R$  上のアフィンスキームの圏を表す。
- 次数付  $K$  ベクトル空間と  $\mathbb{G}_m$  表現 (左からの  $K$  線型作用) との同一視は「 $r \in \mathbb{G}_m$  が  $r^n$  倍で作用する部分」が次数  $n$  となるようにする。
- 次数付  $K$  ベクトル空間  $V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k$  に対し、 $V^\circ = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_{-k}$  とおく。

## 1. 序

1.1. 目標. まず、2つの自然数列を導入する。

- 定義. (1) 各  $k \in \mathbb{N}$  に対し、ウェイト  $k$  の多重ゼータ値で  $\mathbb{Q}$  上生成される  $\mathbb{R}$  の部分  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間を  $\mathcal{Z}_k$  と書く。その  $\mathbb{Q}$  上の次元を  $d'_k$  と書く。また、 $\mathcal{Z}_\bullet = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_k$  とおく。
- (2) 数列  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  を  $(1 - t^2 - t^3)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k t^k \in \mathbb{Z}[[t]]$  で定める。

本稿の目的は、以下の定理の、混合 Tate モチーフおよび  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  のモチーフ論的基本亜群をもちいた証明についてその概略を紹介することである:

定理 1.1. (Deligne, Goncharov, 寺杣) 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対し、不等式

$$d'_k \leq d_k$$

が成り立つ。

1.2. 証明の戦略および本稿の構成. 本稿では実際には以下の定理を示す:

定理 1.2. 以下の条件を満たすような次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{A}^{\text{MT}}$  および  $\mathcal{H}$ 、次数付  $\mathbb{Q}$  代数準同型  $\zeta^{\text{mot}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{H}$ 、環準同型  $\text{per} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  が存在する:

- (1) 次数付  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間として、 $\mathcal{A}^{\text{MT}}$  は  $\{x_{2k+3} \mid k \in \mathbb{N}\}$  上自由に生成された非可換  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathbb{Q}\langle x_3, x_5, \dots \rangle$  に同型である。ここで  $\deg x_i = i$  とする。
- (2) 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H} & \xrightarrow{\zeta^{\text{an}}} & \mathbb{C} \\ & \searrow \zeta^{\text{mot}} & \nearrow \text{per} \\ & & \mathcal{H} \end{array}$$

は可換である。ここで  $\zeta^{\text{an}}$  は  $e_{\mathbf{k}}$  に  $(-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$  を対応させる  $\mathbb{Q}$  代数準同型である。

- (3) 次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{H}$  は、
- (a) 整域であり、
  - (b) 2 次の部分  $\mathcal{H}_2$  が 1 次元  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間であり、
  - (c) 次数付  $\mathbb{Q}$  代数としての同型  $\mathcal{H}/(\mathcal{H}_2) \cong \mathcal{A}^{\text{MT}}$  を持つ (ここで左辺の分母は  $\mathcal{H}_2$  で生成されるイデアルを表す)。
- 特に、任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対し  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{k-2} \rightarrow \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{A}_k^{\text{MT}} \rightarrow 0$$

が存在する。

まずは、この定理からどのようにして定理 1.1 が従うかを見る。その為に記号を 2 つ導入する。

**定義.** (1) 次数付  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間  $V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_k$  で、各  $V_k$  が有限次元であるものに対し、冪級数  $H_V(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$  を

$$H_V(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\dim_{\mathbb{Q}} V_k) t^k$$

と定める。

- (2) 実係数の冪級数  $f, g \in \mathbb{R}[[t]]$  に対し、 $f - g$  の全ての係数が 0 以上であることを  $f \gg g$  と表す。

さて、定理 1.2 を認めると不等式列

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{Z}\bullet}(t) &\ll H_{\text{Image } \zeta^{\text{mot}}}(t) \ll H_{\mathcal{H}}(t) = H_{\mathcal{A}^{\text{MT}}}(t) \cdot (1 - t^2)^{-1} \\ &= \frac{1}{1 - t^3 - t^5 - t^7 - \dots} \cdot \frac{1}{1 - t^2} \\ &= \frac{1}{1 - t^2 - t^3} \end{aligned}$$

が得られ、これから定理 1.1 は直ちに従う。ここで、第 1、第 2 の不等式は定理 1.2 (2) の可換性から、第 3 の等式は定理 1.2 (3) の最後の注意から、第 4 の等式は定理 1.2 (1) からの帰結である。

- 註 1.3. (1) 定理 1.2 に現れる各代数に関して幾つかコメントする。
- (a) 環  $\mathcal{A}^{\text{MT}}$  は「混合 Tate モチーフのなす淡中圏の淡中基本群」(の冪単部分) の関数環であり、純粋にモチーフ論的な対象である。
  - (b) 環  $\mathcal{H}$  は「Betti-de Rham 捻子」の関数環の部分代数であり、これはモチーフの Betti 実現と de Rham 実現との「ずれ」を統率する対象である。また、準同型  $\text{per}$  はその「ずれ」を周期として取り出す写像である。

- (c) 環  $\mathfrak{H}$  は本稿の枠組みにおいては「 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  の de Rham 的基本 (重) 群」(実際にここで用いるのはパス空間) の関数環として解釈され、 $\zeta^{\text{mot}}$  は「Betti 実現における 0 から 1 へのパスとのペアリング」から得られる写像である。
- (2) 環  $\mathcal{H}$  の元  $(-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta^{\text{mot}}(e_{\mathbf{k}})$  は、 $\zeta(\mathbf{k})$  に移されることから分かるように、多重ゼータ値の「モチーフ論的持ち上げ」、すなわち「モチヴィック多重ゼータ値」というべきものであり、 $\zeta^{\text{mot}}$  の核は「モチヴィック多重ゼータ値の関係式」の集合というべきものである。
- (3) 上の証明における第 2 の不等式は、実は等式であることが Francis Brown によって証明されている。第 1 の不等式も等式であると期待されているものの、通常多重ゼータ値とモチヴィック多重ゼータ値との関係を扱う超越数論的な箇所であり、現時点では(おそらく)ほとんど何も知られていない。

さて、次節以降では定理 1.2 の証明について解説していく。まず第 2 節では「混合 Tate モチーフの圏」を導入しその性質を用いて (1) を導く。次に第 3 節では「 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  のモチーフ論的パス空間」と「Betti-de Rham 捻子」を用いて次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\widetilde{\mathcal{H}}$ 、次数付  $\mathbb{Q}$  代数準同型  $\zeta^{\text{mot}} : \mathfrak{H} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$  及び環準同型  $\text{per} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  を構成し、(2) の可換図式の類似 ( $\mathcal{H}$  を  $\widetilde{\mathcal{H}}$  で置き換えたもの) が得られることを示す。最後に第 4 節で、 $\widetilde{\mathcal{H}}$  の部分代数として  $\mathcal{H}$  を構成し、それが (2) の可換図式を誘導することと (3) の諸性質を示す。

なお、本稿を書くにあたって参考にした文献は、主として Deligne-Goncharov の論文 [DG05]、Burgos Gil-Fresán による解説記事 [BGF]、および安田氏の解説記事 [Yas14] であるが、その他 Deligne による論文 [Del89] および Bourbaki セミナーの記事 [Del13]、定理 1.1 への別アプローチを与えている Goncharov のプレプリント [Gon] や寺杉氏による論文 [Ter02] なども適宜参考にした。

本稿の内容はあくまで、広大なモチヴィック多重ゼータ値の世界への第一歩に過ぎないので、より詳しい解説および進んだ話題に興味を持たれた読者は是非これらも参考にして頂きたいと思う。

本節を終えるに当たり、当サマースクールの世話人、京都大学の佐久川憲児氏、愛知県立大学の田坂浩二氏、福岡工業大学の三柴善範氏の三氏には、拙稿の執筆に関して多大なる御支援と御尽力を頂いたことを感謝いたします。また、事前の勉強会およびサマースクールに参加し、さまざまな質問およびコメントを下さった皆様、とりわけ慶應義塾大学の山本修司氏、大阪大学の安田正大氏、草稿に対して有益なコメントを下さった佐久川氏には、本稿の内容に関する筆者の理解を深めて下さったことをこの場を借りて感謝いたします。

## 2. 混合 TATE モチーフの圏とその淡中群

本節では、[DG05] でその構成法が与えられている「 $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏」 $\text{MTM}_{/\mathbb{Z}}$  について、その性質を述べ、次にそれら諸性質を認めた上での  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{A}^{\text{MT}}$  の定義および定理 1.2 (1) の証明の概略、最後に [DG05] における  $\text{MTM}_{/\mathbb{Z}}$  の構成法の概略について解説する。しかしながら、これらの内容をきちんと理解する為には、そのような圏が構成できる(存在する)と信じられていた背景である(混合)モチーフの理論の大枠について知っておくことが有用であると思われるので、まずはこれについて非常に大雑把にはあるが触れる。なお、2.1 節に関して、より詳しい内容に興味がある読者は、例えば André の本 [And04] などを参照されたい。

2.1. モチーフ論的背景. そもそも、モチーフとは、Weil 予想の解決を動機の一つとして、Grothendieck によって提唱された対象で、しばしば標語的に言われているように代数多様体の「普遍的なコホモロジー理論」というべきものである (正確には、本稿で扱うモチーフとは通常「混合モチーフ」と呼ばれているもので、Grothendieck が当時考えていた「純モチーフ」を含む、より一般的な概念である)。また、一般にコホモロジー理論というものが、位相空間や代数多様体などの「図形」の、「線型代数化」であることを考えると、「代数多様体の圏の普遍的な線型代数化」と言うこともできる。

現在では、一言で「モチーフ」といっても様々な変種・一般化が提唱され研究されているが、ここでは最も基本的な「体  $k$  上の ( $\mathbb{Q}$  係数)(混合)モチーフの圏」 $\text{MM}/_k$  について、もう少しだけ数学的に述べる。

体  $k$  上の代数多様体の圏を  $\text{Var}/_k$  と書くことにすると、圏  $\text{MM}/_k$  は少なくとも以下のような性質があると期待されている:

- 函手  $h : \text{Var}/_k^{\text{op}} \rightarrow \text{MM}/_k$  が存在して、 $\text{Var}/_k$  に対する様々なコホモロジー理論 (エタールコホモロジー、de Rham コホモロジー、( $k \subset \mathbb{C}$  などの場合には) Betti コホモロジーなど) およびそれらの間の比較同型等はこれを経由する。特に各モチーフに対してそのコホモロジー (これは「実現」などとも呼ばれる) が定義される。
- 圏  $\text{MM}/_k$  は淡中圏となっており、自然な同型  $h(X \times Y) \cong h(X) \otimes h(Y)$ 、 $h(\text{Spec } k) \cong \mathbf{1}$  が存在する。また、各対象  $M$  は重さフィルトレーションと呼ばれる部分対象列  $(W_i M)_{i \in \mathbb{Z}}$  をもつ。
- 代数多様体  $X \in \text{Var}/_k$  に対し、 $\text{MM}/_k$  において自然な直和分解

$$h(X) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq 2 \dim X} h^i(X)$$

が存在し、モチーフ  $h^i(X)$  の各実現は、対応するコホモロジー理論における  $X$  の  $i$  次コホモロジー群と自然に同型になっている。さらに、 $M = h^i(X)$  のときに  $(W_i M)_{i \in \mathbb{Z}}$  が各実現に誘導するフィルトレーションは、対応するコホモロジー群が元来もつ重さフィルトレーションと一致する。

- 圏  $\text{MM}/_k$  における拡大群  $\text{Ext}_{\text{MM}/_k}^*$  は、代数的サイクル (または代数的  $K$  群) の言葉で具体的に記述される。

ここで、例の紹介とこの後の話の準備とを兼ねて、「Tateモチーフ」を導入する。アフィン直線から一点を除いてできる  $\mathbb{Q}$  上の代数多様体  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0\}$  を考えると、 $h(X)$  は圏  $\text{MM}/_{\mathbb{Q}}$  において 0 次部分  $h^0(X)$  と 1 次部分  $h^1(X)$  に分解する (この場合には  $h^2(X)$  は 0 となる) が、この 1 次部分を Tateモチーフとよび  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  と書く (mot の代わりに  $\mathcal{M}$  を用いたり、添字を省略したりすることもよくある)。

一方、上で述べたように Betti コホモロジー

$$H_{\text{B}} : \text{Var}/_{\mathbb{Q}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}; \quad X \mapsto \bigoplus_{i \geq 0} H_{\text{B}}^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

に対応して「Betti 実現」 $\omega_{\text{B}} : \text{MM}/_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}$  があるのであるが、この函手によって  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  は  $H_{\text{B}}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{Q})$  に移り、同様に代数的 de Rham コホモロジー

$$H_{\text{dR}} : \text{Var}/_{\mathbb{Q}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}; \quad X \mapsto \bigoplus_{i \geq 0} H_{\text{dR}}^i(X/\mathbb{Q})$$

に対応する「de Rham 実現」 $\omega_{\text{dR}} : \text{MM}/\mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}$  によって  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  は  $H_{\text{dR}}^1((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0\})/\mathbb{Q})$  に移る。すなわちモチーフ  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  は、その 0 次コホモロジーが 0 で、1 次コホモロジーが 1 次元であるような数学的対象であり、いわば「穴そのもの」の数学的表現である。

さらに、de Rham の定理の代数幾何学的表現である  $(\text{Var}_{\mathbb{Q}}^{\text{op}}$  から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$  への関手間の) 自然同型  $\text{comp} : H_{\text{dR}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} H_{\text{B}} \otimes \mathbb{C}$  に対応して  $(\text{MM}/\mathbb{Q}$  から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$  への関手間の) 自然同型

$$\text{comp} : \omega_{\text{dR}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\text{B}} \otimes \mathbb{C}$$

があり、これに  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  を代入すると、同型  $H_{\text{dR}}^1((\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0\})/\mathbb{C}) \cong H_{\text{B}}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$  が得られる。これは 1 次元  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の間の同型であるが、その各々が自然な  $\mathbb{Q}$  構造を持ち、それと上記同型との「ずれ」が微分形式  $t^{-1}dt$  の穴の回りでの積分、すなわち「周期  $2\pi i$ 」として現れる。

なお、このあたりのより詳しい説明については、例えば望月氏による数学セミナーの記事 [望] が参考になる。

さて、圏  $\text{MM}/\mathbb{Q}$  は淡中圏である (と期待されている) ので、対象  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  のテンソル積および双対を取ることで対象  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n) = \mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)^{\otimes(-n)}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) のような対象もこの圏にあると考えることができる。これらの拡大によって作られる対象が「混合 Tate モチーフ」である。より正確には以下のようにして  $\mathbb{Q}$  上の混合 Tate モチーフの圏  $\text{MTM}/\mathbb{Q}$  が (圏  $\text{MM}/\mathbb{Q}$  の存在を仮定した上で、) 定義される:

**定義.** 圏  $\text{MM}/\mathbb{Q}$  の充満部分圏で、対象  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  を含み、テンソル積、双対、拡大、部分商を取る操作で閉じているもののうち最小のものを  $\text{MTM}/\mathbb{Q}$  と書き、その対象を  $\mathbb{Q}$  上の混合 Tate モチーフとよぶ。

ちなみに、 $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$  は以下のような重さフィルトレーションをもつ (と期待される):

$$W_i \mathbb{Q}_{\text{mot}}(n) = \begin{cases} \mathbb{Q}_{\text{mot}}(n) & (i \geq -2n \text{ のとき}) \\ 0 & (i \leq -2n - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このような状況を、 $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$  は重さ  $-2n$  であるという。

さらに、事情はより複雑になるので詳細は省略するが、より一般の「よい」スキーム  $S$  に対しても、「 $S$  上のモチーフ」という概念が定義できると信じられており、特に「 $\mathbb{Z}$  上のモチーフの圏」もあると信じられている。そこで、この圏の存在を仮定すれば、上と同様に考えることで「 $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏」も定義することができる。

さて、とはいえ現時点ではモチーフ全体の圏の存在は、体上の場合ですら、更に深い予想を認めたりしない限り全く証明されていないため、ここまでの議論はあくまで heuristic なものである。しかし、 $\mathbb{Q}$  上および  $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏 (と呼ぶに相応しい圏) に限れば、いかなる予想も認めることなくその構成法が得られている。次小節では、公理的にその圏の存在について述べる。

**2.2. 本節の主定理 - 混合 Tate モチーフの圏の存在.** まず、佐久川氏の講演で導入されたように、 $\mathbb{Q}(1)_{\text{B}} = 2\pi i \mathbb{Q} \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$ 、 $\mathbb{Q}(1)_{\text{dR}} = \mathbb{Q} \in \mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$  (次数 1) であったことを思い出しておく。

**定理 2.1.** 6 つ組  $(\text{MTM}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_{\text{mot}}(1), \tilde{\omega}_{\text{dR}}, \omega_{\text{B}}, \text{comp}, F_{\infty})$  であって以下の条件をみたすものが存在する:

- (1) (a)  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{Q}$  線型 Abel テンソル圏で  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)$  はその可逆な対象。  
 (b)  $\tilde{\omega}_{\text{dR}} : \text{MTM}/_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$  および  $\omega_{\text{B}} : \text{MTM}/_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$  は  $\mathbb{Q}$  線型テンソル関手。  
 (c)  $\text{comp} : \omega_{\text{dR}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\text{B}} \otimes \mathbb{C}$  は  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$  へのテンソル関手間の自然同型。ここで、 $\omega_{\text{dR}}$  は、 $\tilde{\omega}_{\text{dR}}$  に忘却関手  $\mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$  を合成したものである。  
 (d)  $F_{\infty} : \omega_{\text{B}} \rightarrow \omega_{\text{B}}$  は  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$  へのテンソル関手間の自然同型。  
 (2) 圏  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  は関手  $\omega_{\text{B}}$  および  $\omega_{\text{dR}}$  をファイバー関手とする  $\mathbb{Q}$  線型ニュートラル淡中圏である。  
 (3)  $\omega_{\text{B}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)) = \mathbb{Q}(1)_{\text{B}}$ 、 $\tilde{\omega}_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)) = \mathbb{Q}(1)_{\text{dR}}$  であり、自然同型が誘導する同型  $\text{comp} : \omega_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \omega_{\text{B}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C}$  は、以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} \omega_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow[\cong]{\text{comp}} & \omega_{\text{B}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C} \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ \mathbb{Q} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathbb{C} \xleftarrow{\text{mult}} 2\pi i \mathbb{Q} \otimes \mathbb{C}, \end{array}$$

ここで  $\text{mult}$  は掛け算から誘導される線形写像を表す。

- (4) 自然数  $i$  および整数  $m, n$  に対し、拡大群  $\text{Ext}_{\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}}^i(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n), \mathbb{Q}_{\text{mot}}(m))$  は、 $(i = 0 \text{ かつ } m = n)$  または  $(i = 1 \text{ かつ } m - n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数})$  のとき 1 次元  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間に、それ以外のとき 0 になる。ここで、 $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$  は、 $n \geq 0$  のとき  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(1)^{\otimes n}$ 、 $n < 0$  のとき  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-n)^{\vee}$  と定義する。  
 (5) 全ての  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  の対象  $M$  に対し、偶数で添字付けられた増大フィルトレーション、即ち  $\cdots \subset W_{2m}M \subset W_{2m+2}M \subset \cdots$  なる  $M$  の部分対象の列で次の条件を満たすものが存在する:  
 (a) 十分大きな偶数  $i$  に対して  $W_iM = M$ 、十分小さな偶数にたいして  $W_iM = 0$  となる。  
 (b) 部分商  $\text{Gr}_{-2n}^W M = W_{-2n}M/W_{-2n-2}M$  は、 $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$  の有限直和に同型である。  
 (c) 自然な射  $\tilde{\omega}_{\text{dR}}(W_{-2n}M) \rightarrow \tilde{\omega}_{\text{dR}}(M)$  は同型

$$\tilde{\omega}_{\text{dR}}(W_{-2n}M) \cong W_{-2n}\tilde{\omega}_{\text{dR}}(M)$$

を誘導する。ここで、右辺は  $\bigoplus_{m \geq n} \tilde{\omega}_{\text{dR}}(M)_m$  と定義する。

- (6)  $F_{\infty}^2 = \text{Id}_{\omega_{\text{B}}}$  であり、図式

$$\begin{array}{ccc} \omega_{\text{dR}} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{conj}} & \omega_{\text{dR}} \otimes \mathbb{C} \\ \text{comp} \downarrow & & \downarrow \text{comp} \\ \omega_{\text{B}} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{F_{\infty} \otimes \text{Id}} \omega_{\text{B}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{conj}} & \omega_{\text{B}} \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

は可換である。ここで  $\text{conj}$  は複素共役写像である。

**定義.** 定理の圏  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  を  $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏 (**The category of mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$** )、関手  $\omega_{\text{B}}$ 、 $\omega_{\text{dR}}$  をそれぞれ **Betti 実現 (Betti realisation)**、**de Rham 実現 (de Rham realisation)**、自然同型  $\text{comp}$  を **比較同型 (comparison isomorphism)** とよぶ。

練習 2.2. 以下を証明せよ。

- (1) 同型  $F_\infty(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)) : \mathbb{Q}(n)_B \rightarrow \mathbb{Q}(n)_B$  は  $(-1)^n$  倍写像である。
- (2) 対象  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$  は、 $W_{-2n}\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n) = \mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$ 、 $W_{-2n-2}\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n) = 0$  をみたす。
- (3) 部分対象の列  $(W_{-2n}M)_{n \in \mathbb{Z}}$  は条件 (5-a)、(5-b) で一意に定まる。
- (4) 圏  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  における射  $f : M \rightarrow N$  に対し、 $f|_{W_i M} : W_i M \rightarrow N$  は  $W_i N$  を経由し、 $f(W_i M) = f(M) \cap W_i N$  となる。

註 2.3. (1) ここに現れている  $F_\infty$  を前小節の言葉で言うと、一般に各  $X \in \text{Var}/\mathbb{Q}$  に対して  $\mathbb{C}$  の複素共役写像が位相空間  $X(\mathbb{C})$  に連続かつ関手的に作用することから関手  $H_B : \text{Var}/\mathbb{Q}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}$  の自然自己同型が誘導されるが、これに対応すべき関手  $\omega_B$  の自然自己同型が  $F_\infty$  である。  
 (2) 上の定理によると、混合 Tate モチーフ  $M$  に対し  $\omega_{\text{dR}}(M)$  の重さフィルトレーションは、偶数で添字付られており、また自然な分裂をもつことになるが、このような現象は混合 Tate モチーフ特有の現象であり、一般のモチーフの de Rham 実現に対してはこのようなことは成り立たない。

2.3. 定理 2.1 の帰結. 以下では、この定理を認めた上で、定理 1.2 (1) の証明の概略を述べる。まず、 $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  が淡中圏であることから以下の定義が意味を持つ:

定義. アフィン群スキーム  $G_{\text{dR}}$  を  $\underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega_{\text{dR}})$  と定義する。

さて、各  $\mathbb{Q}$  代数  $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$  およびテンソル関手間の射  $\xi \in \underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega_{\text{dR}} \otimes R)$  に対し、 $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)$  を代入することで  $\mathbf{Mod}_R$  の同型

$$\xi(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)) : \omega_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)) \otimes R \xrightarrow{\cong} \omega_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)) \otimes R$$

が得られるが、定理 2.1 の条件 (3) より  $\omega_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1)) \otimes R$  は  $R$  上階数 1 の自由加群であるので、 $R^\times$  の元  $r$  が対応する。この対応は  $R$  に関して関手的である。

定義. 上の対応 “ $\xi \mapsto r$ ” によって定まる  $\mathbb{Q}$  上のアフィン群スキームの準同型  $G_{\text{dR}} \rightarrow \mathbb{G}_m$  を  $\text{ev}_{\mathbb{Q}(-1)}$  と表す。また、核  $\text{Ker}(\text{ev}_{\mathbb{Q}(-1)})$  を  $U_{\text{dR}}$  とおく。

一方、各  $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$  および  $r \in R^\times$ 、 $M \in \text{MTM}/\mathbb{Z}$  に対し、 $\tilde{\omega}_{\text{dR}}(M) \otimes R$  が次数付  $R$  加群の構造をもつので「次数  $n$  の部分は  $r^n$  倍する」という  $\omega_{\text{dR}}(M) \otimes R$  の  $R$  加群の自己同型が定義できる。これは  $M$  について関手的なので、 $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  から  $\mathbf{Mod}_R$  への関手  $\omega_{\text{dR}} \otimes R$  の自然自己同型を定める。さらにこれはテンソル関手間の射になっているので、群  $\underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega_{\text{dR}} \otimes R)$ 、すなわち  $\underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega_{\text{dR}})(R)$  の元  $\xi$  を定める。これは  $R$  に関して関手的である。

定義. 上の対応 “ $r \mapsto \xi$ ” によって得られる  $\mathbb{Q}$  上のアフィン群スキームの準同型  $\mathbb{G}_m \rightarrow G_{\text{dR}}$  を  $\tau$  とおく。容易に分かるように、 $\text{ev}_{\mathbb{Q}(-1)} \circ \tau = (-)^{-1}$  が成り立つ。

さて、“ $(r, u) \mapsto \tau(r)^{-1} \circ u \circ \tau(r)$ ” によって群  $\mathbb{G}_m$  は  $U_{\text{dR}}$  へ右から作用し、 $\mathcal{O}(U_{\text{dR}})$  へは左から作用する。したがって  $\mathcal{O}(U_{\text{dR}})$  は自然に次数付  $\mathbb{Q}$  代数となる。

定義. 次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{O}(U_{\text{dR}})^\circ$  を  $\mathscr{A}^{\text{MT}}$  と書く。

以下は容易に確かめられる:

**命題 2.4.** アフィン群スキームの自然な同型  $U_{\text{dR}} \times \mathbb{G}_m \cong G_{\text{dR}}$  が存在する。

さて、定理 2.1 を認めた上で定理 1.2 (1) の証明の概略を述べる。まず、群  $U_{\text{dR}}$  は定義より各  $\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) へ自明に作用するので、定理 2.1 (5) より  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  の任意の対象に対して冪単に作用する。このことより  $U_{\text{dR}}$  が冪単代数群となることが分かる。

次に、Lie 代数  $\text{Lie } U_{\text{dR}}$  を考えると、これにも自然に  $\mathbb{G}_m$  の作用が誘導されるので、固有空間の部分のみを取って  $\mathbf{u}_{\text{dR}}^{\text{gr}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\text{Lie } U_{\text{dR}})_n$  と“離散化”すると、これは“擬冪零 Lie 代数”とよばれる冪零 Lie 代数の無限次元版のようなものになる。また各  $(\text{Lie } U_{\text{dR}})_n$  は有限次元となることも分かる。

一方、誘導表現および制限に関して、

$$\text{Res}_{U_{\text{dR}}}^{G_{\text{dR}}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad \text{Ind}_{U_{\text{dR}}}^{G_{\text{dR}}}(\mathbb{Q}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{\text{rep}}(n)$$

( $\mathbb{Q}_{\text{rep}}(n)$  は  $\mathbb{G}_m$  を経由して  $n$  乗倍で作用する  $G_{\text{dR}}$  の 1 次元表現) が成り立つので、淡中圏の一般論と代数群の簡単な議論から、Lie 代数コホモロジーと  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  における拡大群との同型

$$H^i(\mathbf{u}_{\text{dR}}^{\text{gr}}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\text{MTM}/\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n), \mathbb{Q}_{\text{mot}}(0))$$

が得られる。

この右辺は、定理 2.1 (4) によって  $i \geq 2$  のとき 0 で  $i = 1$  のとき (次数付  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間として)  $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{-2m-3}$  と同型になる ( $\mathbb{Q}_n$  は単に  $\mathbb{Q}$  のコピーである)。

すると、Lie 代数コホモロジーを用いた擬冪零 Lie 代数の構造に関する定理から  $\mathbf{u}_{\text{dR}}^{\text{gr}}$  は  $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{2m+3}$  で生成される自由 Lie 群となることが分かり、 $\mathcal{O}(U_{\text{dR}})$  が次数付普遍包絡代数  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{dR}}^{\text{gr}})$  の双対の (上と同じ意味での) “離散化” であることから定理 1.2 (1) が従う。

註 2.5. ここで、佐久川氏の講演との関係について触れておく。与えられたデータから自然にテンソル関手

$$\omega_{\text{H}} : \text{MTM}/\mathbb{Z} \longrightarrow \text{MHT}_{\mathbb{Q}}$$

が、それぞれからの  $\omega_{\text{dR}}$  と両立するよう定義でき、これがアフィン群スキームの全射準同型  $G_{\text{dR}}^{\text{H}} \rightarrow G_{\text{dR}}$  を誘導することが確かめられる。

**2.4. 圏  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  の構成の概略.** ここでは定理 2.1 の証明、すなわち  $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏の構成のアイデアについて述べる。より詳しくは、例えば [DG05] の第 1 章、[BGF] の 4.1 節から 4.5 節まで、[Yas14] の第 9 節、第 10 節などを参照されたい。

ここで構成の鍵となるのは、

- (i): Hanamura, Levine, Voevodsky らによる三角化圏「 $D^{\text{b}}(\text{MM}/k)$ 」の構成、および
- (ii): Borel による、代数体 (または代数体の整数環) の代数的  $K$  群のランクの計算

の二つである。まずこれらについて解説する。

まず、(i) について述べる。先ほど、圏  $\text{MM}/k$  の存在は分かっていないと述べたが、実はその導来圏「 $D^{\text{b}}(\text{MM}/k)$ 」と呼ぶに相応しいテンソル三角化圏については、少なくとも  $k$  の標数が 0 の場合には、いかなる予想も認めることなく上記三者によって独立に構成されている。ここでは  $k = \mathbb{Q}$  の場合のみ

を考えることにし、その圏を  $\mathrm{DM}(\mathbb{Q})$  と書くことにすると、この圏の特に重要な性質として以下のようなものがある:

- テンソル関手  $M : \mathrm{Var}_{/\mathbb{Q}}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{DM}(\mathbb{Q})$  があり、
- $(D^b(\mathrm{MM}_{/\mathbb{Q}})$  の言葉では  $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)[0]$  に対応すると考えられる) 可逆な対象  $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$  が圏  $\mathrm{DM}(\mathbb{Q})$  にあり、
- 三角化圏  $\mathrm{DM}(\mathbb{Q})$  から、三角化圏  $D^b(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}})$  への Betti 実現および de Rham 実現とよばれる関手、さらに比較同型に対応するこれらの関手 (に  $\otimes \mathbb{C}$  したもの) の間の自然同型があり、
- $X, Y$  が既約非特異代数多様体のときは、自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(M(X), M(Y)(n)[m]) \cong K_{2n-m}(X \times_{\mathbb{Q}} Y)^{(n+\dim X)}$$

が存在する。ここで、左辺の  $(-)(n)$  は対象  $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$  のテンソル積を表し、右辺は  $(2n-m)$  次代数的  $K$  群 (に  $\otimes \mathbb{Q}$  を施したもの) の、Adams 作用素に関する同時固有空間 (より正確には「 $\Psi_k = k^{n+\dim X}$  部分」) とよばれるものである。

さて、上の右辺に現れている代数的  $K$  群とはスキームの不変量の一つであるが、一般には計算が大変困難な対象である。しかし、スキーム  $X$  が代数体  $k$  のスペクトラムのときにはそのランクが Borel によって計算されている。これが (ii) の意味であり、特に  $X = \mathrm{Spec} \mathbb{Q}$  の場合には以下が成り立つ:

**定理 2.6.** 整数  $a, b$  に対し、 $\mathbb{Q}$  ベクトル空間  $K_a(\mathrm{Spec} \mathbb{Q})^{(b)}$  は

- (1)  $a = b = 1$  のときは  $\mathbb{Q}^\times \otimes \mathbb{Q}$  に、
- (2)  $(a = b = 0)$  または  $(b$  が 3 以上の奇数かつ  $a = 2b - 1)$  のときは  $\mathbb{Q}$  に同型で、
- (3) それ以外のときは 0 である。

これらから特に、圏  $\mathrm{DM}(\mathbb{Q})$  における Tate モチーフ間の射の集合が以下のように分かる:

**系 2.7.** 整数  $m, n, i$  に対し、群  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n), \mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(m)[i])$  は

- (1)  $i = 1$  かつ  $m - n = 1$  のときは  $\mathbb{Q}^\times \otimes \mathbb{Q}$  に、
- (2)  $(i = 0$  かつ  $m = n)$  または  $(i = 1$  かつ  $m - n$  が 3 以上の奇数) のときは  $\mathbb{Q}$  に同型で、
- (3) それ以外のときは 0 である。

それでは、以上を踏まえて圏  $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$  の構成の方針を述べる。

まず、 $\mathbb{Q}$  上の混合 Tate モチーフの圏の導来圏というべき圏  $\mathrm{DMTM}(\mathbb{Q})$  を以下のようにして定義する:

**定義.** 圏  $\mathrm{DM}(\mathbb{Q})$  の充満部分三角化圏であって、 $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) を含み、拡大で閉じているようなもののうち最小のものを  $\mathrm{DMTM}(\mathbb{Q})$  と書く。

さて、一般に三角化圏から Abel 圏を取り出すための手法として Beilinson-Bernstein-Deligne による  $t$  構造の理論 ([BBD82] 参照) とよばれるものがあり、上記の圏に対しては Levine によって具体的に  $t$  構造が定義されている。さらに、これから得られる Abel 圏を  $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Q}}$  とすると、これが実際に  $\mathbb{Q}$  上の混合 Tate モチーフの圏というべきものとなることも Levine によって示されている。例えば拡大群については上の系を使って以下が分かる (これらについては [Lev93] を参照。なお、定理 2.1 (4) とは、 $\mathrm{Ext}^1$  の構造だけが違っていることに注意されたい):

**命題 2.8.** 自然数  $i$  及び整数  $m, n$  に対し、 $\text{Ext}_{\text{MTM}/\mathbb{Q}}^i(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(n), \mathbb{Q}_{\text{mot}}(m))$  は

- (1)  $i = 1$  かつ  $m - n = 1$  のときは  $\mathbb{Q}^\times \otimes \mathbb{Q}$  に、
- (2)  $(i = 0$  かつ  $m = n)$  または  $(i = 1$  かつ  $m - n$  が 3 以上の奇数) のときは  $\mathbb{Q}$  に同型で、
- (3) それ以外のときは 0 である。

最後に、(この箇所はやや ad hoc な構成ではあるが、) $\mathbb{Z}$  上の混合 Tate モチーフの圏  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  を圏  $\text{MTM}/\mathbb{Q}$  の充満部分圏として定義する。具体的には以下の概念を用いる:

**定義.** 圏  $\text{MTM}/\mathbb{Q}$  の対象  $M$  に対し、 $M$  の部分商  $E$  および整数  $n$  から成る任意の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_{\text{mot}}(n+1) \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Q}_{\text{mot}}(n) \longrightarrow 0$$

が分裂するとき、 $M$  は至る所不分岐であるという。

そこで、至る所不分岐であるような対象全体から成る  $\text{MTM}/\mathbb{Q}$  の充満部分圏を  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  とおくと、これが定理 2.1 の諸性質を満たすことが確かめられる。

### 3. $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のモチーフ論的パス空間

**3.1. 本節の主定理.** 山本氏の講演では、 $\mathbb{Q}$  代数  ${}_1A_0^{\text{B}}$ 、 ${}_1A_0^{\text{dR}}$ 、およびそれらの間の  $\mathbb{C}$  代数同型  $\text{comp}_{\text{B}, \text{dR}}^A : {}_1A_0^{\text{dR}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} {}_1A_0^{\text{B}} \otimes \mathbb{C}$  が構成され、これらは

- $\pi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}; \mathbf{1}, \mathbf{0}) \subset \text{Hom}_{\text{Alg}_{\mathbb{Q}}}({}_1A_0^{\text{B}}, \mathbb{Q})$  および、
- 「0 から 1 へのパス」  $\text{dch} \in \text{Hom}_{\text{Alg}_{\mathbb{Q}}}({}_1A_0^{\text{B}}, \mathbb{Q})$  に対し、

$$((\text{dch} \otimes \mathbb{C}) \circ \text{comp}_{\text{B}, \text{dR}}^A)(\omega(\mathbf{k})) = (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta(\mathbf{k})$$

という性質を持っていたことを思い出しておく (佐久川氏の記事の例 2.3 (2) も参照せよ)。

以下では、 $\deg \omega_0 = \deg \omega_1 = -1$  によって  ${}_1A_0^{\text{dR}}$  は次数付  $\mathbb{Q}$  代数と思うことにする。なおこのとき、対応  $e_{\mathbf{k}} \leftrightarrow \omega(\mathbf{k})$  によって  $\mathfrak{h}^\circ = {}_1A_0^{\text{dR}}$  という同一視ができることに注意しておく。

**定義.** 以下では付録 5.2 の用語を用いる。 $\mathbb{Q}$  上のアフィンスキーム  $\text{Spec } {}_1A_0^{\text{B}}$  を  ${}_1\Pi_0^{\text{B}}$ 、圏  $\mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$  におけるアフィンスキーム  $\text{Spec } {}_1A_0^{\text{dR}}$  を  ${}_1\tilde{\Pi}_0^{\text{dR}}$ 、また  ${}_1A_0^{\text{dR}}$  の次数付を忘れて (通常の  $\mathbb{Q}$  上の) アフィンスキームと思ったものを  ${}_1\Pi_0^{\text{dR}}$  と書く。環  ${}_1A_0^{\text{dR}}$  は次数付けられているので、 ${}_1\tilde{\Pi}_0^{\text{dR}}$  は  $\mathbb{G}_m$  の自然な右作用をもつことにも注意。

定理 1.2 の証明における鍵の一つは、これらが実は「モチーフの圏から来る」ことである。定理を正確に述べる前に、第 2 節の帰結として、

- Betti 実現  $\omega_{\text{B}} : \mathbf{AffSch}(\text{MTM}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{AffSch}/\mathbb{Q}$ 、
- de Rham 実現  $\tilde{\omega}_{\text{dR}} : \mathbf{AffSch}(\text{MTM}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{AffSch}(\mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}})$ 、および
- 比較同型  $\text{Spec}(\text{comp}) : \omega_{\text{B}} \times \text{Spec } \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \tilde{\omega}_{\text{dR}} \times \text{Spec } \mathbb{C}$

が得られることを注意しておく。

**定理 3.1.** 圏  $\text{MTM}/\mathbb{Z}$  におけるアフィンスキーム  ${}_1\Pi_0^{\text{mot}}$  で次を満たすものが存在する:

- (1) 同型  $\omega_{\text{B}}({}_1\Pi_0^{\text{mot}}) \cong {}_1\Pi_0^{\text{B}}$  および

(2) 同型  $\tilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{mot}}) \cong \mathbf{1}\tilde{\Pi}_0^{\mathrm{dR}}$   
が存在し、自然同型が誘導する同型

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{comp}) : \omega_{\mathrm{B}}(\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{mot}}) \times \mathrm{Spec} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{dR}}(\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{mot}}) \times \mathrm{Spec} \mathbb{C}$$

は(これらの同型を通じて)

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}^{\mathrm{A}}) : \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{B}} \times \mathrm{Spec} \mathbb{C} = \mathrm{Spec}(\mathbf{1}A_0^{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Spec}(\mathbf{1}A_0^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}) = \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{dR}} \times \mathrm{Spec} \mathbb{C}$$

に一致する。

系 3.2. 比較同型から誘導される同型

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{comp})(\mathbb{C}) : \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{B}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{dR}}(\mathbb{C})$$

による  $\mathrm{dch}$  の像は、同一視  $\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}}(\mathbf{1}A_0^{\mathrm{dR}}, \mathbb{C})$  のもとで、「 $\omega(\mathbf{k})$  を  $(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$  に移す  $\mathbb{Q}$  代数準同型」となる。

定理 3.1 の証明については、例えば [DG05] の 4 節や [BGF] の 4.6 節などを参照されたい。

3.2. **Betti-de Rham** 捻子とその“作用”. 以下この節では、定理 3.1 を用いて定理 1.2 (2) の関式の構成の準備を始める。まず本小節では、Betti-de Rham 捻子を定義し、それがどのように  $\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{B}}$  と  $\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{dR}}$  とを結び付けているかをみる。ここでは、 $\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{mot}}$  の存在が不可欠であることに注意されたい。

定義. 記号  $\sharp, \flat$  は  $\mathrm{B}$  または  $\mathrm{dR}$  を表すとす。このときテンソル関手  $\omega_{\sharp}, \omega_{\flat} : \mathrm{MTM}/_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}}$  に対して  $\mathbb{Q}$  上のアフィンスキームを

$$P_{\flat, \sharp} = \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_{\sharp}, \omega_{\flat})$$

で定める。とくに  $P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}$  を **Betti-de Rham 捻子 (Betti-de Rham torsor)** とよぶ。これは、 $\tau(r) \in G_{\mathrm{dR}} (r \in \mathbb{G}_m)$  の右からの合成によって  $\mathbb{G}_m$  の右作用をもつ。

さて、これを  $\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$  から  $\mathbf{Set}$  への関手とみて特に  $\mathbb{Q}$  代数として  $\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})$  を代入すると、

$$P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})) = \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}), \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}))$$

となるが、左辺には  $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})}$  に対応する普遍的な元があるので対応する右辺の元、すなわち標準的な自然同型

$$\mathrm{can} : \omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})$$

を得る。

これは、 $\mathrm{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  から  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})}$  へのテンソル関手間の自然同型であるので、 $\mathbf{AffSch}(\mathrm{MTM}/_{\mathbb{Z}})$  から  $\mathbf{AffSch}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})})$  への関手間の自然同型

$$\mathbf{AffSch}(\mathrm{can}) : \mathbf{AffSch}(\omega_{\mathrm{B}}) \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})) \xrightarrow{\cong} \mathbf{AffSch}(\omega_{\mathrm{dR}}) \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}))$$

を誘導する。

これに定理 3.1 の  $\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{mot}}$  を代入してその条件 (1)、(2) も考慮すると、 $\mathbb{Q}$  上のアフィンスキームの射

$$\mathbf{AffSch}(\mathrm{can})(\mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{mot}}) : \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{B}} \times P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{dR}} \times P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}$$

が得られ、これと第 1 成分への射影を合成して、 $\mathbb{Q}$  上のアフィンスキームの射

$$\mathrm{can} : \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{B}} \times P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathbf{1}\Pi_0^{\mathrm{dR}}$$

が得られる。

練習 3.3. 上の写像  $\text{can}$  は各  $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$  に対して写像

$$\text{can}(R) : {}_1\Pi_0^{\mathbb{B}}(R) \times P_{\mathbb{B},\text{dR}}(R) \longrightarrow {}_1\Pi_0^{\text{dR}}(R)$$

を誘導するが、これによる  $(\alpha, \xi) \in {}_1\Pi_0^{\mathbb{B}}(R) \times P_{\mathbb{B},\text{dR}}(R)$  の像は以下の元と一致することを示せ:

「 $\xi \in P_{\mathbb{B},\text{dR}}(R)$  に対応する自然同型  $\omega_{\text{dR}} \otimes R \rightarrow \omega_{\mathbb{B}} \otimes R$  に  ${}_1\Pi_0^{\text{mot}} \in \mathbf{AffSch}(\text{MTM}/\mathbb{Z})$  を代入して得られるアフィンスキーム間の射  ${}_1\Pi_0^{\mathbb{B}} \times \text{Spec } R \rightarrow {}_1\Pi_0^{\text{dR}} \times \text{Spec } R$  から誘導される写像  ${}_1\Pi_0^{\mathbb{B}}(R) \rightarrow {}_1\Pi_0^{\text{dR}}(R)$  による  $\alpha$  の像」

3.3. 図式の構成. さて、 ${}_1\Pi_0^{\mathbb{B}}(\mathbb{Q})$  には「0 から 1 へのパス」に対応する元  $\text{dch}$  が存在したので、これによる評価写像 “ $p \mapsto \text{can}(\text{dch}, p)$ ” を考えて  $\mathbb{Q}$  上のアフィンスキームの射

$$\text{ev}_{\text{dch}} : P_{\mathbb{B},\text{dR}} \longrightarrow {}_1\Pi_0^{\text{dR}}$$

が得られる。容易に分かるように、これは  $\mathbb{G}_m$  同変である。

さらに、 $P_{\mathbb{B},\text{dR}}(\mathbb{C}) = \text{Isom}^{\otimes}(\omega_{\text{dR}} \otimes \mathbb{C}, \omega_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{C})$  には、比較同型写像に対応する元  $\text{comp}$  が存在するので、これの  $\text{ev}_{\text{dch}}$  による像を  $\text{dch}^{\text{dR}}$  とする。これは  ${}_1\Pi_0^{\text{dR}}(\mathbb{C})$  の元となる。

さて、定義より圏  $\mathbf{AffSch}/\mathbb{Q}$  における図式

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spec } \mathbb{C} & \\ \text{comp} \swarrow & & \searrow \text{dch}^{\text{dR}} \\ P_{\mathbb{B},\text{dR}} & \xrightarrow{\text{ev}_{\text{dch}}} & {}_1\Pi_0^{\text{dR}} \end{array}$$

は可換であるので、対応して圏  $\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$  における可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}^{\circ} = \mathcal{O}({}_1\Pi_0^{\text{dR}}) & \xrightarrow{(\text{ev}_{\text{dch}})^*} & \mathcal{O}(P_{\mathbb{B},\text{dR}}) \\ & \searrow (\text{dch}^{\text{dR}})^* & \swarrow \text{comp}^* \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

を得る。

補題 3.4. 写像  $(\text{dch}^{\text{dR}})^*$  ( $=\zeta^{\text{an}}$  と書く) は  $e_{\mathbf{k}}$  を  $(-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$  に移す。

証明. 元  $(\text{dch}^{\text{dR}})^* \in {}_1\Pi_0^{\text{dR}}(\mathbb{C})$  は定義により、 $\mathbb{C}$  値点  $(\text{dch}, \text{comp}) \in {}_1\Pi_0^{\mathbb{B}}(\mathbb{C}) \times P_{\mathbb{B},\text{dR}}(\mathbb{C})$  の  $\text{can}$  による像であるが、一方これは、系 3.2 および練習 3.3 より「 $e_{\mathbf{k}}$  を  $(-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$  に移す  $\mathbb{Q}$  代数準同型」である。□

定義. 次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{O}(P_{\mathbb{B},\text{dR}})^{\circ}$  を  $\widetilde{\mathcal{H}}$ 、次数付  $\mathbb{Q}$  代数準同型  $(\text{ev}_{\text{dch}})^*$  を  $\zeta^{\text{mot}}$ 、環準同型  $\text{comp}^*$  を  $\text{per}$  とかく。

これで、定理 1.2 (2) において  $\mathcal{H}$  を  $\widetilde{\mathcal{H}}$  に置き換えた可換図式が得られた。

註 3.5. ここで再び、佐久川氏の講演との関係について触れておく (註 2.5 も参照せよ)。函手  $\omega_{\mathbb{H}}$  はアフィンスキーム間の射  $-\circ\omega_{\mathbb{H}} : P_{\mathbb{B},\text{dR}}^{\mathbb{H}} \rightarrow P_{\mathbb{B},\text{dR}}$  を誘導し、従って環準同型  $\omega_{\mathbb{H}}^* : \mathcal{O}(P_{\mathbb{B},\text{dR}}) \rightarrow \mathcal{O}(P_{\mathbb{B},\text{dR}}^{\mathbb{H}})$  を誘導する。上で構成し

た図式は、この準同型を以下の様に經由する:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{H} & \xrightarrow{\zeta^{\text{an}}} & \mathbb{C} \\
 \searrow \zeta^{\text{mot}} & \nearrow \text{comp}^* & \nearrow \text{comp}_{\mathfrak{H}}^* \\
 \widetilde{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\omega_{\mathfrak{H}}^*} & \mathcal{O}(P_{\text{B,dR}}^{\text{H}})^{\circ}
 \end{array}$$

(ここで  $\text{comp}_{\mathfrak{H}}^*$  は、佐久川氏の原稿における  $\text{comp}^*$  である)。なお、左上から右下へ行く射が佐久川氏の講演における  $\zeta^{\text{H}}$  に符号の違いを除いて対応する、より正確には  $(-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta^{\text{mot}}(e_{\mathbf{k}})$  は  $\omega_{\mathfrak{H}}^*$  によって  $\zeta^{\text{H}}(\mathbf{k})$  に移される。

#### 4. BETTI-DE RHAM 捻子およびその変種の幾何学

ここでは定理 1.2 (2) および (3) を示す。第 3 節においては Betti-de Rham 捻子  $P_{\text{B,dR}}$  の関数環として  $\widetilde{\mathcal{H}}$  を導入したが、実際はこの環でもまだ大きすぎて所望の不等式を得ることができない。そこで本節では  $P_{\text{B,dR}}$  の変種を構成し、その関数環として  $\mathcal{H}$  を定義する。これが実は自然に  $\widetilde{\mathcal{H}}$  の部分環になること、および  $\zeta^{\text{mot}}$  の像を含むことが分かり、またその環論的諸性質が幾何学的議論から分かる。

##### 4.1. 準備 - $\mathcal{H}$ の構成.

**定義.** (1) 圏  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  の対象  $M$  が  $W_{-2}M = 0$  を満たすとき、有効 (**effective**) であるとよぶ。有効な対象全体からなる  $\text{MTM}/_{\mathbb{Z}}$  の充満部分圏を  $\text{MTM}_{\mathbb{Z}}^{\text{eff}}$  と書く。また、 $\mathfrak{h} \in \{\text{B, dR}\}$  に対し、函手  $\omega_{\mathfrak{h}}$  の  $\text{MTM}_{\mathbb{Z}}^{\text{eff}}$  への制限を  $\omega_{\mathfrak{h}}^{\text{eff}}$  と書く。

- (2) 記号  $\mathfrak{b}$  は B または dR であるとする。このとき、
- 函手  $\omega_{\mathfrak{h}}^{\text{eff}}$  から函手  $\omega_{\mathfrak{b}}^{\text{eff}}$  へのテンソル関手間の射全体のなすアフィンスキーム  $\underline{\text{Hom}}^{\otimes}(\omega_{\mathfrak{h}}^{\text{eff}}, \omega_{\mathfrak{b}}^{\text{eff}})$  を  $\overline{P}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}$  と書く (表現可能性については例えば [Del90] Proposition 6.6 を参照)。
  - アフィンスキーム  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{h}}(-1), \mathbb{Q}_{\mathfrak{b}}(-1)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1$  を単に  $H_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}$  と書く。
  - 自然変換  $\alpha : \omega_{\mathfrak{h}}^{\text{eff}} \rightarrow \omega_{\mathfrak{b}}^{\text{eff}}$  に対して  $\alpha(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1))$  を対応させる写像から誘導されるアフィンスキーム間の射を  $\text{ev}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} : \overline{P}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} \rightarrow H_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}$ 、または単に  $\text{ev}$  と表し、 $(\mathbb{Q}_{\text{mot}}(-1))$  における) 評価写像とよぶ。
  - 零写像  $0 \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{h}}(-1), \mathbb{Q}_{\mathfrak{b}}(-1))$  に対応する  $H_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}$  の閉点を  $\mathbf{0}$  と書く。また、この点の  $\text{ev}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}$  に関する引き戻しを  $\partial P_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}$  と書く。

ここまですら図示すると以下のようなになる。ここで 2 つの四角形はどちらもカルテシアンになっている。

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial P_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} & \longrightarrow & \overline{P}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} & \longleftarrow & P_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} \\
 \downarrow & & \downarrow \text{ev} & & \downarrow \\
 \{\mathbf{0}\} & \longrightarrow & H_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} & \longleftarrow & H_{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}} \setminus \{\mathbf{0}\}
 \end{array}$$

**練習 4.1.** 右の四角形がカルテシアンになることを示せ。

特に  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}) = (\text{B, dR})$  の場合を考えると、 $\overline{P}_{\text{B, dR}}$  には  $\tau(r) \in G_{\text{dR}} (r \in \mathbb{G}_m)$  の右からの合成によって  $\mathbb{G}_m$  が右から作用、左からの合成によって  $F_{\infty} \in$

$\text{Aut}^\otimes(\omega_B)$  が左から作用し、一方  $H_{b,\sharp}$  への  $\mathbb{G}_m$  の右作用を逆数のスカラー倍、 $F_\infty$  の作用を  $-1$  倍で定めると、 $\text{ev} : \overline{P}_{B,dR} \rightarrow H_{B,dR}$  はこれら 2 つの作用と可換になる。

**定義.** アフィンスキーム  $\overline{P}_{B,dR}$  の、作用  $F_\infty$  による商アフィンスキームを  $\overline{P}_{B,dR}^+$  と書き、 $\text{ev}$  が誘導する  $\mathbb{Q}$  上のスキームの射  $\overline{P}_{B,dR}^+ \rightarrow \{\pm 1\} \backslash H_{B,dR}$  を  $\text{ev}_{B,dR}^+$  と書く。

また、 $\mathbb{G}_m$  の左作用によって  $\mathcal{O}(\overline{P}_{B,dR}^+)$  には自然な次数が付けられる。そこで次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{O}(\overline{P}_{B,dR}^+)^\circ$  を  $\mathcal{H}$  と書く。

- 註 4.2. (1)  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_\sharp(-1), \mathbb{Q}_b(-1))$  は 1 次元  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間、従って  $H_{b,\sharp}$  はアフィン直線  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1$  と (非標準的に) 同型である。
- (2) 自然な同型  $\mathcal{O}(\overline{P}_{B,dR}^+) \cong \mathcal{O}(\overline{P}_{B,dR})^{F_\infty=1}$  が存在する。ここで右辺は環  $\mathcal{O}(\overline{P}_{B,dR})$  の  $F_\infty$  不変元全体を表す。なお、逆にこれを定義とすることもできる (すなわち  $\overline{P}_{B,dR}^+ = \text{Spec}(\mathcal{O}(\overline{P}_{B,dR})^{F_\infty=1})$  とおく)。
- (3) 作用と  $\text{ev}$  の両立性により、 $\partial P_{B,dR}$  にも  $F_\infty$  の作用、 $\mathbb{G}_m$  の作用が誘導されることが分かる。また、 $\overline{P}_{dR,dR}$  および  $\partial P_{dR,dR}$  にも同様な  $\mathbb{G}_m$  の右作用が存在する。

さて、定理 2.1 (5-c) および

$$W_{-2}\mathcal{O}(\mathbf{1}\tilde{\Pi}_0^{\text{dR}}) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}(\mathbf{1}\tilde{\Pi}_0^{\text{dR}})_n = \bigoplus_{n \geq 1} (\mathbf{1}A_0^{\text{dR}})_n = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{H}_{-n} = 0$$

より  $\mathcal{O}(\mathbf{1}\Pi_0^{\text{mot}})$  は  $\text{Ind}(\text{MTM}_{\mathbb{Z}}^{\text{eff}})$  の対象となる。したがって、第 3 節で定義した射

$$\mathbf{1}\Pi_0^{\text{B}} \times P_{B,dR} \rightarrow \mathbf{1}\Pi_0^{\text{dR}}$$

は同様の構成により

$$\mathbf{1}\Pi_0^{\text{B}} \times \overline{P}_{B,dR} \rightarrow \mathbf{1}\Pi_0^{\text{dR}}$$

へと延長され、従って  $\text{dch}$  での評価写像によって射  $\overline{P}_{B,dR} \rightarrow \mathbf{1}\Pi_0^{\text{dR}}$  が誘導される。

さらに、 $\text{dch} \in \mathbf{1}\Pi_0^{\text{B}}(\mathbb{Q})$  は  $F_\infty$  不変元であることから、この射は  $\overline{P}_{B,dR}^+ \rightarrow \mathbf{1}\Pi_0^{\text{dR}}$  を誘導する。

ここまでを纏めたものが以下の左図であり、それを関数環に直したものが右図である。以下、右図の斜めの射も  $\zeta^{\text{mot}}$  と書く。

$$\begin{array}{ccc}
 P_{B,dR} & \longrightarrow & \mathbf{1}\Pi_0^{\text{dR}} \\
 \downarrow & \nearrow & \uparrow \\
 \overline{P}_{B,dR} & & \mathfrak{H} \\
 \downarrow & \nearrow & \uparrow \\
 \overline{P}_{B,dR}^+ & & \mathcal{H}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} & \xleftarrow{\zeta^{\text{mot}}} & \mathfrak{H} \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \mathcal{H} & & \mathfrak{H}
 \end{array}$$

4.2. 定理 1.2 (3) の証明の概略. まず、スキーム  $\partial P_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}$  の特別な点を導入する。

定義. 有効なモチーフ  $M \in \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}^{\mathrm{eff}}$  に対し、次数 0 部分への射影

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M) \twoheadrightarrow \tilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)_0 \hookrightarrow \tilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)$$

を対応させることで、テンソル函手  $\omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}$  間の射が定義できる。これは、 $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)$  へは零射を対応させるので  $\partial P_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}(\mathbb{Q})$  の点を定める。これを  $\mathrm{pr}_0$  と書く。

註 4.3. 有効なモチーフに対しては de Rham 実現で負の次数のみが現れることと、 $\tau(r)^{-1} \in G_{\mathrm{dR}}$  が次数  $-n$  部分を  $r^n$  倍する射であったことを考慮すると、点  $\mathrm{pr}_0$  は、 $G_{\mathrm{dR}} \subset \bar{P}_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}$  における  $\tau(r)^{-1}$  の “ $r \rightarrow 0$  における極限” と思える。また、自然な  $\tau^{-1}$  の拡張として、埋め込み  $\sigma: \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \hookrightarrow \bar{P}_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}$  が得られることも分かる。

この点  $\mathrm{pr}_0$  を左から合成することで、 $\mathbb{Q}$  上のスキームの射  $\mathrm{pr}_0 \circ (-): \bar{P}_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}} \rightarrow \partial P_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}$  を得る。これを用いて以下が証明できる:

命題 4.4. (1) 合成  $U_{\mathrm{dR}} \hookrightarrow \bar{P}_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0 \circ (-)} \partial P_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}$  は  $\mathbb{Q}$  上のスキームの同型射となる。さらに、第 2 節で定めた  $U_{\mathrm{dR}}$  への  $\mathbb{G}_m$  の右作用と注意 4.2 (3) で述べた  $\mathbb{G}_m$  の右作用はこの同型射と両立する。  
(2) 註 4.3 を考慮して得られる対応  $(r, u) \mapsto \sigma(r) \circ u$  は同型

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \times U_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} \bar{P}_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}$$

を誘導する。さらに、逆数のスカラー倍による  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1$  への  $\mathbb{G}_m$  の右作用と第 2 節で定めた  $U_{\mathrm{dR}}$  への  $\mathbb{G}_m$  の右作用の対角作用、および注意 4.2 (3) で述べた  $\mathbb{G}_m$  の右作用はこの同型射と両立する。

証明. 証明のアイデアについて述べる。まず、 $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ 、 $u \in U_{\mathrm{dR}}(R)$  とし、 $\xi = \mathrm{pr}_0 \circ u$  とおく。このとき、各  $M \in \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}^{\mathrm{eff}}$  に対して自然な分解  $\omega_{\mathrm{dR}}(M) = \bigoplus_{m \leq 0} \omega_{\mathrm{dR}}(M)_m$  があることに注意して、

$$u(M) = \bigoplus_{0 \geq n \geq m} u(M)_{n,m}, \quad \xi(M) = \bigoplus_{0 \geq n \geq m} \xi(M)_{n,m}$$

(但し  $(-)_n$  は  $\omega_{\mathrm{dR}}(M)_m \otimes R$  から  $\omega_{\mathrm{dR}}(M)_n \otimes R$  への  $R$  線型写像) と書くと、以下の可換図式が各  $n \leq 0$  と  $M$  に対して存在する ( $\otimes R$  は省略):

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{m \leq n} \omega_{\mathrm{dR}}(M)_m & \xrightarrow{\sum_m u(M)_{n,m}} & \omega_{\mathrm{dR}}(M)_n \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \bigoplus_{m \leq n} \omega_{\mathrm{dR}}(M/W_{-2n-2}M)_m & & \omega_{\mathrm{dR}}(M/W_{-2n-2}M)_n \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \bigoplus_{m \leq n} \omega_{\mathrm{dR}}(M')_{m-n} & \xrightarrow{\sum_m \xi(M')_{0,m-n}} & \omega_{\mathrm{dR}}(M')_0 \end{array}$$

(ここで、 $M' = M/W_{-2n-2}M(-n) \in \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}^{\mathrm{eff}}$  とおいた)。これより、 $u$  が  $\xi$  から復元できることが分かり、同型  $U_{\mathrm{dR}}(R) \cong \partial P_{\mathrm{dR},\mathrm{dR}}(R)$  が構成できることも分かるので (1) が証明できる。

(2) はアフィンスキームの射

$$(\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(-1)}, \mathrm{pr}_0 \circ (-)) : \bar{P}_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}} \longrightarrow H_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}} \times \partial P_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}}$$

と、(1) から誘導されるアフィンスキームの同型

$$H_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}} \times \partial P_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \times U_{\mathrm{dR}}$$

との合成が逆射を与えることを確かめればよい。  $\square$

さて、 $\mathrm{comp} \in \bar{P}_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}(\mathbb{C})$  を合成することにより同型  $\bar{P}_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}} \times \mathrm{Spec} \mathbb{C} \cong \bar{P}_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}} \times \mathrm{Spec} \mathbb{C}$  が得られるので、上の命題より次が従う:

- 系 4.5. (1) 環  $\mathcal{O}(\bar{P}_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}})$  および  $\mathcal{H}$  は整域である。  
 (2)  $k$  を  $-2$  以上  $0$  以下の整数とすると、  
 (a) 次数付  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{O}(\bar{P}_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}})$  の  $k$  次部分は各々  $1$  次元  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間である。  
 (b) 評価写像  $\mathrm{ev}^* : \mathcal{O}(H_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{P}_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}})$  は  $k$  次部分に同型を誘導する。  
 (c) 評価写像  $(\mathrm{ev}^+)^* : \mathcal{O}(\{\pm 1\} \setminus H_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{P}_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}^+)$  は  $k$  次部分に同型を誘導する。

最後に定理 1.2 (3-c) を示す。その為にまず以下の命題を示す。

- 命題 4.6. (1)  $F_\infty$  は  $\partial P_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}$  へは自明に作用する。  
 (2)  $\mathbb{G}_m$  同変な同型  $\partial P_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}} \cong \partial P_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}}$  が存在する。

証明. まず (1) を示す。  $R$  を任意の  $\mathbb{Q}$  代数、  $f$  を  $\partial P_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}(R)$  の任意の元とする。この元は定義より、圏  $\mathrm{MTM}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{eff}}$  から  $\mathbf{Mod}_R$  へのテンソル関手の間の射  $f : \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}} \otimes R \rightarrow \omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}} \otimes R$  で、  $f(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) = 0$  を満たすものである。

すると、任意の環  $R$  および任意の有効モチーフ  $M \in \mathrm{MTM}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{eff}}$  に対して、  $f(M) : \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(M) \otimes R \rightarrow \omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(M) \otimes R$  は  $\omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) \otimes R \hookrightarrow \omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(M) \otimes R$  を経由するが、  $W_0 M$  は  $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(0)$  の直和と (非標準的に) 同型であるので、  $\omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) \otimes R$  へは  $F_\infty$  は自明に作用する。これは、  $F_\infty$  の  $\partial P_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}}$  の作用が自明であることを示している。

次に (2) の同型を構成する。先と同様に、  $R$  を任意の  $\mathbb{Q}$  代数、  $f$  をテンソル関手間の射  $f : \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}} \otimes R \rightarrow \omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}} \otimes R$  で、  $f(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) = 0$  を満たすものとする。このとき、有効モチーフ  $M$  に対して  $f(M)$  は  $\omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) \otimes R$  を経由するが、  $W_0 M$  が  $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(0)$  の直和と同型であることから標準的な同型  $\omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) \cong \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M)$  が存在する。

そこで、これを合成したのち、自然な単射  $\omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) \otimes R \hookrightarrow \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(M) \otimes R$  を合成することで、  $\tilde{f}(M) : \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(M) \otimes R \rightarrow \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(M) \otimes R$  が得られる。これは  $M \in \mathrm{MTM}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{eff}}$  に関して関手的であり  $\partial P_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}}(R)$  の元  $\tilde{f}$  を与えることが分かる。

この、  $f$  に  $\tilde{f}$  を対応させる写像は全単射であり、  $\mathbb{Q}$  代数  $R$  に関して関手的であることは容易にわかるので所望の同型  $\partial P_{\mathrm{B}, \mathrm{dR}} \cong \partial P_{\mathrm{dR}, \mathrm{dR}}$  が得られる。  $\square$

註 4.7. (2) の証明を図示すると以下のようなになる ( $\otimes R$  は省略):

$$\begin{array}{ccccc}
 \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(M) & & & & \\
 \downarrow f(M) & \searrow \tilde{f}(M) & & & \\
 \omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(M) & \longleftarrow \omega_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) & \xrightarrow{\cong} & \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(W_0 M) & \longrightarrow \omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}(M)
 \end{array}$$

さて、定義より  $\mathbb{G}_m$  同変な図式

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial P_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} & \hookrightarrow & \bar{P}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} & \twoheadrightarrow & \bar{P}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}^+ \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{0\} & \xrightarrow{\mathrm{incl}} & H_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} & \twoheadrightarrow & \{\pm 1\} \setminus H_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}
 \end{array}$$

が得られていた。そこで命題 4.6 (1) を考慮して練習 4.8 をこの図式に適用し、さらに命題 4.4 (1) および命題 4.6 (2) を使うと、カルテシアンな  $\mathbb{G}_m$  同変図式

$$\begin{array}{ccc}
 U_{\mathrm{dR}} & \hookrightarrow & \bar{P}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}^+ \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{0\} & \xrightarrow{\mathrm{incl}} & \{\pm 1\} \setminus H_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}
 \end{array}$$

が得られ、これより定理 1.2 (3-c) が分かる。

練習 4.8. 多項式環  $\mathbb{Q}[t]$  および  $\mathbb{Q}$  代数  $A$  には、それぞれ  $\mathbb{Q}$  代数自己同型  $F$  が与えられており、 $\mathbb{Q}$  代数準同型  $f: \mathbb{Q}[t] \rightarrow A$  は  $F$  と両立しているとする。さらに、

- (1)  $A$  は整域、
- (2)  $\mathbb{Q}[t]$  については  $F(t) = -t$ 、 $A$  については  $F^2 = \mathrm{Id}_A$  であり、
- (3)  $A/(f(t))$  に誘導される  $F$  の作用は恒等写像

であるとする。このとき、自然に誘導されるアフィンスキームの図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Spec} A/(f(t)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec} A^{F=1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Spec} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathbb{Q}[t]^{F=1} (= \mathbb{Q}[t^2])
 \end{array}$$

はカルテシアンになることを示せ。

## 5. 付録

ここでは、本稿の内容を理解するのに必要となる用語について纏めておく。

### 5.1. Ind 圏.

定義. (1) 小圏  $I$  がフィルターである (filtered) とは、 $I$  は空でなく、次の 2 つの条件を満たすことである:

- 任意の  $I$  の対象  $i, i'$  に対し、対象  $i''$  および射  $i \rightarrow i''$ 、 $i' \rightarrow i''$  が存在する。
- 始域と終域が等しい任意の 2 つの  $I$  の射  $f, g: i \rightarrow i'$  に対し、射  $h: i' \rightarrow i''$  で  $h \circ f = h \circ g$  となるものが存在する。

(2) 圏  $\mathcal{C}$  に対しその Ind 圏 (Ind-category)  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  を以下のように定義する:

- 対象はあるフィルターからの函手  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  全体である。これはしばしば (射の情報を省略して)  $F = (F_i)_{i \in I}$  などと書かれる。
- 2つの対象  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ 、 $G : J \rightarrow \mathcal{C}$  に対し、 $F$  から  $G$  への射の集合を

$$\text{Hom}_{\text{Ind}(\mathcal{C})}(F, G) = \varprojlim_{i \in I} \varinjlim_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F_i, G_j)$$

と定める。

圏  $\mathcal{C}$  の対象  $x$  に対して、1つの対象と1つの射のみからなる圏からの函手  $\text{cst}_x : \{*\} \rightarrow \mathcal{C}; * \mapsto x$  を考えると、これは自然な函手

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Ind}(\mathcal{C}); x \mapsto \text{cst}_x$$

を誘導し、充滿忠実となる。この意味で  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  は  $\mathcal{C}$  の一つの拡張となっている。

**練習 5.1.** 圏  $\mathcal{C}$  として  $\text{Vec}_K^{\text{fin}}$  を取ると、 $\text{Ind}(\mathcal{C})$  は自然に  $\text{Vec}_K$  と同値になることを示せ。

**練習 5.2.** 圏  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  ではフィルターを添え字にもつ任意の帰納的極限が存在することを示せ。

**練習 5.3.** 圏  $\mathcal{C}$  がテンソル構造をもつとき、 $\text{Ind}(\mathcal{C})$  上にも  $(F_i)_{i \in I} \otimes (G_j)_{j \in J} = (F_i \otimes G_j)_{(i,j) \in I \times J}$  となるような自然なテンソル構造の拡張があることを示せ。

5.2. アフィンスキームの抽象化。まず、次の2つの事実を思い出しておく:

- $\mathbb{Q}$  代数  $A$  を与えることと
  - 圏  $\text{Ind}(\text{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}})$  の対象  $A$
  - 圏  $\text{Ind}(\text{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}})$  の射  $A \otimes A \rightarrow A$
  - 圏  $\text{Ind}(\text{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}})$  の射  $\mathbb{Q} \rightarrow A$
 で結合則等に対応する可換性を満たすものを与えることは等価である。
- $\mathbb{Q}$  代数の圏  $\text{Alg}_{\mathbb{Q}}$  と  $\mathbb{Q}$  上のアフィンスキームの圏  $\text{AffSch}/_{\mathbb{Q}}$  とは反同値になっている。より詳しく、函手  $\text{Spec} : (\text{Alg}_{\mathbb{Q}})^{\text{op}} \rightarrow \text{AffSch}/_{\mathbb{Q}}$  と函手  $\mathcal{O}(-) : \text{AffSch}/_{\mathbb{Q}} \rightarrow (\text{Alg}_{\mathbb{Q}})^{\text{op}}$  とは互いに準逆函手になっている。

これを踏まえると一般のテンソル圏に対しても以下の様に同様の概念を定義できる:

**定義.**  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$  をテンソル圏とする。

(1) 圏  $\mathcal{C}$  における (単位的可換) 代数対象とは、

- 圏  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  の対象  $A$ 、
  - 圏  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  の射  $m : A \otimes A \rightarrow A$
  - 圏  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  の射  $\epsilon : \mathbf{1} \rightarrow A$
- の3つ組であって、図式

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{\cong} & (A \otimes A) \otimes A \\ \text{Id}_A \otimes m \downarrow & & \downarrow m \otimes \text{Id}_A \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \xleftarrow{m} A \otimes A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{1} \otimes A & \xrightarrow{\epsilon \otimes \text{Id}_A} & A \otimes A \xleftarrow{\text{Id}_A \otimes \epsilon} A \otimes \mathbf{1} \\ \cong \searrow & & \downarrow m \\ & & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow[\text{switch}]{\cong} & A \otimes A \\
 & \searrow m & \swarrow m \\
 & & A
 \end{array}$$

が可換になるようなものとする。ここで同型はテンソル圏  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  に備わっている自然同型によるものである (第3の図式のそれは、第1項と第2項との交換に対する自然な同型である)。

また、代数対象  $(A, m_A, \epsilon_A)$  から  $(B, m_B, \epsilon_B)$  への準同型とは、 $\text{Ind}(\mathcal{C})$  における  $A$  から  $B$  への射であって、他の構造と可換になるものをいう。圏  $\mathcal{C}$  における代数対象およびその準同型全体のなす圏を  $\mathbf{Alg}(\mathcal{C})$  と書く。なおこの圏の対象はしばしば単に  $A$  と書かれる。

- (2) 圏  $\mathbf{Alg}(\mathcal{C})^{\text{op}}$  を  $\mathbf{AffSch}(\mathcal{C})$  とかき、圏  $\mathcal{C}$  におけるアフィンスキームの圏とよぶ。

古典的な場合の類似として、圏  $\mathbf{Alg}(\mathcal{C})$  の対象  $A$  や射  $\alpha : A \rightarrow B$  を  $\mathbf{AffSch}(\mathcal{C})$  の対象や射と思うときは  $\text{Spec } A$ ,  $\text{Spec } \alpha : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  と書き、 $\mathbf{AffSch}(\mathcal{C})$  の対象  $X$  や射  $f : X \rightarrow Y$  を  $\mathbf{Alg}(\mathcal{C})$  の対象や射と思うときは  $\mathcal{O}(X)$ ,  $f^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  と書く。

構成から明らかなように、圏  $\mathcal{C}$  が  $\mathbf{Vec}_K^{\text{fin}}$  の場合には  $\mathbf{Alg}(\mathcal{C})$  および  $\mathbf{AffSch}(\mathcal{C})$  は自然に  $\mathbf{Alg}_K$  および  $\mathbf{AffSch}/K$  に圏同値になる。

テンソル関手  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は、自然に関手  $\mathbf{Alg}(f) : \mathbf{Alg}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathcal{D})$  および  $\mathbf{AffSch}(f) : \mathbf{AffSch}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{AffSch}(\mathcal{D})$  を誘導する。さらに、テンソル関手  $f, g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  の間の射  $\alpha : f \rightarrow g$  は、自然変換  $\mathbf{Alg}(\alpha) : \mathbf{Alg}(f) \rightarrow \mathbf{Alg}(g)$  および  $\mathbf{AffSch}(\alpha) : \mathbf{AffSch}(g) \rightarrow \mathbf{AffSch}(f)$  を誘導する。誤解のない場合には、関手および自然変換における「 $\mathbf{Alg}$ 」や「 $\mathbf{AffSch}$ 」などは省略する。

## REFERENCES

- [And04] Yves André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR 2115000
- [BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph Bernstein, and Pierre Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171. MR 751966
- [BGF] José Ignacio Burgos Gil and Javier Fresán, *Multiple zeta values: from numbers to motives*, In Clay Mathematics Proceedings (To appear).
- [Del89] Pierre Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over  $\mathbf{Q}$  (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, pp. 79–297. MR 1012168
- [Del90] ———, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195. MR 1106898
- [Del13] ———, *Multizêtas, d'après Francis Brown*, Astérisque (2013), no. 352, Exp. No. 1048, viii, 161–185, Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058. MR 3087346
- [DG05] Pierre Deligne and Alexander B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56. MR 2136480
- [Gon] Alexander B. Goncharov, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, Preprint, arXiv:math/0103059v3 (2001).
- [Lev93] Marc Levine, *Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic K-theory*, Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 407, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, pp. 167–188. MR 1367296

- [Ter02] Tomohide Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 339–369. MR 1918675
- [Yas14] Seidai Yasuda, *The Hoffman basis of the space of multiple zeta values*, Algebraic number theory and related topics 2012, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B51, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014, pp. 375–433. MR 3408209
- [望] 望月新一, モチーフ/代数多様体の数論的骨格, 数学セミナー 1999年5月号.  
*E-mail address: kei.hagihara@gmail.com*

# BROWN の定理の証明の概略

広瀬稔 (MINORU HIROSE)

## CONTENTS

Introduction	1
1. 混合テイトモチーフの理論から導かれる事実の紹介	2
1.1. $\mathcal{H}$ について	2
1.2. $\mathcal{H}$ の構造定理	2
1.3. 周期写像	3
1.4. モチビックな反復積分	3
1.5. motivic coaction formula for iterated integral	4
2. $\mathcal{H}$ のフィルトレーション	5
3. Charlton の Block notation	7
4. Brown の定理の証明	8
5. Brown の定理の系	10
6. Algebraic basis について	10
7. Hoffman star basis について	10
8. より一般の反復積分と混合テイトモチーフの周期について	11
9. 演習問題の解答	11
References	15

## INTRODUCTION

多重ゼータ値 (Multiple Zeta Values) は次の無限級数で定義される実数である .

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (k_1, \dots, k_{r-1} \in \mathbb{Z}_{>0}, k_r \in \mathbb{Z}_{>1}).$$

ここで  $k_1 + \dots + k_r$  のことを重さ (weight) ,  $r$  のことを深さ (depth) という .

本稿の目的は Hoffman([7, Conjecture C, p493]) により予想され , Brown([1]) により証明された次の定理について解説することである .

定理 1. 重さ  $k$  の全て多重ゼータ値は

$$\{\zeta(k_1, \dots, k_r) \mid k_1, \dots, k_r \in \{2, 3\}, k_1 + \dots + k_r = k\}$$

の  $\mathbb{Q}$ -線形和として表される。

この定理の証明の鍵は次の 3 つである

- (1)  $\mathbb{Z}$  上の混合テイトモチーフの理論 (とモチビックな反復積分の理論) からの帰結 .
- (2) Zagier の恒等式

---

Date: January 16, 2019.

## (3) 初等的な議論

本稿では、1,2 について証明抜きで紹介し、3 の部分について解説する。

注意 1.  $k_1, \dots, k_r \in \{2, 3\}$  となる整数の組  $(k_1, \dots, k_r)$  を Hoffman index と呼ぶ。また Hoffman index 中の 3 の個数  $\#\{i \mid k_i = 3\}$  を Hoffman index のレベルと呼ぶ。

注意 2. 重さ  $k$  の多重ゼータ値の張る  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間を  $\mathcal{Z}_k \subset \mathbb{Q}$  とし、整数  $\{d_k\}$  を  $\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$  で定めると、 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$  となることが Zagier ([9, Section 9, p509]) により予想されている。このうち上限  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$  は Brown 以前から Goncharov や寺杉らにより証明されていた。さて  $d_k$  は重さ  $k$  の Hoffman index の個数に一致する。よって次元予想  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$  が正しければ、定理 1 は  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間  $\mathcal{Z}_k$  の生成元というだけでなく、基底も与えていることになる。

## 1. 混合テイトモチーフの理論から導かれる事実の紹介

本稿では混合テイトモチーフの周期の理論から導かれる次の事実を仮定する。

- (1) 余積構造付き次数付可換環  $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$  の存在。
- (2)  $\mathcal{H}$  の具体的な構造定理。
- (3) 周期写像  $\text{per} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  の存在。
- (4) モチビックな反復積分 (多重ゼータ値) とその性質。
- (5) モチビックな反復積分の余積の計算。(Goncharov-Brown の余積公式)

本節では、これらの詳しい内容について解説する。

1.1.  $\mathcal{H}$  について。

定理 2.  $\mathbb{Z}$  上の混合モチーフの周期の理論から、次を満たす三つ組  $(\mathcal{H}, \zeta^m(2), \Delta)$  が得られる。

- (1)  $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$  は次数付き可換環。
- (2)  $\zeta^m(2)$  は  $\mathcal{H}_2$  の元。
- (3)  $\Delta$  は準同型  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}$ 。ここで  $\mathcal{A} := \mathcal{H}/(\zeta^m(2))$  と置いた。<sup>1</sup>

注意 3. 当然ながら、定理 2 は、それ単独では意味のない命題であり、後続の命題 (定理 3, 4, 5 等と組み合わせて始めて意味を持つ。)

注意 4. より一般的な観点からは、 $\mathcal{H}$  は次のように理解される。まず、代数体  $K \subset \mathbb{C}$  および  $K$  の有限素点の集合  $S$  に対して、混合テイトモチーフの周期の理論から、 $\mathcal{O}_{K,S}$  上の混合テイトモチーフの effective periods のなす環が構成できる。これを  $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$  と書いたとしよう。 $\mathcal{O}_{K,S}$  の複素共役が自分自身に一致するとき、 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$  にも複素共役写像  $J : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$  が作用する。定理 2 における  $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$  の  $J$  不変部分である。

1.2.  $\mathcal{H}$  の構造定理。

定義 1. 可換環  $\mathcal{U}'$  を次で定める。まず底空間は

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \mathbb{Q}\langle f_{2i+1} \mid i \geq 1 \rangle = \mathbb{Q}\langle f_3, f_5, f_7, \dots \rangle \\ &= \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}f_3 \oplus \mathbb{Q}f_5 \oplus \mathbb{Q}f_3f_3 \oplus \mathbb{Q}f_7 \oplus \mathbb{Q}f_3f_5 \oplus \mathbb{Q}f_5f_3 \oplus \dots \end{aligned}$$

とする。積はシャッフル積<sup>2</sup>で定める

<sup>1</sup> $\Delta$  は Hopf 代数の余積と似た数多くの性質を満たす。例えば  $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$  である。また  $\Delta$  が誘導する写像  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  によって  $\mathcal{A}$  は Hopf 代数になる。また  $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{A}$  の comodule となる。これらの事実は  $\mathcal{H}$  の具体的な構造定理からも従う。

<sup>2</sup>シャッフル積とは、 $x \sqcup 1 = 1 \sqcup x = x$  と  $f_a x \sqcup f_b y = f_a(x \sqcup f_b y) + f_b(f_a x \sqcup y)$  (ただし  $x, y \in \mathcal{U}'$ ,  $a, b \in \{3, 5, 7, \dots\}$ ) で帰納的に定まる双線形な二項演算である。

定義 2. 可換環  $\mathcal{U}$  を

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[f_2]$$

で定める .

以下  $\mathcal{U}$  の元  $f_{i_1} \cdots f_{i_n} \otimes f_2^m$  を単に  $f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_2^m$  と書く .

定義 3. 準同型

$$\Delta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U}$$

を

$$\Delta(f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_2^m) = \sum_{k=0}^n f_{i_1} \cdots f_{i_k} \otimes f_{i_{k+1}} \cdots f_{i_n} f_2^m$$

で定める .

定義 4.  $\deg(f_i) = i$  とすることにより  $\mathcal{U}$  を次数付き環とみなす . つまり

$$\mathcal{U}_k = \bigoplus_{\substack{d \geq 0 \\ m \geq 0 \\ i_1, \dots, i_d \in \{3, 5, 7, \dots\} \\ i_1 + \dots + i_d + 2m = k}} \mathbb{Q} f_{i_1} \cdots f_{i_d} f_2^m .$$

定理 3. 付加構造付き次数付き環  $(\mathcal{H}, \zeta^m(2), \Delta)$  と  $(\mathcal{U}, f_2, \Delta)$  の間には (非標準的) な同型<sup>3</sup> $\phi$  が存在する .

### 1.3. 周期写像.

定理 4. 標準的な環準同型写像

$$\text{per} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

が存在する (周期写像と呼ばれる . 単射と予想されている .)

注意 5. より一般に  $\text{per} : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \rightarrow \mathbb{C}$  が定義可能である . ここで  $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$  は注意 4 と同様 .

1.4. モチビックな反復積分. 0 以上の整数  $k$  と  $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{0, 1\}$  に対してモチビックな反復積分 (motivic integral)

$$(1.1) \quad I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_k$$

が定義される . また  $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  に対して

$$\zeta^m(\mathbb{k}) = (-1)^r I^m(0; 10^{k_1-1} \cdots 10^{k_r-1}; 1)$$

と置く .  $I^m$  が満たす代表的な性質を挙げる

- (1)  $k \geq 1$  かつ  $a_0 = a_{k+1}$  なら  $I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = 0$ .
- (2)  $I^m(a_0; a_1) = 1$ .
- (3)  $I^m(0; 0; 1) = 0$ .

<sup>3</sup>同型の正確な意味は次の通り .

- $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$  は次数付き環の環準同型
- $\phi(\zeta^m(2)) = f_2$
- 次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \otimes \phi \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U} \end{array}$$

(4)  $I^m(a_0; \alpha; b)$  は shuffle 関係式

$$I^m(a; \alpha; b) \cdot I^m(a; \beta; b) = I^m(a; \alpha \sqcup \beta; b)$$

を満たす .

$$(5) I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = (-1)^k I^m(a_{k+1}; a_k, \dots, a_1; a_0)$$

$$(6) I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = I^m(1 - a_0; 1 - a_1, \dots, 1 - a_k; 1 - a_{k+1})$$

$$(7) \text{per}(\zeta^m(k_1, \dots, k_r)) = \zeta^{\sqcup}(k_1, \dots, k_r).$$

定義 5 (モチビック多重ゼータ値). 性質 (7) より  $\text{per}(\zeta^m(\mathbb{k})) = \zeta(\mathbb{k})$  である .

注意 6. モチビックな反復積分はより一般的な文脈で定義される . まず , 通常反復積分の定義を述べよう .  $a_0, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{C}$  として ,  $a_0 \neq a_1, a_k \neq a_{k+1}$  を仮定する . また ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  をパスであって ,  $(\gamma(0), \gamma(1)) = (a_0, a_{k+1})$  かつ任意の  $0 < t < 1$  に対して  $\gamma(t) \notin \{a_1, \dots, a_k\}$  が成立するとする . このとき反復積分  $I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathbb{C}$  が

$$I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} \prod_{j=1}^k \frac{d\gamma(t_j)}{\gamma(t_j) - a_j}$$

によって定義される .

さて ,  $a_0, \dots, a_{k+1} \in K$  の場合は ,  $S$  を十分大きく取ればモチビックな反復積分

$$I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$$

も定義可能である . (どのような  $S$  を取ればいいかについてもある程度正確に記述することができる ([6, Theorem 1.3]))

また , 条件  $(\gamma(0), \gamma(1)) = (a_0, a_{k+1})$  が満たされない場合は , 接基点 (tangential base point) の理論が必要になる . 具体的には単に  $a_0 \in \mathbb{C}$  と  $a_{k+1} \in \mathbb{C}$  を考える代わりに接基点  $a_0, a_{k+1} \in \{(p, v) \mid p \in \mathbb{C}, v \in T_p \mathbb{C} = \mathbb{C}\}$  を考える必要がある .

(1.1) における  $I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$  は  $\gamma$  を最もシンプルなパスとし , 接基点を  $(0, 1)$  と  $(1, -1)$  にすることにより得られる .

演習 1. 性質 (3) と (4) から

$$\sum_{i=0}^k I^m(0; a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots, a_k; 1) = 0$$

が従う . これを用いて次を示せ

$$I^m(0; \overbrace{0, \dots, 0}^a, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^b; 1) = (-1)^{a+1} \binom{a+b}{a} \zeta^m(a+b+1)$$

1.5. **motivic coaction formula for iterated integral.**  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\zeta^m(2) = \mathcal{A}$  を自然な射影とする . 次の公式については [6, Theorem 1.2] や [1, Theorem 2.4] を参照 .

定理 5 (Goncharov の余積公式).  $\Delta(I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}))$  は

$$\sum_{s=1}^{k+1} \sum_{\substack{i_0 < i_1 < \dots < i_s \\ i_0=0, i_s=k+1}} \pi \left( \prod_{p=0}^{s-1} I^m(a_{i_p}; a_{i_{p+1}}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}) \right) \otimes I^m(a_{i_0}; a_{i_1}, \dots, a_{i_{s-1}}; a_{i_s})$$

と等しい。<sup>4</sup>

例 1.

$$\begin{aligned}\Delta(I(a; b, c; d)) &= I(a, b, c, d) \otimes I(a, d) \\ &\quad + I(a, b)I(b, c, d) \otimes I(a, b, d) \\ &\quad + I(a, b, c)I(c, d) \otimes I(a, c, d) \\ &\quad + I(a, b)I(b, c)I(c, d) \otimes I(a, b, c, d).\end{aligned}$$

## 2. $\mathcal{H}$ のフィルトレーション

定義 6.  $\mathcal{U}$  上のフィルトレーション  $\{0\} = F_{-1}\mathcal{U} \subset F_0\mathcal{U} \subset F_1\mathcal{U} \subset \dots \subset \mathcal{U}$  を

$$F_d\mathcal{U} = \bigoplus_{e=0}^d \bigoplus_{\substack{i_1, \dots, i_e \\ \in \{3, 5, 7, \dots\}}} \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathbb{Q}f_{i_1} \cdots f_{i_e} f_2^s$$

で定める. また,  $F_d\mathcal{H} = \phi^{-1}(F_d\mathcal{U})$  と置く.

演習 2.  $F_d\mathcal{H}$  が  $\phi$  の選び方に依存しないことを示せ.

また  $\text{gr}_d\mathcal{U} = F_d\mathcal{U}/F_{d-1}\mathcal{U}$ ,  $\text{gr}_d\mathcal{H} = F_d\mathcal{H}/F_{d-1}\mathcal{H}$  と置く.

命題 1.  $x \in \mathcal{H}_k$  で  $\Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1 = 0$  となるとき,

$$x \in \begin{cases} F_0\mathcal{H} & k : \text{even} \\ F_1\mathcal{H} & k : \text{odd} \end{cases}$$

定義 7.  $\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - 1 \otimes x$ .

命題 2.  $x \in \mathcal{H}$  が  $\tilde{\Delta}(x) \in \mathcal{A} \otimes F_d\mathcal{H}$  を満たすとき  $x \in F_{d+1}\mathcal{H}$ .

演習 3. 命題 1, 2 を証明せよ.

命題 1, 2 と Goncharov の余積公式を組み合わせることで, 色々なことが証明可能である.

命題 3.  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $\phi(\zeta^m(2k)) \in \mathbb{Q}^\times f_2^k$ ,  $\phi(\zeta^m(2k+1)) \in \mathbb{Q}^\times f_{2k+1}$ .

命題 4. 任意の  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$  に対して  $\zeta^m(k_1, \dots, k_r) \in F_r\mathcal{H}$ .

命題 5.  $\phi(\zeta^m(\{2\}^n)) \in \mathbb{Q}^\times f_2^n$ .

<sup>4</sup>この公式で, 積となる部分が  $\otimes$  の左側に来るとは, 次のようにして覚えることができる. Goncharov の余積公式はより一般の反復積分

$$I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \quad (a_0, \dots, a_{k+1} \in \bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}, \gamma \text{ は } a_0 \text{ から } a_{k+1} \text{ へのパス})$$

にも一般化され  $\Delta I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$  は

$$\sum_{\substack{i_0 < i_1 < \dots < i_s \\ i_0=0, i_s=k+1}} \pi \left( \prod_{p=0}^{s-1} I^m(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}) \right) \otimes I_\gamma^m(a_0; a_{i_1}, \dots, a_{i_{s-1}}; a_{k+1})$$

となる. ここで,  $\otimes$  の左側の積に現れる  $I^m(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}})$  は, 始点が  $a_{i_p}$  で終点が  $a_{i_{p+1}}$  となるため  $\gamma$  から標準的に定めることが出来ない. よって  $\otimes$  の左側の積は well-defined にならないように見えるが, 実は反復積分は modulo  $2\pi\sqrt{-1}$  でみると, パスのとり方に依らないことが証明できる. よって適切な quotient をとることで式が well-defined になるのである.

命題 6.  $k \geq 0$  と  $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{0, 1\}$  に対して  $d \geq 0$  を

$$d = \#\{0 \leq i \leq k \mid a_i = a_{i+1}\}$$

で定める. このとき

$$I^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in F_d \mathcal{H}$$

が成立する.

雰囲気をつかむために, 命題 5 を証明する.

*Proof.*  $n$  に関する帰納法で証明する.  $(-1)^n \zeta^m(\{2\}^n) = I^m(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}; 1)$  と置く. 帰納法の仮定および reversal formula より任意の  $0 < k < n$  および任意の  $0 < m$  に対して

$$\pi(I^m(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2k}; 1)) = 0$$

$$\pi(I^m(1; \overbrace{0, 1, \dots, 0, 1}^{2k}; 0)) = 0$$

$$I^m(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2m-1}; 0) = 0$$

$$I^m(1; \overbrace{0, 1, \dots, 0, 1}^{2m-1}; 1) = 0$$

となる.  $\Delta I^m(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}; 1)$  を Goncharov の余積公式 (定理 5) を用いて計算しよう. ここで公式内の  $\pi(I^m(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}))$  に着目する.  $(a_{i_p}, a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}, a_{i_{p+1}})$

は  $(0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}, 1)$  の長さ  $i_{p+1} - i_p + 1$  の部分列である. よって  $\pi(I^m(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}))$  は  $i_{p+1} - i_p + 1 = 2$  となる場合, または  $i_{p+1} - i_p + 1 = 2n + 2$  となる場合以外は 0

となる. よって  $x_n = I^m(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}; 1)$  と置くと

$$\Delta(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n$$

となる. よって命題 1 より  $\phi(x_n) \in \mathbb{Q}f_2^n$  である. 最後に  $x_n \neq 0$  を証明しよう. これは  $\text{per}((-1)^n x_n) = \zeta(\{2\}^n) > 0$  から従う.  $\square$

注意 7.  $\mathcal{U}$  上のフィルトレーション  $\tilde{F}$  を

$$\tilde{F}_d \mathcal{U} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{e \leq d \text{ (} s=0 \text{ の場合)} \\ e \leq d-1 \text{ (} s>0 \text{ の場合)}}} \bigoplus_{i_1, \dots, i_e \in \{3, 5, 7, \dots\}} f_{i_1} \cdots f_{i_e} f_2^s$$

で定め,  $\tilde{F}_d \mathcal{H} = \phi^{-1}(\tilde{F}_d \mathcal{U})$  とおく. このとき

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) \in \tilde{F}_d \mathcal{H}$$

となる (これは命題 4 の精密化である)

演習 4.  $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \text{gr}_d \mathcal{H}_k$  と置くととき,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d = \frac{1}{1 - x^2 - x^3 y}$$

を証明せよ．この母関数表示から  $D_{k,d}$  は重さ  $k$  , レベル  $d$  の Hoffman index の個数

$$\#\{\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \{2, 3\}^r \mid \text{wt}(\mathbb{k}) = k, \#\{i \mid k_i = 3\} = d\}$$

に等しいことが分かる．

### 3. CHARLTON の BLOCK NOTATION

本節では Charlton のブロック記法 (Block notation, [2]) を用いて Brown の証明を解説する．Charlton のブロック記法は Brown の証明よりも後に導入された概念であるが, Hoffman index のような対象を扱うのに便利である．ブロック記法を扱う際は反復積分記号

$$I^m(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1})$$

をセミコロンを使わず

$$I^m(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$$

と書いたほうが分かりやすいので, 以後はセミコロンを使わないこの表記法を採用する．

0 と 1 を交互に並べて得られる空でない有限 01 列をブロックと呼ぶ．次はブロックの例である．

010101 (長さ 6, 先頭文字 0, 末尾文字 1)

101 (長さ 3, 先頭文字 1, 末尾文字 1)

0 (長さ 1, 先頭文字 0, 末尾文字 0).

定義 8.  $d \geq 0$  と  $k_0, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対して 0 から始まる 01 列  $B(k_0, \dots, k_d)$  を

$$B(k_0, \dots, k_d) = W_0 \cdots W_d$$

で定める．ただし,  $W_0, \dots, W_d$  は次で特徴づけられる唯一の 01 列である．

- $W_0, \dots, W_d$  は長さ  $k_0, \dots, k_d$  のブロック
  - $W_0$  の先頭文字は 0 . また  $i = 1, \dots, d$  に対して  $W_i$  の先頭文字は  $W_{i-1}$  の末尾文字に等しい .

例えば

$$B(3, 4, 5) = \overbrace{010}^3 \overbrace{0101}^4 \overbrace{10101}^5$$

である．0 から始まる任意の 01 列は,  $B(k_0, \dots, k_d)$  の形で一意的に表すことが可能である．

定義 9. 反復積分記号  $I^m()$  に  $B(k_0, \dots, k_d)$  を入れたものを  $I_{\text{bl}}^m(k_0, \dots, k_d)$  で表す．例えば

$$I_{\text{bl}}^m(3, 4, 5) = I(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1).$$

(反復積分の端点も 01 列の一部と見なすことに注意．よって  $I_{\text{bl}}^m(k_0, \dots, k_d)$  の重さは  $k_0 + \dots + k_d - 2$  である) .

また  $I_{\text{bl}}(k_0, \dots, k_d) := \text{per}(I_{\text{bl}}^m(k_0, \dots, k_d))$  と置く .

演習 5. 次を確認せよ .

$$\zeta^m(\{2\}^{k_0}, 3, \{2\}^{k_2}, 3, \dots, \{2\}^{k_{d-1}}, 3, \{2\}^{k_d}) = \pm I_{\text{bl}}^m(2k_0 + 3, \dots, 2k_{d-1} + 3, 2k_d + 2).$$

## 4. BROWN の定理の証明

重さ  $N$  , レベル  $d \geq 0$  の Hoffman index と対応する , ブロック記法の index の集合を

$$\text{BH}_{N,d} = \{(k_0, \dots, k_d) \mid k_0, \dots, k_{d-1} \in 1 + 2\mathbb{Z}_{>0}, k_d \in 2\mathbb{Z}_{>0}, k_0 + \dots + k_d = N - 2\}$$

と置く .

本節では次の定理を証明する .

定理 6.  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して

$$\{\zeta^m(k_1, \dots, k_r) \mid k_i \in \{2, 3\}, \#\{j \mid k_j = 3\} \leq d\}$$

は  $F_d \mathcal{H}$  の  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間としての基底となる .

これは次と同値である .

定理 7.  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して

$$\{I_{\text{bl}}^m(\mathbb{k}) \in \text{gr}_d \mathcal{H}_N \mid \mathbb{k} \in \text{BH}_{N,d}\}$$

は  $\text{gr}_d \mathcal{H}_N$  の元として  $\mathbb{Q}$  上一次独立である .

定義 10.  $N \geq 0$  と  $d \geq 1$  に対して , 同型写像

$$\partial_{N,d} : \text{gr}_d \mathcal{H}_N \rightarrow \bigoplus_{\substack{1 < r \leq N \\ r: \text{奇数}}} \text{gr}_{d-1} \mathcal{H}_{N-r}$$

を次で定める . まず  $\tilde{\Delta}(F_d \mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \otimes F_{d-1} \mathcal{H}$  より  $\tilde{\Delta}$  は写像  $\tilde{\Delta} : \text{gr}_d \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \text{gr}_{d-1} \mathcal{H}$  を誘導する . このとき  $\tilde{\Delta}(\text{gr}_d \mathcal{H}) = F_1 \mathcal{H} \otimes \text{gr}_{d-1} \mathcal{H}$  が分かる . 特に weight  $N$  の部分を見ると

$$\tilde{\Delta}(\text{gr}_d \mathcal{H}_N) = \bigoplus_{\substack{1 < r \leq N \\ r: \text{奇数}}} F_1 \mathcal{H}_r \otimes \text{gr}_{d-1} \mathcal{H}_{N-r}$$

である .  $\partial_{N,d}$  は合成写像

$$\text{gr}_d \mathcal{H}_N \xrightarrow{\tilde{\Delta}} \bigoplus_{\substack{1 < r \leq N \\ r: \text{奇数}}} F_1 \mathcal{H}_r \otimes \text{gr}_{d-1} \mathcal{H}_{N-r} \xrightarrow{(r-1)2^{2-r} \zeta^m(r) \otimes x \mapsto x} \bigoplus_{\substack{1 < r \leq N \\ r: \text{奇数}}} \text{gr}_{d-1} \mathcal{H}_{N-r}$$

で定義される .

定理 7 は ,  $d$  に関する帰納法で証明する .  $d = 0$  の場合は簡単なので  $d \geq 1$  としよう . 定理を示すには

$$\{\partial_{N,d}(I_{\text{bl}}^m(\mathbb{k})) \mid \mathbb{k} \in \text{BH}_{N,d}\}$$

が一次独立であることを示せばよい . 命題 5 に注意しながら Goncharov の余積公式 (定理 5) を用いると

$$\tilde{\Delta}(I_{\text{bl}}^m(k_0, \dots, k_d)) = \sum_{s=0}^{d-1} \sum_{\substack{1 < r \leq k_s + k_{s+1} - 2 \\ r: \text{奇数}}} \xi_{k_s, k_{s+1}}^r \otimes I_{\text{bl}}^m(k_0, \dots, k_{s-1}, k_s + k_{s+1} - r, k_{s+2}, \dots, k_d)$$

ただし

$$\xi_{x,y}^r := \sum_{\substack{0 < x' \leq a \\ 0 < y' \leq b \\ x' + y' = r + 2}} \pi(I_{\text{bl}}^m(x', y'))$$

となる．ここで， $\pi(I_{\text{bl}}^m(a, b))$  の値を教えてくれるのが Zagier による次の公式である.<sup>5</sup>

定理 8 ([10, Theorem 1]). 1 以上の奇数  $x$  と 2 以上の偶数  $y$  に対して

$$I_{\text{bl}}^m(x, y) = 2 \sum_{\substack{1 < m < x+y \\ m \equiv 1 \pmod{2}}} \left( \binom{m-1}{x-1} - \left(1 - \frac{2}{2^m}\right) \binom{m-1}{y-1} \right) I_{\text{bl}}^m(x+y-m) \zeta^m(m).$$

特に  $\pi(I_{\text{bl}}^m(x, y)) \in \mathcal{A}$  は次に等しい:

$$2 \left( \binom{x+y-3}{x-1} - \left(1 - \frac{2}{2^{x+y-2}}\right) \binom{x+y-3}{y-1} \right) \zeta^m(x+y-2).$$

演習 6. 定理 8 の  $x = 1$  の場合は， $x \geq 3$  の場合に帰着されることを示せ．

注意 8. 実際に Zagier が証明したのは (モチビック版ではなく) 実数に対する等式

$$I_{\text{bl}}(x, y) = 2 \sum_{\substack{1 < m < x+y \\ m \equiv 1 \pmod{2}}} \left( \binom{m-1}{x-1} - \left(1 - \frac{2}{2^m}\right) \binom{m-1}{y-1} \right) I_{\text{bl}}(x+y-m) \zeta(m)$$

である．この等式からモチビック版が導かれることは [1, Theorem 4.3] の証明を参照せよ．

Zagier の恒等式から次が従う．

$$(4.1) \quad \xi_{x,y}^r = 2\zeta^m(r) \times \left( \begin{cases} \binom{r-1}{x-1} & x : \text{odd} \\ \left(1 - \frac{2}{2^r}\right) \binom{r-1}{x-1} & x : \text{even} \end{cases} - \begin{cases} \binom{r-1}{y-1} & y : \text{odd} \\ \left(1 - \frac{2}{2^r}\right) \binom{r-1}{y-1} & y : \text{even} \end{cases} \right)$$

演習 7. Zagier の恒等式を用いて，(4.1) を証明せよ．

この式を具体的に行列表示したものを

$$\partial_{N,d}(I_{\text{bl}}^m(\mathbb{k})) = \sum_{\mathbb{k}'} M_{\mathbb{k},\mathbb{k}'} I_{\text{bl}}^m(\mathbb{k}')$$

とする．ただし， $\mathbb{k}$  は  $\text{BH}_{N,d}$  の元を動き， $\mathbb{k}'$  は  $\bigcup_{\substack{1 < r < N \\ r: \text{奇数}}} \text{BH}_{N-r,d-1}$  の元を動く．

あとは  $M := (M_{\mathbb{k},\mathbb{k}'})_{\mathbb{k},\mathbb{k}'}$  が可逆行列であることを示せば定理 7 の証明が完了する．これは次の事実から従う．

- (1)  $M$  は全ての成分が  $\mathbb{Z}_{(2)} := \{a/b \mid b : \text{odd}\}$  に属する．
- (2)  $M$  は (行と列を適切に並べたら)

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \pmod{2\mathbb{Z}_{(2)}}.$$

特に  $\det M \equiv 1 \pmod{2\mathbb{Z}_{(2)}}$ .

演習 8. (1),(2) が成立していることを確認せよ．

<sup>5</sup>Zagier の原論文で述べられている形とは少し違うが，同値性は (主張の証明よりも) 簡単に示せる．

## 5. BROWN の定理の系

定理 6 および命題 4, 6 の系として次が得られる .

定理 9.  $k, d \geq 0$  とする . 以下はいずれも重さ  $k$  , レベル  $d$  以下の *Hoffman basis*

$$\{\zeta(k_1, \dots, k_r) \mid k_1, \dots, k_r \in \{2, 3\}, k_1 + \dots + k_r = k, \#\{j \mid n_j = 3\} \leq d\}$$

の  $\mathbb{Q}$ -線形和となる .

- (1)  $\zeta(k_1, \dots, k_e) \times \pi^{2s}$  . ただし ,  $k_1 + \dots + k_e + 2s = k, e \leq d$ .
- (2)  $I_{\text{bl}}(k_0, \dots, k_e)$  . ただし ,  $k_0 + \dots + k_e = k - 2, e \leq d$ .
- (3)  $\prod_{j=1}^m I_{\text{bl}}(k_0^{(j)}, \dots, k_{e_j}^{(j)})$  . ただし  $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{e_j} k_i^{(j)} = k - 2m, \sum_{j=1}^m e_j \leq d$ .

注意 9. (3) は (2) の一般化である .

## 6. ALGEBRAIC BASIS について

$\mathcal{H}$  の (linear ではなくて) algebraic な basis についても , Brown により結果が知られている . 詳細については原論文を参照してほしい .

定理 10 ([1, Theorem 8.1]). 集合

$$\{\zeta^{\text{m}}(w) \mid w \text{ は } 2, 3 \text{ の Lyndon word}\}$$

は  $\mathcal{H}$  の *polynomial basis* となる .

## 7. HOFFMAN STAR BASIS について

等号付き多重ゼータ値を

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

で定義する . これが多重ゼータ値の線形和でかけることは , 定義からすぐに分かる . Ihara-Kajikawa-Ohno-Okuda は次を予想した .

予想 1 ([8, Conjecture 1]). 全ての多重ゼータ値は

$$\{\zeta^*(k_1, \dots, k_r) \mid k_1, \dots, k_r \in \{2, 3\}\}$$

の  $\mathbb{Q}$  線形結合で書ける .

この主張については (陽に述べている箇所は見つけれなかったが) 以下で説明するように既に証明されているように思われる . Glanois は次を示した .

定理 11. [4, Theorem 4.2] 次は  $\mathcal{H}$  の基底となる .

$$\{\zeta^{\sharp, \text{m}}(2a_0 + 1, 2a_1 + 3, \dots, 2a_{p-1} + 3, \overline{2a_p + 2}), a_i \geq 0\}.$$

周期写像  $\text{per}$  を考えることにより , 系として次が得られる

系 1. 全ての多重ゼータ値は ,

$$\{\zeta^{\sharp}(2a_0 + 1, 2a_1 + 3, \dots, 2a_{p-1} + 3, \overline{2a_p + 2}), a_i \geq 0\}$$

の  $\mathbb{Q}$ -線形和となる .

一方 , Zhao により次が知られている .

定理 12. [11]

$$\zeta^{\sharp}(2a_0 + 1, 2a_1 + 3, \dots, 2a_{p-1} + 3, \overline{2a_p + 2}) = \zeta^*(\{2\}^{a_0}, 3, \{2\}^{a_1}, \dots, 3, \{2\}^{a_p}).$$

系 1 と定理 12 から予想 1 が示される .

## 8. より一般の反復積分と混合テイトモチーフの周期について

$K \subset \mathbb{C}$  を代数体とし,  $S$  を  $K$  の有限素点の集合とする. このとき, 1 節で述べたのと同様の定理が成り立つ.

- (1) 代数体  $K \subset \mathbb{C}$  に対し, 次数付き環  $\mathcal{H}(K) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i(K)$  が存在する ( $K$  上の混合テイトモチーフの周期の環)
- (2) 次数付き環  $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i(\mathcal{O}_{K,S})$  が存在する ( $\mathcal{O}_{K,S}$  上の混合テイトモチーフの周期の環)
- (3) 環準同型  $\text{per} : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \rightarrow \mathbb{C}$  が存在する.
- (4) 特別な元  $\mu \in \mathcal{H}_1(\mathcal{O}_{K,S})$  であって  $\text{per}(\mu) = 2\pi\sqrt{-1}$  となるものが存在する.  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{K,S}) = \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})/(\mu)$  と置く.
- (5) 余積  $\Delta : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_{K,S}) \otimes \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$  が存在する.
- (6) 非標準的な同型

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{O}_{K,S}) \simeq \bigoplus_{\substack{0 \leq d \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \bigotimes_{j=1}^d (K_{2n_j-1}(\mathcal{O}_{K,S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

が存在する.

- (7)  $n \geq 0, a_0, \dots, a_{n+1} \in K$  に対して

$$I_{\gamma}^m(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathcal{H}(K)$$

が定まり,  $\text{per}(I_{\gamma}^m(a_0, \dots, a_{n+1})) = I_{\gamma}(a_0, \dots, a_{n+1}) \cdot \{a_0, \dots, a_{n+1}, \infty\} \subset X$  となるとき, これは  $\mathbb{P}^1 \setminus X$  上の反復積分と呼ばれる.

- (8) 更に  $a_i - a_j \in \mathcal{O}_{K,S}^{\times}$  が任意の  $i \neq j$  に対して成立するとき

$$I(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}).$$

- (9) Goncharov-Brown の余積公式も成立する.

(7) は反復積分が混合テイトモチーフの周期となることを主張しているが, 逆は非常に難しい問題である.

予想 2 (Goncharov, [5, Conjecture 0.17(a)]).  $K \subset \mathbb{C}$  を代数体とする.  $\mathcal{H}(K)$  の任意の元は,  $\mathbb{P}^1 \setminus (K \cup \{\infty\})$  上の反復積分の  $\mathbb{Q}$ -線形和だろう.

この予想は,  $K = \mathbb{Q}$  の場合ですら未解決である. Brown の定理からは次が従う.

定理 13.  $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$  の任意の元は  $\mathbb{P}^1 \setminus (\{0, 1, \infty\})$  上の反復積分の  $\mathbb{Q}$ -線形和である.

Brown の定理と同じタイプの定理としては次が知られている.

定理 14 (Deligne, [3]).  $N \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$  とする.  $\mu_N$  を 1 の  $N$  乗根の集合とする.  $\mathcal{H}(\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}])$  の任意の元は  $\mathbb{P}^1 \setminus (\{0, \infty, \mu_N\})$  上の反復積分の  $\mathbb{Q}$ -線形和である.

## 9. 演習問題の解答

命題.

$$I^m(0; \overbrace{0, \dots, 0}^a, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^b; 1) = (-1)^{a+1} \binom{a+b}{a} \zeta^m(a+b+1)$$

*Proof.*  $a$  に関する帰納法で証明する.  $a = 0$  の場合は明らかである.  $\overbrace{0, \dots, 0}^{a-1}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^b$  との shuffle product より

$$\begin{aligned} aI^m(0; \overbrace{0, \dots, 0}^a, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^b; 1) &= -(b+1)I^m(0; \overbrace{0, \dots, 0}^{a-1}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{b+1}; 1) \\ &= (b+1)(-1)^{a+1} \binom{a+b}{a-1} \zeta^m(a+b+1) \quad (\text{帰納法の仮定を用いた}) \\ &= a(-1)^{a+1} \binom{a+b}{a} \zeta^m(a+b+1). \end{aligned}$$

よって示された. □

演習.  $F_d \mathcal{H}$  が  $\phi$  の選び方に依存しないことを示せ.

*Proof.*  $F_0 \mathcal{H} = \ker(\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A})$  と  $F_d \mathcal{H} = \tilde{\Delta}^{-1}(\mathcal{A} \otimes F_{d-1} \mathcal{H})$  から従う. □

演習.  $\Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1 = 0$  となる任意の  $x \in \mathcal{H}_k$  に対して,

$$x \in \begin{cases} F_0 \mathcal{H} & k : \text{even} \\ F_1 \mathcal{H} & k : \text{odd}. \end{cases}$$

また  $x \in \mathcal{H}$  が  $\tilde{\Delta}x := \Delta(x) - 1 \otimes x \in \mathcal{A} \otimes F_d \mathcal{H}$  を満たすとき  $x \in F_{d+1} \mathcal{H}$ .

*Proof.*  $\mathcal{U}$  について同様の主張を示せばよい.  $\{f_{i_1} \cdots f_{i_m} f_2^s\}$  から生成される  $\mathcal{U}$  の部分空間を  $\mathcal{U}^{(m)}$  と置く.  $\mathcal{U} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}^{(m)}$  である. 線形写像  $\lambda: \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  を

$$\lambda(f_{i_1} \cdots f_{i_m} \otimes f_{j_1} \cdots f_{j_n} f_2^s) = \begin{cases} f_{i_1} f_{j_1} \cdots f_{j_n} f_2^s & m = 1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases}$$

で定める. このとき  $m \geq 1$  と  $t \in \mathcal{U}^{(m)}$  に対して定義から  $\lambda(\Delta(t)) = t$  であり,  $t \in \mathcal{U}^{(0)}$  に対して  $\lambda(\Delta(t)) = 0$  である.

さて,  $\Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1 = 0$  と仮定しよう.  $x = x_0 + x_1 + x_{\geq 2}$ , ただし  $x_0 \in \mathcal{U}^{(0)}$ ,  $x_1 \in \mathcal{U}^{(1)}$ ,  $x_{\geq 2} \in \bigoplus_{m=2}^{\infty} \mathcal{U}^{(m)}$  と分解すると,

$$\begin{aligned} x_1 + x_{\geq 2} &= \lambda(\Delta(x)) \\ &= \lambda(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &= \lambda(x \otimes 1) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

となる. よって  $x_{\geq 2} = 0$  となり, 前半の主張が示された.

次に  $\Delta(x) - 1 \otimes x \in \mathcal{A} \otimes F_d \mathcal{H}$  と仮定する.  $x \in \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}^{(m)}$  と仮定しても一般性を失わない. このとき

$$\begin{aligned} x &= \lambda(\Delta(x)) \\ &= \lambda(\Delta(x) - 1 \otimes x) \end{aligned}$$

であるが,  $\Delta(x) - 1 \otimes x \in \mathcal{A} \otimes F_d \mathcal{H}$  より

$$\lambda(\Delta(x) - 1 \otimes x) \in F_{d+1} \mathcal{H}$$

である. よって  $x \in F_{d+1} \mathcal{H}$  が示された. □

演習.  $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \text{gr}_d \mathcal{H}_k$  と置くとき,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d = \frac{1}{1 - x^2 - x^3 y}$$

を証明せよ.

*Proof.*  $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \text{gr}_d \mathcal{H}_k = \dim_{\mathbb{Q}} \text{gr}_d \mathcal{U}_k$  である. よって定義より

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (x^3 y + x^5 y + x^7 y + \cdots)^n x^{2s} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^3 y}{1-x^2}} \times \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{1-x^2-x^3 y}. \end{aligned}$$

□

演習.

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^{k_0}, 3, \{2\}^{k_1}, 3, \dots, \{2\}^{k_{d-1}}, 3, \{2\}^{k_d}) = \pm I_{\text{bl}}^{\mathfrak{m}}(2k_0 + 3, \dots, 2k_{d-1} + 3, 2k_d + 2).$$

*Proof.* 定義より

$$\begin{aligned} &(-1)^{k_0 + \cdots + k_d} \zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^{k_0}, 3, \{2\}^{k_1}, 3, \dots, \{2\}^{k_{d-1}}, 3, \{2\}^{k_d}) \\ &= I^{\mathfrak{m}}(0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_0}, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_1}, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_{d-1}}, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_d}, 1) \\ &= I^{\mathfrak{m}}(\overbrace{0, 1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_0+3}, \overbrace{0, 1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_1+3}, \dots, \overbrace{0, 1, 0, \dots, 1, 0}^{2k_{d-1}+3}, \overbrace{0, 1, \dots, 0, 1}^{2k_d+2}) \\ &= I_{\text{bl}}^{\mathfrak{m}}(2k_0 + 3, \dots, 2k_{d-1} + 3, 2k_d + 2). \end{aligned}$$

□

演習. 定理 8 の  $x = 1$  の場合は,  $x \geq 3$  の場合に帰着されることを示せ.

*Proof.*  $n$  を 3 以上の奇数とする.

□

$\overbrace{(1, 0, \dots, 1, 0)}^{n-3}$  と  $(0)$  の shuffle 積より

$$0 = I_{\text{bl}}^{\mathfrak{m}}(1, n-1) + 2 \sum_{\substack{x+y=n \\ x:3 \text{ 以上の奇数} \\ y:2 \text{ 以上の偶数}}} I_{\text{bl}}^{\mathfrak{m}}(x, y).$$

よって定理 8 の  $x \geq 3$  での成立を仮定すると

$$\begin{aligned}
I_{\text{bl}}^m(1, n-1) &= -4 \sum_{\substack{x+y=n \\ x:3 \text{ 以上の奇数} \\ y:2 \text{ 以上の偶数}}} \sum_{\substack{1 < m < n \\ m: \text{奇数}}} \left( \binom{m-1}{x-1} - \left(1 - \frac{2}{2^m}\right) \binom{m-1}{y-1} \right) I_{\text{bl}}^m(x+y-m) \zeta^m(m) \\
&= -4 \sum_{\substack{1 < m < n \\ m: \text{奇数}}} \left( (2^{m-2} - 1) - \left(1 - \frac{2}{2^m}\right) 2^{m-2} \right) I_{\text{bl}}^m(x+y-m) \zeta^m(m) \\
&= 2 \sum_{\substack{1 < m < n \\ m: \text{奇数}}} I_{\text{bl}}^m(x+y-m) \zeta^m(m). \\
&= 2 \sum_{\substack{1 < m < n \\ m: \text{奇数}}} \left( \binom{m-1}{1-1} - \left(1 - \frac{2}{2^m}\right) \binom{m-1}{(n-1)-1} \right) I_{\text{bl}}^m(n-m) \zeta^m(m).
\end{aligned}$$

よって示された .

演習. Zagier の恒等式を用いて, (4.1) を証明せよ .

*Proof.*  $A_{x,y}$  と  $B_{x,y}$  を

$$\begin{aligned}
A_{x,y} &= \begin{cases} 2 \binom{x+y-3}{x-1} \zeta^m(x+y-2) & x : \text{odd}, y : \text{even} \\ -2 \binom{x+y-3}{y-1} \zeta^m(x+y-2) & x : \text{even}, y : \text{odd} \end{cases} \\
B_{x,y} &= \begin{cases} -2 \left(1 - \frac{2}{2^{x+y-2}}\right) \binom{x+y-3}{y-1} \zeta^m(x+y-2) & x : \text{odd}, y : \text{even} \\ 2 \left(1 - \frac{2}{2^{x+y-2}}\right) \binom{x+y-3}{x-1} \zeta^m(x+y-2) & x : \text{even}, y : \text{odd} \end{cases}
\end{aligned}$$

で定める . 定義より

$$\begin{aligned}
A_{2n+1, 2m+2} + A_{2n+2, 2m+1} &= 0 \\
B_{2n+2, 2m+3} + B_{2n+3, 2m+2} &= 0
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
\xi_{x,y}^r &= \sum_{\substack{0 < x' \leq x \\ 0 < y' \leq y \\ x' + y' = r+2}} \pi(I_{\text{bl}}^{\text{m}}(x', y')). \\
&= \sum_{\substack{0 < x' \leq x \\ 0 < y' \leq y \\ x' + y' = r+2}} A_{x',y'} + B_{x',y'} \\
&= \sum_{\max(1, r+2-y) \leq x' \leq \min(x, r+2-1)} A_{x', r+2-x'} + B_{x', r+2-x'} \\
&= \begin{cases} A_{r+2-y, y} & y : \text{odd} \\ 0 & y : \text{even} \end{cases} + \begin{cases} A_{x, r+2-x} & x : \text{odd} \\ 0 & x : \text{even} \end{cases} \\
&+ \begin{cases} B_{r+2-y, y} & y : \text{even} \\ 0 & y : \text{odd} \end{cases} + \begin{cases} B_{x, r-x} & x : \text{even} \\ 0 & x : \text{odd} \end{cases} \\
&= \begin{cases} A_{x, r+2-x} & x : \text{odd} \\ B_{x, r+2-x} & x : \text{even} \end{cases} + \begin{cases} A_{r+2-y, y} & y : \text{odd} \\ B_{r+2-y, y} & y : \text{even} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 \binom{r-1}{x-1} \zeta^{\text{m}}(r) & x : \text{odd} \\ 2 \left(1 - \frac{2}{2^r}\right) \binom{r-1}{x-1} \zeta^{\text{m}}(r) & x : \text{even} \end{cases} + \begin{cases} -2 \binom{r-1}{y-1} \zeta^{\text{m}}(r) & y : \text{odd} \\ -2 \left(1 - \frac{2}{2^r}\right) \binom{r-1}{y-1} \zeta^{\text{m}}(r) & y : \text{even} \end{cases} \\
&= 2 \zeta^{\text{m}}(r) \times \left( \begin{cases} \binom{r-1}{x-1} & x : \text{odd} \\ \left(1 - \frac{2}{2^r}\right) \binom{r-1}{x-1} & x : \text{even} \end{cases} - \begin{cases} \binom{r-1}{y-1} & y : \text{odd} \\ \left(1 - \frac{2}{2^r}\right) \binom{r-1}{y-1} & y : \text{even} \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

である . よって示された .  $\square$

#### REFERENCES

- [1] F. C. S. Brown, ‘Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$ ,’ *Annals of Math.* 175 (2012), 949-976.
- [2] S. Charlton, ‘The alternating block decomposition of iterated integrals, and cyclic insertion on multiple zeta values,’ preprint 1703.03784[NT].
- [3] P. Deligne, ‘Le groupe fondamental unipotent motivique de  $\mathbb{G}_m - \mu_N$ , pour  $N = 2, 3, 4, 6$  ou  $8$ ,’ *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2010), 101-141.
- [4] C. Glanois, ‘Unramified Euler sums and Hoffman basis,’ preprint 1603.05178[NT].
- [5] A. B. Goncharov, ‘Polylogarithms in arithmetic and geometry,’ In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 374-387, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [6] A. B. Goncharov, ‘Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry,’ *Duke Math. J.* 128 (2005), 209-284.
- [7] M. E. Hoffman, ‘The algebra of multiple harmonic series,’ *J. Algebra* 194 (1997), 477-495.
- [8] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno, and J. Okuda, ‘Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values,’ *J. Algebra* 332 (2011), 187-208.
- [9] D. Zagier, ‘Values of zeta functions and their applications,’ in *First European Congress of Mathematics (Paris, 1992)*, Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 497-512.
- [10] D. Zagier, ‘Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$ ,’ *Annals of Math.* 175 (2012), 977-1000.
- [11] J. Zhao, ‘Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta (star) families,’ *J. Math. Soc. Japan* 68 (2016), 1669-1694; preprint 1303.2227[NT].

(広瀬稔 (Minoru Hirose)) FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY  
*E-mail address:* m-hirose@math.kyushu-u.ac.jp

# 多重ゼータ値のモジュラー現象

田坂 浩二 (愛知県立大学 情報科学部)

本稿で解説する多重ゼータ値のモジュラー現象とは、多重ゼータ値代数の深さフィルトレーション (depth filtration)

$$\mathcal{D}^0 \mathcal{Z} = \mathbb{Q} \subset \mathcal{D}^1 \mathcal{Z} \subset \cdots \subset \mathcal{D}^r \mathcal{Z} = \langle \zeta(\mathbf{k}) \mid \text{dep}(\mathbf{k}) \leq r \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \cdots \subset \mathcal{Z}.$$

の構造に  $SL_2(\mathbb{Z})$  のモジュラー形式が関わっている現象をさす。これは最初、Zagier 氏の 1990 年代前半の論文 [28, 29] において、モジュラー形式の周期理論との関連において指摘された。ほぼ同時期<sup>\*1</sup>に、Ihara-Takao [8] も関連する現象を見出している。後に、Broadhurst 氏と Kreimer 氏は 1997 年の論文 [2] において、空間  $\mathcal{D}^r \mathcal{Z}_k$  の次元予想を提唱し、モジュラー形式の空間の次元との関係を示唆している。この予想の大部分は未解決である。

本稿では、これらモジュラー現象の解説および未解決問題の整理を試みる。まずは、モジュラー形式の周期理論の基本定理ともいえる Eichler-Shimura-Manin 対応を復習し、Gangl-Kaneko-Zagier [6] により得られた 2 重ゼータ値の線形関係式とモジュラー形式の周期多項式  $P_f(X, Y)$  との対応およびその双対側である Ihara-Takao [8] の関係式を紹介する。その後、Broadhurst-Kreimer 予想とその展望を述べる。

## 周期多項式の理論の復習

本稿で扱うモジュラー形式 (modular form) の記号を整理しておく。重さ  $k$  のモジュラー形式からなる  $\mathbb{C}$  線形空間を  $M_k = M_k(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$  とする:  $f \in M_k$  は複素上半平面  $\mathbb{H}$  上の正則関数で、Fourier 展開

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_f(n) q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau}, a_f(n) \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H})$$

---

<sup>\*1</sup> [8, p.258] では、1995 年の松本眞氏の論文でアナウンスしたとある。

をもち、反転に関する関数等式  $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$  を満たす ([22, Chapter VII, Section 1])。モジュラー形式の典型例として、Eisenstein 級数  $G_k(\tau)$  がある: 偶数  $k \geq 4$  に対し、

$$G_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

ただし、 $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$  である ([22, Chapter VII, Proposition 8])。線形空間  $M_k$  の部分空間  $S_k$  を Fourier 展開において  $a_f(0) = 0$  となるモジュラー形式全体とし、この元を尖点形式 (cusp form) とよぶ。  $M_k = \{0\}$  ( $k$ : 奇数, 負の整数) であり、 $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$  ( $k \geq 4$ : 偶数) となる ([22, Chapter VII, Section 3])。また、次元は以下のように書ける:

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k = \left[ \frac{k-4}{4} \right] - \left[ \frac{k-2}{6} \right] \quad (k \geq 4: \text{偶数}).$$

さて、周期多項式 (period polynomial) を導入しよう。日本語で読める文献として、Zagier 氏による九州大学での集中講義の講義録 [27] をあげておく。尖点形式  $f \in S_k$  に付随する周期多項式  $P_f(X, Y)$  を以下で定める:

$$P_f(X, Y) = \int_0^{i\infty} f(\tau)(X - Y\tau)^{k-2} d\tau.$$

これは  $\mathbb{C}$  係数  $k-2$  次斉次多項式である。実際、多項式  $P_f(X, Y)$  の  $X^{r-1}Y^{s-1}$  ( $r+s=k, r, s \geq 1$ ) の係数は

$$L_f^*(s) = \int_0^{\infty} f(it)t^{s-1} dt$$

の定数倍であるが、 $a_f(0) = 0$  より積分は収束する。  $\text{Re}(s) > \frac{k-1}{2}$  のとき、 $L_f^*(s)$  に Fourier 展開を代入、和と積分を交換して項別積分し、ガンマ関数の積分表示  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$  を使うと

$$L_f^*(s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{n>0} \frac{a_f(n)}{n^s}$$

という級数展開を得る。 $L_f^*(s)$  は  $s \in \mathbb{C}$  の正則関数で、完備 Hecke  $L$  関数などと呼ばれる。

モジュラー形式の保型性は値  $L_f^*(s)$  たちの関係式を導く。例えば、 $f$  の反転に関する関数等式を定義に代入すると  $L_f^*(s)$  ( $s \in \mathbb{C}$ ) の関数等式

$$L_f^*(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} L_f^*(k-s)$$

が得られる。特に、 $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  に制限することにより、 $P_f(X, Y) + P_f(-Y, X) = 0$  とかけることがわかる。Eichler-Shimura-Manin 対応は、 $P_f(X, Y)$  が満たす関係式により特徴付けられる多項式の空間  $W_k^\pm$  と尖点形式の空間  $S_k$  との間に単射 (同型写像) があるという主張である。以下、Kohnen-Zagier [12] の方針に沿って、Eichler-Shimura-Manin 対応を述べよう。

$k$  を偶数とする。 $\mathbb{Q}[x, y]$  の  $k-2$  次斉次多項式からなる部分空間を  $V_k$  と表す。 $Q(X, Y) \in V_k$  への  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$  の作用を以下で定め、これを群環  $\mathbb{Z}[\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})]$  に拡張しておく：

$$(Q|\gamma)(X, Y) = Q(aX + bY, cX + dY), \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}).$$

$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  の元  $S, T, \varepsilon, \delta$  を

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$  である。作用は例えば、 $(Q|\varepsilon)(X, Y) = Q(Y, X)$ 、 $(Q|\delta)(X, Y) = Q(-X, Y)$  となる。 $V_k$  の部分空間  $W_k$  を

$$W_k := \{Q \in V_k \text{ s.t. } Q|(1+S) = Q|(1+TS+(TS)^2) = 0\}$$

と定める。すると、 $S = \varepsilon\delta = \delta\varepsilon$ 、 $\varepsilon(TS)\varepsilon = (TS)^2$  より、 $Q \in W_k$  に対し、 $Q|\varepsilon = -Q|\delta \in W_k$  が確かめられる。したがって、空間  $W_k$  は  $\delta$  による固有値  $\pm 1$  の固有空間  $W_k^\pm$  に分解される：

$$W_k = W_k^+ \oplus W_k^-.$$

すなわち,  $Q \in W_k^\pm$  に対し,  $Q|\delta = \pm Q$  である。  $k$  が偶数なので,  $Q|\delta = Q$  は  $Q$  が  $x^{2i}y^{k-2i}$  たちの線形和 (偶多項式) となることを意味する。同様に  $Q|\delta = -Q$  の場合は, 奇多項式となる。  $W_{12}^\pm$  の基底は各々次で与えられる:

$$\begin{aligned} W_{12}^+ &\ni X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2, X^{10} - Y^{10}, \\ W_{12}^- &\ni 4X^9Y - 25X^7Y^3 + 42X^5Y^5 - 25X^3Y^7 + 4XY^9. \end{aligned} \quad (1)$$

尖点形式  $f \in S_k$  に対し, 偶および奇周期多項式を

$$\begin{aligned} P_f^+(X, Y) &= \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq 1: \text{odd}}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \binom{k-2}{s-1} L_f^*(s) X^{r-1} Y^{s-1}, \\ P_f^-(X, Y) &= \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq 1: \text{even}}} (-1)^{\frac{s}{2}} \binom{k-2}{s-1} L_f^*(s) X^{r-1} Y^{s-1} \end{aligned}$$

とおく。  $P_f = iP_f^+ + P_f^-$  である。例えば,  $\Delta(\tau) = q \prod_{n>0} (1 - q^n)^{24} = q - 24q^2 + \dots \in S_{12}$  に対し,

$$\begin{aligned} c^{-1}P_{\Delta}^+(X, Y) &= \frac{36}{691}(X^{10} - Y^{10}) + X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2 \end{aligned} \quad (2)$$

となるが, これは (1) より  $W_{12}^+$  の元であることがわかる。ただし,  $c$  は  $P_{\Delta}^+(X, Y)$  の  $X^2Y^8$  の係数で, 非零である (それは,  $L_{\Delta}^*(9)$  がオイラー積表示を持つことから明らかである)。一般に,  $P_f \in W_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  である。これは,  $P_f|\gamma = \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(\tau)(X - Y\tau)^{k-2} d\tau$  ( $\forall \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ) を使うと容易に確かめられる。従って,

$$P_f^+(X, Y) \in W_k^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \quad P_f^-(X, Y) \in W_k^- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \quad (3)$$

がわかる。式 (3) により,  $S_k$  から  $W_k^\pm \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  への線形写像が定義できる。これが単射 (同型写像) であるというのが Eichler-Shimura-Manin 対応である:

定理 1. (Eichler-Shimura-Manin 対応) 正の偶数  $k$  に対し, 線形写像

$$r^- : S_k \rightarrow W_k^- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \quad f \mapsto P_f^-(X, Y)$$

は同型写像となり,

$$r^+ : S_k \rightarrow W_k^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, f \mapsto P_f^+(X, Y)$$

は余次元 1 の単射となる.

定理 1 の全射性 (および余次元 1 となること) は, 次元公式

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_k^- = \dim_{\mathbb{C}} S_k, \dim_{\mathbb{Q}} W_k^+ = \dim_{\mathbb{C}} M_k \quad (4)$$

(これは不変式の計算である) と単射性から従う。単射性は  $L_f^*(s)$  ( $s = 1, 2, \dots, k-1$ ) たちが 0 ならば  $f = 0$  となることを意味する。証明は [13, Chapter V, VI] を参照されたい。

注意 1. Kohnen-Zagier [12, Section 1.2] により,  $P_{R_n}^+(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$  となる (すなわち,  $s \in \{1, 3, \dots, k-1\}$  での値  $L_{R_n}^*(s)$  が有理数になる) ような  $S_k$  の具体的な生成系  $\{R_n \in S_k \mid 0 < n < k-2 : \text{even}\}$  が知られている。 $P_f^-(X, Y)$  についても同様。

簡単にわかるように,  $X^{k-2} - Y^{k-2} \in W_k$  である。偶周期多項式の空間  $W_k^+$  は,  $W_k^+ = W_k^{+,0} \oplus \mathbb{Q}(X^{k-2} - Y^{k-2})$  と分解される。ただし,

$$W_k^{+,0} = \{Q \in V_k \cap X^2 Y^2 \mathbb{Q}[X^2, Y^2] \text{ s.t. } Q|(1 - T + T\varepsilon) = 0\}$$

である ([6, Section 5])。次元公式 (4) より,  $\dim_{\mathbb{Q}} W_k^{+,0} = \dim_{\mathbb{C}} S_k$  である例えば,

$$W_{12}^{+,0} = \mathbb{Q}((X^2 Y^8 - X^8 Y^2) - 3(X^4 Y^6 - X^6 Y^4)) \quad (5)$$

となる。以下,  $W^{+,0} = \bigoplus_{k>0} W_k^{+,0}$  とおく。空間  $W^{+,0}$  の元を制限偶周期多項式 (restricted even period polynomial) とよぶ。これは, 後ほど Ihara-Takao の関係式を述べる際に現れる。

## Gangl-Kaneko-Zagier の関係式

[28, Section 8] に示唆されるように, 尖点形式に対応して 2 重ゼータ値の線形関係式が得られる。このことから説明を始めよう。

Rankin [19]\*<sup>2</sup>による Petersson 内積に関する公式

$$(f, G_{2r}G_{k-2r}) = 2(-1)^r \pi^k \frac{L_f^*(k-1)L_f^*(k-2r)}{(2r-1)!(k-2r-1)!}$$

(ただし,  $f \in S_k$  は正規 Hecke 固有形式) と定理 1 の帰結 (すべての  $G_{2r}G_{k-2r}$  たちと直交する尖点形式は 0 しかない) として, 空間  $M_k$  が Eisenstein 級数  $G_k$  とその二つの積  $G_{2r}G_{k-2r}$  ( $2 \leq r \leq [k/4]$ ) により生成されることがわかる。さて, 尖点形式  $f \in S_k$  を  $f = \sum a_r G_{2r}G_{k-2r} + b_k G_k$  と表わそう。すると, 全ての尖点形式  $g \in S_k$  に対し  $(g, \sum a_r G_{2r}G_{k-2r}) = 0$  なので, 係数  $a_r$  は  $L_g^*(k-2r)$  たちの ( $g$  の取り方によらない) 関係式の係数として得られるはずである。一方, Fourier 展開の定数項の比較より, 関係式  $0 = \sum a_r \zeta(2r)\zeta(k-2r) + b_k \zeta(k)$  が得られる。これを調和積またはシャッフル積で展開することで,  $L_f^*(k-2r)$  たちの関係式の係数から 2 重ゼータ値の間の線形関係式が導かれる。

Gangl-Kaneko-Zagier は, これとは別の方法で, 尖点形式から得られる 2 重ゼータ値の線形関係式を具体的に与えている。彼らの結果は正規化複シャッフル関係式のみを満たす形式的な記号が張る線形空間における等式として述べられる。ここでは, 少し弱い主張となるが, 2 重ゼータ値に置き換えた主張を述べておこう。

**定理 2.** (Gangl-Kaneko-Zagier [6, Theorem 3])  $Q \in W_k^+$  に対し,  $\{q_{r,s} \in \mathbb{Q} \mid r+s=k\}$  を次のように定める:

$$Q(X+Y, X) = \sum_{r+s=k} \binom{k-2}{r-1} q_{r,s} X^{r-1} Y^{s-1}.$$

このとき,  $q_{r,s} = q_{s,r}$  ( $r, s$ : 偶数) であり,

$$3 \sum_{\substack{r+s=k \\ r \geq 1, s \geq 3: \text{odd}}} q_{r,s} \zeta(r, s) = \sum_{\substack{r+s=k \\ r, s \geq 2: \text{even}}} q_{r,s} \zeta(r, s) - \sum_{r+s=k} (-1)^{r-1} q_{r,s} \zeta(k)$$

が成り立つ。

---

\*<sup>2</sup> [12, Section 1.4] も参照

証明はさほど難しくないのだが，いろいろと道具を用意しなくてはならないので割愛する。

定理 2 の関係式は，調和積  $\zeta(r)\zeta(s) = \zeta(r, s) + \zeta(s, r) + \zeta(r + s)$  と Euler の公式  $\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$  を使って

$$\sum_{\substack{r+s=k \\ r \geq 1, s \geq 3: \text{odd}}} q_{r,s} \zeta(r, s) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}\zeta(k)}$$

と読み替えることもできる。ただし， $B_k$  は Bernoulli 数である。例えば， $X^{10} - Y^{10} \in W_{12}^+$  から

$$\zeta(1, 11) + \zeta(3, 9) + \zeta(5, 7) + \zeta(7, 5) + \zeta(9, 3) = \frac{1}{4}\zeta(12) \quad (6)$$

が得られ， $X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2 \in W_{12}^+$  から

$$28\zeta(3, 9) + 150\zeta(5, 7) + 168\zeta(7, 5) = \frac{5197}{691}\zeta(12). \quad (7)$$

が得られる。

実は，定理 2 において， $Q \in r^+(S_k)$  に制限すると，より簡潔な等式

$$\sum_{\substack{r+s=k \\ r \geq 1, s \geq 3: \text{odd}}} q_{r,s} \zeta^{\frac{1}{2}}(r, s) = 0 \quad (8)$$

が成り立つ ([16])。ただし， $\zeta^{\frac{1}{2}}(r, s) = \zeta(r, s) + \frac{1}{2}\zeta(r + s)$  である。注意 1 より，関係式 (8) の係数  $q_{r,s}$  は有理数でとれる。例えば， $\Delta(\tau) \in S_{12}$  の偶周期多項式 (3) に対し，

$$\begin{aligned} & 22680\zeta^{\frac{1}{2}}(1, 11) + 13006\zeta^{\frac{1}{2}}(3, 9) - 29145\zeta^{\frac{1}{2}}(5, 7) \\ & - 35364\zeta^{\frac{1}{2}}(7, 5) + 22680\zeta^{\frac{1}{2}}(9, 3) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

なる関係式を得る。これと (6) を合わせると，(7) が得られる。

注意 2. 上述した  $\zeta^{\frac{1}{2}}$  は Yamamoto 氏 [25] による  $t$ -多重ゼータ値の  $t = \frac{1}{2}$  の場合である。多重ゼータスター値の 2-1 公式 [26, 31] などに現れる。たとえば，Ohno-Zudilin [17] の 2-1 公式によれば， $4\zeta^{\frac{1}{2}}(2a + 1, 2b + 1) = \zeta^*(1, \{2\}_a, 1, \{2\}_b)$  である。したがって，等式 (8) は 2-1 インデックスに

関する多重ゼータスター値の等式である。2-1 インデックスの多重ゼータスター値にカスプ形式の次元だけ関係式があることを最初に観察したのは Ohno 氏である。Gangl 氏はこの観察に触発され、Zudilin 氏と研究を進めているようだ。筆者は Gangl 氏に触発され、等式 (8) の発見に至った。

**Problem 1.** 3 重以上の多重ゼータ値において、Gangl-Kaneko-Zagier の関係式の類似があるか。

**Problem 2.** [11] において、尖点形式のレベルを取り替えた場合に、対応する 2 重ゼータ値の線形関係式が研究されている。関係式 (8) をなんらかの形でレベル  $N$  の尖点形式へと拡張することができるか。

**Problem 3.** 関係式 (9) の係数は 691 を法としてすべて 123 となる。この観察は、 $S_k$  の次元が 1 の場合、次のように拡張される。正規 Hecke 固有形式  $f \in S_k$  と  $p \mid B_k$  となる素数  $p > k$  に対し、 $a_f(n) \equiv \sigma_{k-1}(n) \pmod{p}$  が成り立つ (Ramanujan 型の合同式)。このとき、関係式 (8) の係数は  $p$  を法としてすべて等しくなる。次元が 2 以上の  $S_k$  において、関係式 (8) の係数についてどのようなことが成り立つだろうか。

**Problem 4.**  $k$  が奇数のとき、Zagier 氏 [30] により  $\zeta(\text{odd}, \text{even})$  たちの間に  $W_{k-1}^- \oplus W_{k+1}^{+,0}$  個の線形関係式があることが示唆され、Ma 氏 [14, 15] によって、Gangl-Kaneko-Zagier の関係式の類似が得られている ( $\zeta^{\frac{1}{2}}$  版は [16])。  $k$  が偶数の場合は、Eisenstein 級数を用いた“尖点形式が関係式を与える直感的な説明”ができたが、奇数重さの場合はよい説明がないままである。奇数重さの場合に、尖点形式から関係式が得られるのはなぜだろうか。

## Ihara-Takao の関係式

Ihara-Takao [8] の関係式は、モチビック Lie 環  $\mathfrak{g}^m$  の生成元の深さに関する合同式として述べられる。モチビック Lie 環の基本事実をまとめて、Ihara-Takao の関係式を説明しよう。

萩原氏の稿 2.3 節において導入される Lie 代数<sup>\*3</sup>

$$\mathfrak{g}^m = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\text{Lie } U_{\text{dR}})_n$$

をモチビック Lie 環 (motivic Lie algebra) とよぶ。Lie 環  $\mathfrak{g}^m$  は、各重さ  $-n$  ( $n \geq 3$  : 奇数) に生成元をもつ次数付自由 Lie 環になるのであった。Brown 氏 [3] のモチビック多重ゼータ値における Hoffman 予想の解決 (広瀬氏の稿) により、 $\mathfrak{g}^m$  は 2 変数自由 Lie 環  $\text{Lie}[x_0, x_1]$  に埋め込めることがわかる。この埋め込みは、 $\text{Lie}[x_0, x_1]$  上に Ihara (Poisson) 括弧積

$$\{f, g\} = [f, g] + D_f(g) - D_g(f) \quad (f, g \in \text{Lie}[x_0, x_1])$$

で Lie 構造<sup>\*4</sup>を定めると、Lie 準同型であることが知られている。ただし、 $[a, b] = ab - ba$  であり、 $f \in \text{Lie}[x_0, x_1]$  に対し、 $D_f : \text{Lie}[x_0, x_1] \rightarrow \text{Lie}[x_0, x_1]$  は交換子  $[, ]$  に関する導分で、生成元  $x_0, x_1$  に対し  $D_f(x_0) = 0$ 、 $D_f(x_1) = [x_1, f]$  により定義される。以下、簡単のため、この埋め込みの像と  $\mathfrak{g}^m$  を同一視し、 $\mathfrak{g}^m$  を Lie 環  $(\text{Lie}[x_0, x_1], \{, \})$  の部分 Lie 環とみなす：

$$\mathfrak{g}^m \subset (\text{Lie}[x_0, x_1], \{, \}).$$

文字  $x_1$  の次数が  $r$  以上の元からなる  $\mathfrak{g}^m$  の部分空間を  $\mathcal{D}_r \mathfrak{g}^m$  で表す。すると、文字  $x_1$  に関する減少フィルトレーション (深さフィルトレーションの双対)

$$\mathfrak{g}^m = \mathcal{D}_1 \mathfrak{g}^m \supset \mathcal{D}_2 \mathfrak{g}^m \supset \dots$$

が生じる。Ihara 括弧積の定義から、整数  $r, s \geq 1$  に対し、 $\{\mathcal{D}_r \mathfrak{g}^m, \mathcal{D}_s \mathfrak{g}^m\} \subset \mathcal{D}_{r+s} \mathfrak{g}^m$  が成り立つことに注意しておく。

Ihara-Takao の関係式を述べる。 $\mathfrak{g}^m$  の生成元を  $\sigma_n \in \text{Lie}[x_0, x_1]$  ( $n \geq 3$  : 奇数) と書こう。 $\sigma_n \in \mathcal{D}_1 \mathfrak{g}^m$  である。以下、 $\sigma_n$  の  $x_0^{n-1} x_1$  の係数を 1 に正規化しておく。

<sup>\*3</sup> 萩原氏の稿では  $u_{\text{dR}}^{\text{gr}}$  と表記されるが、ここでは Brown 氏の予想を紹介する都合、論文 [4] の記号を採用する。

<sup>\*4</sup> 組  $(\text{Lie}[x_0, x_1], \{, \})$  が Lie 環になることを示す方法はいくつか知られる。 $\text{Lie}[x_0, x_1]$  の定義も含めて、[21, Section 1] などを参照されたい。

定理 3. (Schneps [21, Theorem 4.1])  $\{a_{n,m} \in \mathbb{Q} \mid n + m = k\}$  に対し,

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n>m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} \{\sigma_n, \sigma_m\} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m}$$

が成立する必要十分条件は

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n>m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} (X^{n-1}Y^{m-1} - X^{m-1}Y^{n-1}) \in W_k^{+,0}$$

である。

$\mathfrak{g}^m$  は自由 Lie 環なので, 例えば,  $\{\sigma_3, \sigma_9\}$  と  $\{\sigma_5, \sigma_7\}$  は  $\mathfrak{g}^m$  の重さ  $-12$  の元からなる部分空間の 1 組の基底である。(5) を思い出すと, 定理 3 より, これら基底に

$$\{\sigma_3, \sigma_9\} - 3\{\sigma_5, \sigma_7\} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m} \quad (10)$$

なる関係式が得られる。定理 3 は,  $\{\sigma_n, \sigma_m\}$  たちの  $x_1$  の次数 2 の部分を消すような線形結合 (このとき, parity theorem<sup>\*5</sup> によって,  $x_1$  の次数 3 の部分も消える) が尖点形式の次元だけ存在することを意味する。存在性は Ihara-Takao の定理 [8, II, Theorem 2] であり, 関係式の係数が制限偶周期多項式と一致することを証明したのは Schneps 氏 [21]<sup>\*6</sup> である。証明は至って初等的である。

**Problem 5.** モチビック Lie 環  $\mathfrak{g}^m$  の重さ  $-3, -5, -7, -9$  の次元は 1 なので,  $\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_9$  は正規化の条件からただ一つに定まる。例えば,  $\sigma_3 = [x_0, [x_0, x_1]] + [x_1, [x_1, x_0]]$  となることが知られている。一般に,  $\sigma_n$  を  $x_0, x_1$  で具体的に書き表すことは難しい問題である。この問題提起は [3, Problem 1] や [8, p.258]などを参照されたい。これについて, 文字  $x_1$  の次

<sup>\*5</sup> 多重ゼータ値の場合,  $k+r$  が奇数のとき, 重さ  $k$  深さ  $r$  の多重ゼータ値が深さ  $r-1$  以下の多重ゼータ値の積和でかけるという主張である。様々な文脈で証明されている ([7, Corollary 4.2],[9, Proposition 17],[4, Proposition 6.4],[24, 18] など)。

<sup>\*6</sup> 定理 3 は Ihara-Takao の定理 (+ $\alpha$ ) から導けることが Sharifi 氏により指摘されている ([21, Acknowledgement])。

数が  $d$  である  $\sigma_n$  の部分項を  $\sigma_n^{(d)}$  と書くと、正規化の条件から、

$$\sigma_n^{(1)} = \underbrace{[x_0, [x_0, \dots, [x_0, x_1] \dots]]}_{n-1} \quad (11)$$

がわかっている。また、Brown 氏 [5, Definition 5.4] は正規化複シャッフル関係式を用いることで、 $\sigma_n^{(2)}, \sigma_n^{(3)}$  の  $x_0, x_1$  での明示的な表記 (一つの選び方) を与えている。 $\sigma_n^{(d)}$  ( $d \geq 4$ ) に標準的な選び方はあるだろうか。

**Problem 6.** Ihara 氏 [8, I, (6.3)] は、次の合同式を観察している (正規化の違いがあることに注意):

$$\{\sigma_3, \sigma_9\} - 3\{\sigma_5, \sigma_7\} \equiv 0 \pmod{691}. \quad (12)$$

左辺は  $x_0, x_1$  の単項式の線形和でかけており、その係数の全てが 691 で割り切れるという主張である。合同式 (12) は、 $S_k$  の次元が 1 の場合、Problem 3 で述べた素数  $p$  (Bernoulli 数  $B_k$  の分子) に対する合同式に拡張される ([4, Example 8.4])。Ihara 氏の予想 [8, II, Conjecture 2] と関連して、 $S_k$  の次元が 2 以上の場合に、どのような合同式が得られようか。Sharifi 氏 [20] によるこの合同式の Galois 側での研究も興味深い。

## Ihara-Takao の関係式と Gangl-Kaneko-Zagier の関係式

さて、偶周期多項式を経由して、Ihara-Takao の関係式と Gangl-Kaneko-Zagier の関係式が得られることがわかった。ここでは、多重ゼータ値との関係が見える形で Ihara-Takao の関係式を言い換える。同様の言い換えは、Baumard-Schneps [1] などにも現れる。

まず、天下りに導分  $\partial_n$  を定義しよう。萩原氏の稿 2.3 節で導入されるアフィン群スキーム  $U_{dR}$  における群演算  $U_{dR} \times U_{dR} \rightarrow U_{dR}$  は、座標環  $\mathcal{O}(U_{dR}) \cong \mathcal{A} = \mathcal{H}/(\mathcal{H}_2)$  の余積  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  を誘導する\*7。ただし、 $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_k$  は萩原氏の稿 4.1 節で定義される次数付  $\mathbb{Q}$  代数であり、 $\mathbb{Q}$  線型空間として、モチビク多重ゼータ値  $\zeta^m(\mathbf{k})$  で生成される。 $\zeta^m(\mathbf{k})$  の

---

\*7 同型  $\mathcal{O}(U_{dR}) \cong \mathcal{A}$  は Brown 氏の Hoffman 予想解決の帰結である。広瀬氏の稿も参照されたい。

$\mathcal{A}$ での像を  $\zeta^a(\mathbf{k})$  で表す。余積  $\Delta$  と商の合成を  $D : \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}^2) \otimes \mathcal{A}$  とおき, 奇数  $n \geq 3$  に対し

$$\partial_n := (\zeta^a(n)^\vee \otimes \text{id}) \circ D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

と定める。ただし,  $\zeta^a(n)^\vee(\zeta^a(\mathbf{k}))$  で  $\zeta^a(\mathbf{k})$  の  $\mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}^2$  での像における  $\zeta^a(n)$  の係数とし, これを  $\mathbb{Q}$  線形に拡張したものを  $\zeta^a(n)^\vee : \mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  と書いた。たとえば,  $\zeta^m(3, 3) = \frac{1}{2}\zeta^m(3)\zeta^m(3) - \frac{1}{2}\zeta^m(6)$  であるので,  $\zeta^a(6)^\vee(\zeta^a(3, 3)) = -\frac{1}{2}$  である。ここからわかるように,  $\zeta^a(n)^\vee$  を具体的に計算するのは容易ではない。 $\mathcal{A}_k$  で重さ  $k$  の部分空間を表すと,  $\partial_n : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k-n}$  である。

導分  $\partial_n$  とモチビック Lie 環  $\mathfrak{g}^m$  の生成元  $\sigma_n$  ((11) をみたすもの) との対応を手短に述べておく。ペアリング

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle \times \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle \rightarrow \mathbb{Q}$$

を  $\varphi = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \varphi_w w^\vee \in \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$  と語  $u \in \{e_0, e_1\}^\times$  に対し,  $\langle \varphi, u \rangle = \varphi_u \in \mathbb{Q}$  で定める。 $(e_{i_1} \cdots e_{i_r})^\vee = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$  とした。このとき,  $\partial_n(u) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \langle \sigma_n \circ w^\vee, u \rangle \zeta^a(w)$  が成り立つ。ただし,  $\circ : \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$  は線形化 Ihara 作用素 ([4, Definition 2.1]) である。導分  $\partial_n$  を具体的に計算することは,  $\sigma_n$  を  $x_0, x_1$  で具体的に書き表すことと同じ (難しい) 問題である。

しかしながら, 深さの低い多重ゼータ値に対する  $\partial_n$  を計算する方法が知られており, その帰結として, 定理 3 の言い換えが得られる。

定理 4.  $\{a_{n,m} \in \mathbb{Q}\}$  に対し, 作用素

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} \partial_m \circ \partial_n : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{Q}$$

が  $\mathfrak{D}^3 \mathcal{A}_k$  において自明である必要十分条件は

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} X^{n-1} Y^{m-1} \in W_k^{+,0}$$

である。

定理 4 を応用して，制限偶周期多項式の双対として多重ゼータ値の関係式を導出しよう。今， $\mathfrak{D}^3 \mathcal{A}_k$  の  $n$  個の元  $\zeta^a(w_1), \dots, \zeta^a(w_n)$  に対し，行列  $C_k(w_1, \dots, w_n)$  を

$$\begin{pmatrix} \partial_{k-3} \circ \partial_3(\zeta^a(w_1)) & \partial_{k-5} \circ \partial_5(\zeta^a(w_1)) & \cdots & \partial_3 \circ \partial_{k-3}(\zeta^a(w_1)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_{k-3} \circ \partial_3(\zeta^a(w_n)) & \partial_{k-5} \circ \partial_5(\zeta^a(w_n)) & \cdots & \partial_3 \circ \partial_{k-3}(\zeta^a(w_n)) \end{pmatrix}$$

で定義する。この行列の右零化ベクトルのなす空間は， $W_k^{+,0}$  と同型な部分空間をもつ。一方，左零化ベクトルは， $\zeta^a(w_1), \dots, \zeta^a(w_n)$  たちの線形関係式となることが容易に証明できる（広瀬氏の稿で紹介されている方法と同じ）。

行列  $C_k(w_1, \dots, w_n)$  から得られる関係式の例を  $k = 12$  の場合に 2 つほど見てみてみよう。簡単のため， $(k_1, \dots, k_r)$  に対応する語を  $e_{k_1, \dots, k_r}$  と書く。

例 1. 正方行列

$$C_{12}(e_{3,9}, e_{5,7}, e_{7,5}, e_{9,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 6 \\ -15 & -14 & 15 & 15 \\ -27 & -42 & 42 & 28 \end{pmatrix}$$

の右零化ベクトルは  ${}^t(1, -3, 3, -1)$  の定数倍となる。一方，左零化ベクトルとして  $(28, 150, 168, 0)$  がとれるので，関係式 (7) (mod  $\mathbb{Q}\zeta(12)$ ) が得られる。[1] では，Gangl-Kaneko-Zagier の関係式と Ihara-Takao の関係式が行列  $C_k$  を介して双対関係にあることを述べている。また，[10] で述べられているように，この行列と 2 重 Eisenstein 級数との関係も興味深い。

例 2. Gangl-Kaneko-Zagier の関係式以外にも制限偶周期多項式と双対にある関係式が得られる。例えば，正方行列

$$C_{12}(e_{3,1,8}, e_{5,1,6}, e_{7,1,4}, e_{9,1,2}) = \begin{pmatrix} -\frac{75}{2} & -21 & 45 & \frac{37}{2} \\ -\frac{33}{2} & -7 & 19 & \frac{19}{2} \\ -\frac{15}{2} & 7 & 5 & \frac{1}{2} \\ -\frac{21}{2} & 21 & 3 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

の右零化ベクトルは  ${}^t(1, -3, 3, -1)$  の定数倍である。一方，左零化ベクトルから

$$14\zeta^a(3, 1, 8) + 5\zeta^a(5, 1, 6) + 14\zeta^a(7, 1, 4) = 0$$

を得る。

**Problem 7.** 例 2 であげた行列の左零化ベクトルを右零化ベクトル (制限偶周期多項式) から直接得る方法はあるだろうか。

## Broadhurst-Kreimer 予想

Broadhurst-Kreimer 予想とは，重さ  $k$ ，深さ  $r$  以下の多重ゼータ値で生成される空間  $\mathcal{D}^r \mathcal{Z}_k$  の次元予想である (予想 2 で述べる)。深さ 2 と 4 の多重ゼータ値とモジューラ形式との関係を示唆する予想となっている。予想が提唱された当初は，数値実験以外に根拠はなかったのだが，近年，新たな見解と証明の指針が得られつつある (寺杣氏の稿も参照)。ここでは，Brown 氏の論文 [4, 5] に沿った方針を紹介する。

Broadhurst-Kreimer 予想を深さ次数化多重ゼータ値代数の構造予想と結びつけて話をするために，プロトタイプとして，モチビク多重ゼータ値の  $\mathbb{Q}$  代数  $\mathcal{A} = \mathcal{H}/(\mathcal{H}_2)$  の場合の次元公式を思い出そう。同型  $(\mathcal{U}\mathfrak{g}^m)^\vee \cong \mathcal{O}(U_{dR}) \cong \mathcal{A}$  より，重さ  $k$  の空間  $\mathcal{A}_k$  の次元は

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_k x^k = \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathcal{U}\mathfrak{g}^m)_{-k} x^k = \frac{1}{1 - \sum_{i > 0} x^{2i+1}} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

となる。2 番目の等式がポイントで，モチビク Lie 環  $\mathfrak{g}^m$  が  $\sigma_n$  ( $n \geq 3$  : 奇数) で生成される自由 Lie 環であることの帰結である。

さて，深さ次数化による 2 重次数付きモチビク Lie 環 (depth-graded motivic Lie algebra)

$$\mathfrak{d}^m = \bigoplus_{r \geq 1} \mathfrak{d}_r^m = \bigoplus_{r \geq 1} (\mathcal{D}_r \mathfrak{g}^m / \mathcal{D}_{r+1} \mathfrak{g}^m)$$

を考えよう。この次数付普遍包絡環は，深さ次数化代数  $\text{gr}^{\mathcal{D}} \mathcal{A}$  の双対空間

と同型である:

$$(\mathcal{U}\mathfrak{d}^m)^\vee \cong \bigoplus_{k,r \geq 0} (\mathfrak{D}^r \mathcal{A}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{A}_k) =: \text{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}. \quad (13)$$

したがって, Lie 環  $\mathfrak{d}^m$  の生成元と関係式 (とその関係) を全て決定できれば, 先と同様の議論で  $\mathfrak{D}^r \mathcal{A}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{A}_k$  の次元が得られる。しかしながら,  $\mathfrak{d}^m$  の構造は  $\mathfrak{g}^m$  ほど単純ではない。例えば,  $\mathfrak{g}^m$  の生成元  $\sigma_n$  の  $\mathfrak{d}^m$  での像を  $\bar{\sigma}_n \in \mathfrak{d}_1^m$  と書くと, Ihara-Takao の関係式から,  $\bar{\sigma}_n$  の間に尖点形式と対応する 2 次の関係式が生じる。よって,  $\mathfrak{d}^m$  は  $\bar{\sigma}_n$  で生成される自由 Lie 環ではない。

では, どんな Lie 環であろうか。関係式 (10) を見ると,  $\{\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_m\}$  たちの間の関係式を与えると同時に,  $\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m$  の元を与えていることがわかる。すなわち,  $W^{+,0}$  から  $\mathfrak{d}_4^m$  への線形写像が得られている。  $\sigma_n \equiv \sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(2)} + \sigma_n^{(3)} \pmod{\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m}$  なので, 制限偶周期多項式  $\sum a_{n,m} X^{n-1} Y^{m-1} \in W^{+,0}$  に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{n>m} a_{n,m} \{\sigma_n, \sigma_m\} &\equiv \sum_{n>m} a_{n,m} (\{\sigma_n^{(1)}, \sigma_m^{(1)}\} + \{\sigma_n^{(1)}, \sigma_m^{(2)}\} + \{\sigma_n^{(2)}, \sigma_m^{(1)}\} \\ &\quad + \{\sigma_n^{(1)}, \sigma_m^{(3)}\} + \{\sigma_n^{(2)}, \sigma_m^{(2)}\} + \{\sigma_n^{(3)}, \sigma_m^{(1)}\}) \pmod{\mathfrak{D}_5 \mathfrak{g}^m} \end{aligned}$$

であることに注意する。定理 3 より, 右辺の最初の 3 つの項は 0 なので,

$$\begin{aligned} c: W^{+,0} &\longrightarrow \mathfrak{d}_4^m \\ \sum_{n>m} a_{n,m} X^{n-1} Y^{m-1} &\longmapsto \sum_{d=1}^3 \sum_{n>m} a_{n,m} \{\sigma_n^{(d)}, \sigma_m^{(4-d)}\} \pmod{\mathfrak{D}_5 \mathfrak{g}^m} \end{aligned}$$

により線形写像が定義される。Brown 氏による  $\sigma_n^{(d)}$  ( $d \leq 3$ ) の公式を使うと, 像は具体的に書き下せる。これが単射かはわかっていない。  $c$  を用いて, Lie 環  $\mathfrak{d}^m$  の構造が次のようになると予想されている:

予想 1. [5, Conjecture 1]

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{d}^m; \mathbb{Q}) &\cong \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{Q} \bar{\sigma}_{2i+1} \oplus c(W^{+,0}) \\ H_2(\mathfrak{d}^m; \mathbb{Q}) &\cong W^{+,0} \\ H_i(\mathfrak{d}^m; \mathbb{Q}) &= 0 \quad \text{for all } i \geq 3. \end{aligned}$$

実際, Brown 氏 [4] は予想 1 と写像  $c$  の単射性を仮定して

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathcal{U}\mathfrak{d}^m)_{-k,r} x^k y^r = \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2 - \mathbb{S}(x)y^4}$$

となることを確かめている。ただし,

$$\begin{aligned} \mathbb{O}(x) &= \frac{x^3}{1-x^2} = x^3 + x^5 + \dots, \\ \mathbb{S}(x) &= \sum_{k>0} \dim_{\mathbb{C}} S_k x^k = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)} = x^{12} + x^{16} + \dots \end{aligned}$$

である。同型 (13) より

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathfrak{D}^r \mathcal{A}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{A}_k) x^k y^r = \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2 - \mathbb{S}(x)y^4} \quad (14)$$

を得る。等式 (14) の成立が, モチビック版 Broadhurst-Kreimer 予想である。深さ  $r \leq 3$  における予想 (14) は, Goncharov 氏 [7, Theorems 2.4 and 2.5] により, Brown 氏の予想 1 を仮定することなく肯定的に解決されている。  $r \geq 4$  については, 未解決である。

多重ゼータ値版の Broadhurst-Kreimer 予想を述べておこう。

予想 2. (Broadhurst-Kreimer 予想 [2])

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim (\mathfrak{D}^r \bar{\mathcal{Z}}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \bar{\mathcal{Z}}_k) x^k y^r \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2 - \mathbb{S}(x)y^4}.$$

ただし,  $\bar{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} / \zeta(2)\mathcal{Z}$  である。

関連話題として,  $\text{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}$  のある部分空間に関する Brown 氏による次元予想を述べよう。Brown 氏は [4, Section 10] において,  $\bar{\sigma}_n \in \mathfrak{d}_1^m$  で生成される  $\mathfrak{d}^m$  の部分 Lie 環に対応すると期待される多重ゼータ値の空間

$$\mathcal{A}_{k,r}^{od} = \langle \zeta_{\mathfrak{D}}^a(k_1, \dots, k_r) \mid k_1 + \dots + k_r = k, k_i \geq 3 : \text{odd} \rangle_{\mathbb{Q}} \quad (k, r \geq 0)$$

を導入している。ただし,  $\zeta^a(w) \in \mathcal{A}$  の  $\text{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}$  での像を  $\zeta_{\mathfrak{D}}^a(w)$  とおい

た。空間  $\mathcal{A}_{k,r}^{od}$  の次元予想 (uneven part of motivic Broadhurst-Kreimer conjecture [5, Conjecture 5]) は以下である:

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_{k,r}^{od} x^k y^r \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - \mathcal{O}(x)y + \mathcal{S}(x)y^2}. \quad (15)$$

予想 (15) の右辺を  $y = 0$  で展開すると, 空間  $\mathcal{A}_{k,r}^{od}$  の生成元の関係式はある意味で尖点形式由来のものしかないといよめる。例えば,  $\mathcal{A}_{12,2}^{od}$  の関係式はモチビック版の関係式 (7) のみであり,  $\mathcal{A}_{15,3}^{od}$  は関係式 (7) に  $\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3)$  をかけて調和積で展開して得られる関係式と次の関係式のみである ([23]<sup>\*8</sup>):

$$-14\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3, 3, 9) + 15\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3, 5, 7) + 6\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3, 7, 5) + 36\zeta_{\mathfrak{D}}^a(5, 5, 5) = 0. \quad (16)$$

予想 (15) の  $r = 2$  の場合は解決されている。  $r \geq 3$  の場合は未解決である。特に,  $r = 3$  の場合は,  $\zeta(\text{odd}, \text{odd}, \text{odd})$  が  $\mathfrak{D}^3 \mathcal{Z} / \mathfrak{D}^2 \mathcal{Z}$  を生成するだろうという Broadhurst 予想の解決につながる。

**Problem 8.**  $r = 3$  の場合の予想 (15) を示せ。

**Problem 9.** 関係式 (16) と尖点形式  $\Delta(\tau)$  との間に (Gangl-Kaneko-Zagier の関係式の意味で) 関係はあるだろうか。

**Problem 10.** Brown 氏は [4] において, 制限偶周期多項式から線形複シャッフル空間  $\mathfrak{ls}$  の深さ 4 の元  $e: W^{+,0} \rightarrow \mathfrak{ls}_4$  を構成している。  $\mathfrak{ls} \cong \mathfrak{d}^m$  が予想されている。  $e$  と  $c$  の関係を明らかにせよ (写像  $e$  は単射であることがわかっている)。

**Problem 11.** 写像  $c$  が単射であることを示せ。

**Problem 12.**  $\mathfrak{d}_4^m$  の次元を求めよ。

---

<sup>\*8</sup> Gangl 氏は Zudilin 氏とともに  $\zeta_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}$  の研究から同じような現象を同時期に発見していたようである。

## 参考文献

- [1] S. Baumard, L. Schneps, *Period polynomial relations between double zeta values*, Ramanujan J. **32** (2013), no. 1, 83–100.
- [2] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393** (1997), no. 3-4, 403–412.
- [3] F. Brown, *Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$* , Ann. of Math. **175** (2012), no. 2, 949–976.
- [4] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, arXiv:1301.3053.
- [5] F. Brown, *Zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of a punctured elliptic curve*, Forum Math. Sigma **5** (2017), 1–56.
- [6] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, In: Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.
- [7] A.B. Goncharov, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of  $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$* , Duke Math. J., **110**(3) (2001), 397–487.
- [8] Y. Ihara, *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro- $p$  fundamental group of  $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$* , in Arithmetic Fundamental Groups and Noncommutative Algebra, Proc. Sympos. Pure Math. 70, Berkeley, CA, 1999, 247–273.
- [9] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.
- [10] M. Kaneko, 二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数, およびモジュラー形式, 京大数理研短期共同「多重ゼータ値の研究」報告集, (2004).
- [11] M. Kaneko, K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2*, Math. Ann. **357** (2013), no. 3, 1091–1118.
- [12] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modu-

- lar forms (Durham, 1983), Ellis Horwood (1984), 197–249.
- [13] S. Lang, *Introduction to Modular Forms*, Springer-Verlag, 1976.
  - [14] D. Ma, *Period polynomial relations between formal double zeta values of odd weight*, Math. Ann. **365** (2016), no. 1, 345–362.
  - [15] D. Ma, *Period polynomial relations of binomial coefficients and binomial realization of formal double zeta space*, Int. J. Number Theory **13** (2017), no. 3, 761–774.
  - [16] D. Ma, K. Tasaka, *Relationship between multiple zeta values of depths 2 and 3 and period polynomials*, preprint arXiv:1707.08178.
  - [17] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.
  - [18] E. Panzer, *The parity theorem for multiple polylogarithms*, J. Number Theory **172** (2017), 93–113.
  - [19] R.A. Rankin, *The scalar product of modular forms*, Proc. London Math. Soc., **2** (1952), 371–393.
  - [20] R. Sharifi, *Relationships between conjectures on the structure of pro- $p$  Galois groups unramified outside  $p$* , Proceedings Symp. in Pure Math. **70** (2002), 275–284.
  - [21] L. Schneps, *On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators*, J. Lie Theory **16**(1) (2006), 19–37.
  - [22] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, **7**, Springer-Verlag, New York, 1996.
  - [23] K. Tasaka, *On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials*, Kyushu J. Math. **70**(1) (2016), 1–28.
  - [24] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler–Zagier sums*, Acta Arith. **111** (2004), 27–42.
  - [25] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Algebra **385** (2013), 102–114.
  - [26] 山本修司, 等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式, 第 59 回代数学シンポジウム報告集 (2014), 128–135.
  - [27] D. Zagier, 保型形式論の話題から (金子昌信記), 九州大学理学部数学教室講義録刊行会, (1993).

- [28] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.
- [29] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, in Hokei-keishiki to L-kansuu no kenkyuu (= Research on Automorphic Forms and L-Functions), RIMS Kokyuroku **843** (1993), 162–170.
- [30] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$* , Ann. of Math., **175** (2012), no. 2, 977–1000.
- [31] J. Zhao, *Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta star values*, J. Math. Soc. Japan, **68**(4) (2016), 1669–1694.

# 楕円曲線の退化と深さフィルトレーション

寺杣友秀

## 目次

1. 多重ゼータ値の深さフィルトレーション	1
2. 楕円曲線の退化と基本群	2
3. $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3})$ の相対完備化	6
4. ホップ代数とバー・スペクトル系列	9
5. サンドイッチ解消とサンドイッチ・フィルトレーション	14

## 1. 多重ゼータ値の深さフィルトレーション

1.1. **Broadhurst-Kreimer** の予想.  $\mathcal{Z}$  をモチーフ的多重ゼータ値で  $\mathbf{Q}$  上生成される環とし、 $\overline{\mathcal{Z}}$  を  $\mathcal{Z}$  をモチビックゼータ値  $\zeta_M(2)$  で生成されたイデアルによる剰余環とする。このとき  $\mathcal{Z}$  にはいる重さによる次数付けは  $\overline{\mathcal{Z}}$  上の次数付けを誘導する。その次数  $N$  部分を  $\overline{\mathcal{Z}}_N$  と書く。この上に深さによるフィルトレーション  $\overline{\mathcal{Z}}_N^{\leq d}$  を考え、そのフィルトレーションにともなう次数加群を

$$\overline{\mathcal{Z}}_N^d = \overline{\mathcal{Z}}_N^{\leq d} / \overline{\mathcal{Z}}_N^{\leq d-1}$$

とおく。この次元に関しては、次の Broadhurst-Kreimer 予想がある。

$$\Phi(s, t) = \sum_{N, d} (\dim_{\mathbf{Q}} \overline{\mathcal{Z}}_N^d) s^N t^d = \frac{1}{1 - \mathbf{O}t + \mathbf{S}t^2 - \mathbf{S}t^4}$$

ここで、

$$\mathbf{O}(s) = \frac{s^3}{1 - s^2}, \quad \mathbf{S}(s) = \frac{s^{12}}{(1 - s^4)(1 - s^6)}$$

である。ここで注目すべき点は母関数  $S$  は楕円尖点形式の次元に関する母関数となっている点である。ここに現れる  $\Phi(s, t)$  を BK 母関数と呼ぶことにしよう。この報告の目的は予想されている BK 母関数をたよりにモチーフ的ガロア群にはいるであろう混合楕円モチーフからのフィルトレーションと深さフィルトレーションの関係を明らかにしようとする試みである。松本眞氏、リチャード・ハイン氏には議論を通じて様々な関連することを教えていただいたことをここで感謝いたします。また、関連する話題としてカル・ガングル・シュネプスにより、類似の組み合わせ論的なフィルトレーションの構成法がなされていることを注意しておく。

## 2. 楕円曲線の退化と基本群

2.1. 基本群の Betti 実現.  $\mathcal{M}_{1,k}$  を種数が 1 の曲線とその上の  $k$  個の点  $(E, s_1, \dots, s_k)$  のもモジュライ空間とする。ここで

$$\mathcal{M}_{1,3} \xrightarrow{f_{23}} \mathcal{M}_{1,2} \xrightarrow{f_{12}} \mathcal{M}_{1,1}$$

というモジュライの列を考えてそれらの安定コンパクト化を

$$\overline{\mathcal{M}}_{1,3} \xrightarrow{f_{23}} \overline{\mathcal{M}}_{1,2} \xrightarrow{f_{12}} \overline{\mathcal{M}}_{1,1}$$

とする。さらに  $f_{13} = f_{12} \circ f_{23}$  とする。  $\overline{\mathcal{M}}_{1,2} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{1,1}$  は普遍楕円曲線族と見ることができる。その普遍切断  $s_1$  を

$$\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \xrightarrow{s_1} \overline{\mathcal{M}}_{1,2}$$

とおく。  $\infty_1 \in \overline{\mathcal{M}}_{1,1} - \mathcal{M}_{1,1}$  とする。このとき  $f_{12}^{-1}(\infty_1)$  は結節点をもつ有理曲線  $E_\infty$  となっている。その特異点を  $\infty_2$  とおく。  $\infty_2$  の十分小さい近傍では  $f_{12}^{-1}(\infty_1)$  は二つの成分  $D_1, D_2$  をもつ因子となる。

$\overline{\mathcal{M}}_{1,3} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{1,2}$  は 2 点が印付けされた楕円曲線の普遍族で普遍切断を

$$\overline{\mathcal{M}}_{1,2} \xrightarrow{s_1, s_2} \overline{\mathcal{M}}_{1,3}$$

とおく。さらに  $f_{23}^{-1}(\infty_2)$  とすると、これは二つの有理曲線  $C_1, C_2$  を成分としてもつ安定曲線で普遍切断  $s_1, s_2$  はそれぞれ  $C_1, C_2$  の非特異なところで交わっている。

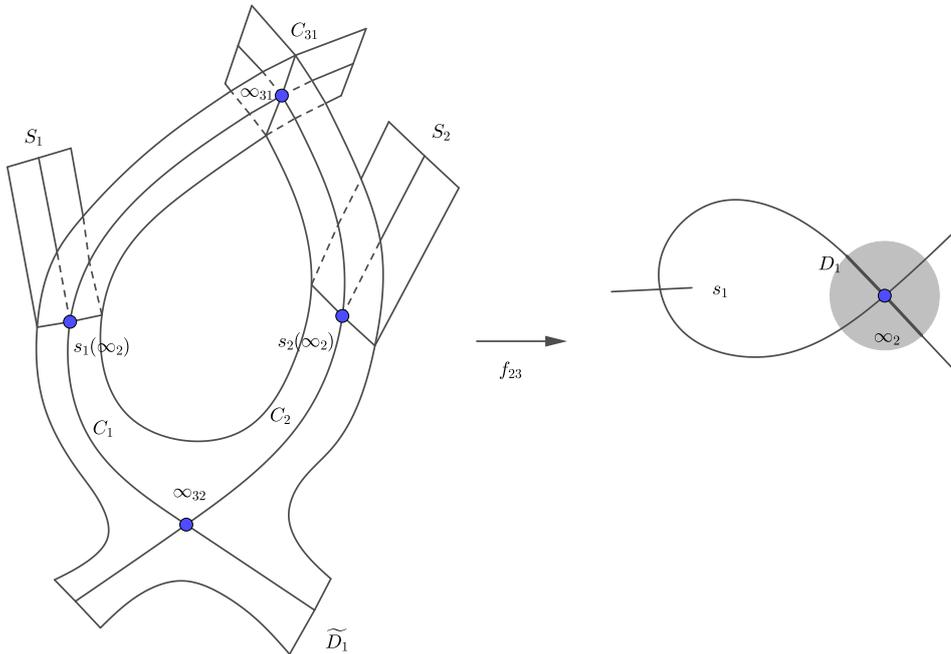


FIGURE 1.  $\widetilde{D}_1, S_1, S_2$

普遍切断と  $f_{23}^{-1}(\infty_2)$  との交点を  $s_1(\infty_2), s_2(\infty_2)$  とおく。  $\overline{\mathcal{M}}_{1,3}$  の因子  $\widetilde{D}_1$  を

$$\widetilde{D}_1 = \overline{f_{23}^{-1}(D_1 - D_2)}^0 \subset f_{31}^{-1}(\infty_1)$$

と定めると、図 1 のように、 $D_1$  上の曲線族であって曲線  $C_{31}$  にそって特異点をもつ。また、 $C_1 \cap C_2 = \{\infty_{31}, \infty_{32}\}$  とおくとこのとき  $C_{31} \cap f_{23}^{-1}(\infty_2)$  が  $\infty_{31}$  となるように番号つけておく。さらに  $D_{13}$  を  $\infty_{13}$  における  $\overline{\mathcal{M}_{1,3}}$  の  $D_{13}^* = D_{13} \cap \mathcal{M}_{1,3}$  とする。 $\overline{\mathcal{M}_{1,1}}$  の  $\infty$  における近傍  $D$  をとり  $D^* = D \cap \mathcal{M}_{1,1}$  とおく。さらに  $D_{13}^* \rightarrow D^*$  の切断  $s: D^* \rightarrow D_{13}^*$  をとる。

**命題 2.1.** 上の記号のもとで

$$\pi_1(D_{13}^*, x) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \quad \pi_1(D^*, x) \simeq \mathbf{Z}$$

となる。またという可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} D^* & \xrightarrow{s} & D_{13}^* & \xrightarrow{i_3} & \mathcal{M}_{1,3} \\ & & \pi_D \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{M}} \\ & & D^* & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{M}_{1,1} \end{array}$$

従って

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_1(D_{13}^*, x) & \leftarrow & \pi_1(D^*, x) & \xrightarrow{i_3 \circ s} & \pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, f_{13}(x)) \\ s \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{M}} \\ \pi_1(D_{13}^*, x) & \xleftarrow{\varphi} & \pi_1(D^*, x) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1(\mathcal{M}_{1,1}, f_{13}(x)) \end{array}$$

という図式ができる。

さて  $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{M}_{1,4}} \xrightarrow{f_{34}} \overline{\mathcal{M}_{1,3}}$  を考えると、これは  $\overline{\mathcal{M}_{1,3}}$  の普遍楕円曲線となっている。その普遍切断を

$$\overline{\mathcal{M}_{1,2}} \xrightarrow{s_1, s_2, s_3} \overline{\mathcal{M}_{1,3}}$$

とおく。今後とくに混乱のない限り  $s_1, s_2, s_3$  と記号を区別しないで用いることにする。 $\mathcal{M}_{1,3}$  の点  $x = (\mathcal{E}_x, s_1(x), s_2(x), s_3(x))$  に対して

$$\mathcal{U}_B = \mathbf{Q}(\pi_1(\mathcal{E}_x - \{s_1(x), s_2(x), s_3(x)\}))$$

を考えると  $x \in \mathcal{M}_{1,3}$  でパラメトライズされた局所系となっている。 $\mathcal{U}_B$  に添加イデアル (augmentation ideal) の冪によるフィルトレーション

$$(2.2) \quad E = \{E^n\}, \quad E^n = I^n$$

を考える。 $\mathcal{U}_{B,n} = \mathcal{U}_B / I^{n+1}$  とおくと有限次元となっている。 $E$  を楕円フィルトレーションという。 $\mathcal{U}^B$  の  $E$  に関する完備化を  $\widehat{\mathcal{U}}_B$  と書く。

**2.2. 基本群のド・ラム実現, 深さフィルトレーションとの関係.** ここで  $\mathbf{Q}[\pi_1(E - \{s_1\}, s_2, s_3)]$  を与える局所系の完備化  $\widehat{\mathcal{U}}_B$  のド・ラム版である有理基本群の局所系  $\widehat{\mathcal{U}}_{dR}$  を考えると、 $\infty_{31}$  の無限小に近い点  $x$  における  $\widehat{\mathcal{U}}_{dR}$  のファイバー  $\widehat{\mathcal{U}}_{dR,x}$  はつぎのように記述される。

二つの DGA  $A^{0*} = \Omega^1(C_1 - \{\infty_{31}, \infty_{32}, s_1(\infty)\})$  および  $A^{1*} = \Omega^1((C_2) - \{\infty_{31}, \infty_{32}\})$

$$A^{0*} = \langle 1, \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle_{\mathbf{Q}}, \quad A^{1*} = \langle u, r \rangle_{\mathbf{Q}},$$

を考える。ここで Tate degree をつぎのように定める。

$$\deg(1) = \deg(u) = 0, \quad \deg\left(\frac{dx}{x}\right) = \deg\left(\frac{dx}{x-1}\right) = \deg(r) = 1$$

$A^{0*}$  および  $A^{1*}$  においてそれぞれ  $1$  と  $u$  は単位元とする。さらに  $A^{0*}$  および  $A^{1*}$  の乗法は自明なものとする。微分次数環の準同型

$$\varphi_0, \varphi_\infty : A^{0*} \rightarrow A^{1*}$$

を

$$\varphi_p(1) = u, \quad \varphi_p(\omega_i) = \text{res}_p(\omega_i)r$$

として定義する。ここで  $p = 0, \infty$  で、 $\omega_0 = \frac{dx}{x}, \omega_1 = \frac{dx}{x-1}$  である。全複体

$$A^{0*} \xrightarrow{\varphi_0 - \varphi_\infty} A^{1*}$$

は次の乗法により微分次数環になる。

$$(a_0, a_1) \cdot (a'_0, a'_1) = (a_0 a'_0, \varphi_0(a_0) a'_1 + a_1 \varphi_\infty(a'_0))$$

全複体  $E^* = A^{**}$  において  $1, \omega_0, \omega_1, u, r$  は同じ記号を踏襲することにする。 $E^*$  の次数部分はそれぞれ

$$E^0 = \langle 1 \rangle, E^1 = \langle u, \omega_0, \omega_1 \rangle, E^2 = \langle r \rangle.$$

で与えられる。 $A^{**}$  における全微分は  $\delta$  と書くことにする。このとき

$$\begin{aligned} \delta 1 &= 0, du = 0, \delta \omega_0 = 0, \delta \omega_1 = r, \\ u\omega_0 &= u\omega_1 = r, \omega_0 u = -r, \omega_1 u = 0. \end{aligned}$$

が成り立つ。

**命題 2.2.**  $E_{sm}^*$  を  $E^*$  の微分次数イデアル  $\langle \omega_1, r \rangle$  による商とする。自然な部分次数環の写像を  $\pi : E^* \rightarrow E_{sm}^*$  とする。このとき  $E_{sm}^* = \langle 1, u, \omega_0 \rangle$  となる。さらに  $\pi$  は擬同型になる。

微分次数環の準同型の図式

$$A^{0*} \leftarrow E^* \rightarrow E_{sm}^*$$

を考える。これは自然な添加写像  $\epsilon : A^0 \rightarrow \mathbf{Q}$  と協調的である。したがって添加写像  $\epsilon$  に関するバー複体の準同型

$$B(A^{0*}) \leftarrow B(E^*) \rightarrow B(E_{sm}^*)$$

を得る。これらのコホモロジーを考えることにより次の図式を得る。

$$(2.3) \quad H^0(B(A^{0*})) \leftarrow H^0(B(E^*)) \xrightarrow{\cong} H^0(B(E_{sm}^*))$$

実際この写像はホップ代数の写像となることを示すことができる。これから次のような双対ホップ代数の準同型を得る。

(2.4)

$$\mathbf{Q}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle = H^0(B(A^{0*}))^* \rightarrow H^0(B(E^*))^* \xleftarrow{\cong} H^0(B(E_{sm}^*))^* = \mathbf{Q}\langle\langle u^*, \omega_0^* \rangle\rangle$$

この写像の合成を  $i_*$  と書く。

**命題 2.3.** (2.4), で定めた準同型  $i_* : \mathbf{Q}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle \rightarrow \mathbf{Q}\langle\langle u^*, \omega_0^* \rangle\rangle$  のもとで、 $i_*(\omega_1) = u\omega_0 - \omega_0 u = [u, \omega_0]$  となる。

$\mathbf{Q}\langle\langle u^*, \omega_0^* \rangle\rangle$  に導入される楕円フィルトレーションは  $\mathbf{Q}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle$  のフィルトレーションを引き起こし、このフィルトレーションの下で、

$$\text{wt}_E(\omega_0^*) = 1, \text{wt}_E(\omega_1^*) = 2.$$

となる。従って非可換単項式  $m$  に対して、

$$\text{wt}_E(m) = \text{dep}(m) + \text{wt}(m),$$

なる等号をえる。ここで  $\text{wt}(e_0^*) = \text{wt}(e_1^*) = 1$  であり、 $\text{dep}(e_0^*) = 0, \text{dep}(e_1^*) = 1$  である。

$\pi_1(D_{13}^*, x)$  の作用により  $R^1 f_{34*} \mathbf{Q}_x = H_B^1(\mathcal{E}_x^0, \mathbf{Q})$  にはモノドロミー・フィルトレーションがはいる。ド・ラム実現においてはこれは直和分解して

$$R^1 f_{dR, 34*} \mathbf{Q}_x = H_{dR}^1(\mathcal{E}_x^0, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}(-1)$$

となる。 $u \in \mathbf{Q}, e_0 \in \mathbf{Q}(-1)$  なる基底が標準的にとれて、局所モノドロミーの対数  $N = \log(u_1)$  の作用は

$$N(u) = e_0, N(e_0) = 0$$

によって与えられる。このとき

$$\widehat{\mathcal{U}}_{dR, x} = \mathbf{Q}\langle\langle u, e_0 \rangle\rangle$$

となることをこの節では説明しよう。ここで  $t$  が  $z = 1, a$  が  $z = 0, b$  が  $z = \infty$  となる座標をとったとき、 $e_0$  は  $z = 0$  における留数をとる線型写像である。

$u$  はド・ラム・ホモトピー理論における van Kampen の定理により生ずる道である。また  $N$  の作用は  $\widehat{\mathcal{U}}_{dR, x}$  に導分として延長される。ここで  $e_0 = [u, e_1] = ue_1 - e_1u$  とおくと  $N(e_1) = N(e_0) = 0$  となり  $\widehat{\mathcal{W}}_{dR, x} = \mathbf{Q}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$  は  $N$  で固定される部分環となる。これは比較定理により、 $\mathbf{Q}[\pi_1(\mathcal{E}_x^0 - \{s_1\} - \{\infty_{32}\}, s_2, s_3)]$  の像  $\widehat{\mathcal{W}}_{B_x}$  の完備化と  $\mathbf{C}$  をテンソルすると同型になる。従って下の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{W}}_{B_x} \widehat{\otimes} \mathbf{C} & \rightarrow & \widehat{\mathcal{U}}_{B_x} \widehat{\otimes} \mathbf{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{W}}_{dR, x} \widehat{\otimes} \mathbf{C} & \rightarrow & \widehat{\mathcal{U}}_{dR, x} \widehat{\otimes} \mathbf{C} \end{array}$$

**2.3. モチビック多重ゼータ値.** モチビック多重ゼータ値の深さフィルトレーションについて思い出そう。 $\mathcal{W}_B = \mathbf{Q}\langle\langle \pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}, \vec{10}) \rangle\rangle$  をその添加イデアルで完備化した  $\widehat{\mathcal{W}}_B$  については、その混合テイト・モチーフ版  $\widehat{\mathcal{W}}_M$  を定義することができる。 $\widehat{\mathcal{W}}_B$  及び  $\widehat{\mathcal{W}}_{dR}$  はそれぞれベッチ実現、ド・ラム実現となっている。また  $\widehat{\mathcal{W}}_M$  の双対  $\mathcal{H}_M(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$  も混合 Tate モチーフとなっている。従って混合テイトモチーフの  $\{B, dR\}$  をファイバー関手とする混合テイトモチーフの淡中基本群を考えるとホップ代数  $\mathcal{H}_M(MTM)$  及びその効果的部分  $\mathcal{H}_M^+(MTM)$  を考えることができる。 $\mathcal{H}_M(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$  への余作用を考えることにより、

$$\mathcal{H}_{dR}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \mathcal{H}_B(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \otimes \mathcal{H}_{B, dR}(MTM)$$

なる準同型をえる。さらに  $[0, 1] \in \widehat{\mathcal{W}}_B$  の双対写像  $\mathcal{H}_B(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \mathbf{Q}$  を考えることにより、

$$\mathbf{Q}\left\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x} \right\rangle = \mathcal{H}_{dR}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \mathcal{H}_{B,dR}(MTM)$$

なる写像が得られる。 $\mathcal{Z} = \mathcal{H}_{B,dR}(MTM)$  はモチーフ的周期環といわれる。

$\text{per}\left(\frac{dx}{x} \frac{dx}{1-x}\right) = \zeta_M(2)$  として、 $\overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/(\zeta_M(2)\mathcal{Z})$  とおき、上の準同型と自然な射影を合成することにより、

$$(2.5) \quad \text{per} : \mathbf{Q}\left\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x} \right\rangle \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}$$

なる写像が得られる。

**定義 2.4.**  $\mathbf{Q}\left\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x} \right\rangle$  には  $\frac{dx}{1-x}$  の個数により深さフィルトレーションが定義される。準同型 (2.5) により、 $\mathbf{Q}\left\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x} \right\rangle$  の深さフィルトレーションから  $\overline{D}$  の深さフィルトレーションが誘導される。

### 3. $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3})$ の相対完備化

3.1.  $GL(2)$  による相対完備化. ここで

$$\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x) \rightarrow GL_2$$

の相対完備化を考える。前節で導入した局所系  $U^B$  および楕円フィルトレーション  $\{I^n\}_n$  を考えて、その完備化  $\widehat{U}_B$  の付随する次数加群を考えると、

$$I^n/I^{n+1} \simeq V^{\otimes n}, \quad V = \mathbf{R}^1 f_{34*} \mathbf{Q}(1)$$

なる局所系としての同型が存在する。 $x$  を  $\infty_{31}$  に無限小に近い点として、局所系と基本群の表現との圏同値をもちいれば、

$$\rho_{std} : \pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{1,1}, x) \rightarrow GL(V_x)$$

なる準同型が定まる。局所系  $V^{\otimes n}$  を基本群  $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x)$  の表現としてみたとき代数群  $GL(V_x)$  の代数的な表現から誘導されている。 $\widehat{U}_B$  の  $x$  におけるファイバーを  $\widehat{U}_{B,x}$  とかき、その双対加群を  $\mathcal{H}_B(\mathcal{E}_x^0)$  と書く。誘導される楕円フィルトレーションは  $\mathcal{H}_{B,n}(\mathcal{E}_x^0)$  と書く。

相対完備化の理論により、相対ホップ代数  $\mathcal{H}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$  が相対微分次数加群

$$(3.1) \quad \Omega^*(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) = \bigoplus_{\rho \in R^+(GL(2))} \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{M}_{1,3}, \rho(V)) \otimes \rho(V_x)^*$$

の相対バー構成を用いて定義される。ここで  $R^+(GL(2))$  は  $GL(2)$  の代数的な有限次元既約表現の集合

$$R^+(GL(2)) = \{\rho = S^i(n) \mid 0 \leq i \leq n\},$$

である。ここで  $S^i = \text{Sym}^i$  は  $i$  次対称多項式表現とする。相対バー構成は、

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{M}_{1,3}, \rho(V)) \otimes \rho(V_x)^* \xrightarrow{ev \otimes id} \rho(V_x) \otimes \rho(V_x)^*$$

を (右) 添加写像として  $GL(2)$  の完備化のホップ代数が計算できるというものである。ここでは以後、後者をもちいることにし、ホップ代数を  $\mathcal{H}$  という記号を使うことにする。

上で述べたように、付随する次数加群が代数的表現となることから、 $\mathcal{H}_B(\mathcal{E}_x^0)$  相対ホップ代数  $\mathcal{H}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$  上の余加群の構造が下のように入る。

$$\mathcal{H}_B(\mathcal{E}_x^0) \rightarrow \mathcal{H}_B(\mathcal{E}_x^0) \otimes \mathcal{H}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$$

3.2. 圏の融合積と微分次数環の融合積.  $B$  を

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2 \mid x \in \mathbf{G}_m, y \in \mathbf{A}^1 \right\}$$

で定義される代数群とすると、作用  $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x) \rightarrow GL(V_x)$  は  $\pi_1(D_{13}^*, x)$  に制限するとき、 $B$  を通して作用する。 $\Pi_1 = \langle e_0, [e_0, e_1] \rangle$  とおくとこれは  $\pi_1(D^*)$  の作用で安定な部分空間となっている。従って、 $\mathcal{E}_x^0 = \mathcal{E}_x - \{s_1\}$  とおくと、次の図式をえる。

$$\begin{array}{ccc} B & \rightarrow & GL_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1(D^*) & \rightarrow & \pi_1(\mathcal{M}_{1,3}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}(\pi_1(\mathcal{E}_x^0) \supset \pi_1(\mathbf{G}_m - \{1\})) & \subset & \text{Aut}(\pi_1(\mathcal{E}_x^0)) \\ \downarrow & & \\ \text{Aut}(\pi_1(\mathbf{G}_m - \{1\})) & & \end{array}$$

このことを用いて、 $\mathcal{H}_B(\mathcal{E}_x^0)$  に  $D_{13}^*$  の基本群の作用に由来する構造を考えることにする。 $X = D^*$  および  $D_{13}^*$  に対して相対微分次数代数  $\Omega^*(X, B)$  を以下の様にして定義する。 $D^*$  のまわりの局所モノドロミーをつかって

$$0 \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \text{Kum} \rightarrow \mathbf{Q}(-1) \rightarrow 0$$

なるクンマー・トーサー Kum を考える。さらに、 $X$  上の局所系  $\mathcal{O}_B^+ = \mathcal{O}_{B,X}^+$  を

(3.2)

$$\mathcal{O}_{B,X}^+ = \bigoplus_{m \geq 0} \left( \mathbf{Q}_{D^*}(m) \otimes \text{Kum}^\infty \right) \otimes \mathbf{Q}_x(-m), \quad \text{Kum}^\infty = \varinjlim_n \text{Sym}^n(\text{Kum})$$

と定義する。さらに相対微分次数加群を  $\Omega^*(X, B) = \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{O}_B^+)$  と定義する。相対 DGA の三組

$$(3.3) \quad \mathcal{C} = \left( \Omega^*(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) \rightarrow \Omega^*(D^*, B) \leftarrow \Omega^*(D_{13}^*, B) \right)$$

を考えることができる。この全複体  $\mathcal{C}$  には再び DGA の構造が付与される。 $\mathcal{C}$  のバー複体  $B(\mathcal{C})$  の 0 次コホモロジー  $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H^0(B(\mathcal{C}))$  にはホップ代数の構造が自然に定まり、 $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  上の余加群の圏は下に定める圏  $(D_{13}^*, B) *_{(D^*, B)} (\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$  と自然に同値になる。

図式 (2.1) を考えて、 $\pi_1(D_{13}^*, x)$  の  $B$  に関する相対完備化と  $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x)$  の  $GL(2)$  相対完備化の融合積 (amalgamated product) を考える。 $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x)$  あ

るいは  $\pi_1(D_{13}^*, x)$  の表現が

$$\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x) \rightarrow GL(V_x) \text{ あるいは } \pi_1(D_{13}^*, x) \rightarrow B$$

の代数的表現を通して作用するとき代数的であるという。

次の圏  $(D_{13}^*, B) *_{(D^*, B)} (\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$  を考える。

- (1)  $(V, \rho_{GL(2)})$  は  $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x)$  の表現であり、 $(V, \rho_B)$  は  $\pi_1(D_{13}^*, x)$  である。さらに  $V$  には  $\rho_{GL(2)}, \rho_B$  で保たれるフィルトレーション  $F$  がはいる。
- (2)  $F$  に付随する次数加群を考えると  $\rho_{GL(2)}$  の表現として  $GL(2)$  の代数的表現であり、 $\rho_B$  に関しては  $\rho_{GL(2)}$  の表現として  $B$  の代数的表現である。
- (3) さらに  $F$  に付随する次数加群における上の二つの表現は  $\pi_1(D^*)$  への制限を考えると  $B$  の表現として同型となっている。

圏  $(D_{13}^*, B) *_{(D^*, B)} (\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$  は容易に淡中圏となることがわかる。相対 DGA の三組

$$\mathcal{C} = \left( \Omega^*(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) \rightarrow \Omega^*(D^*, B) \leftarrow \Omega^*(D_{13}^*, B) \right)$$

を考えると、これには再び DGA の構造が付与される。 $\mathcal{C}$  のバー複体  $B(\mathcal{C})$  の 0 次コホモロジー  $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H^0(B(\mathcal{C}))$  にはホップ代数の構造が自然に定まり、 $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  上の余加群の圏は圏  $(D_{13}^*, B) *_{(D^*, B)} (\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$  と自然に同値になる。

$\mathcal{U}_n^B$  に下の性質を満たすモノドロミー・フィルトレーション  $M$  が定義される。

**命題 3.1.**  $D_{13}^*$  上では  $Gr_M \mathcal{U}_n^B$  にはモノドロミーは自明に作用する。とくに  $\mathcal{U}_n^B$  は  $D_{13}^*$  上では副冪零な局所系である。

3.3. 融合積の計算. さて、

$$K = (\Omega^*(D_{13}^*, \mathcal{O}_B) \rightarrow \Omega^*(D^*, \mathcal{O}_B))$$

とおく。このとき、

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \Omega^*(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) \rightarrow 0$$

なる完全系列がえられる。ここで  $\mathcal{C}'$  は

$$\mathcal{C}' = \left( \Omega^*(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) \rightarrow \Omega^*(D^*, B) \leftarrow \Omega^*(D^*, B) \right)$$

の全複体である。 $\mathcal{C}'$  には  $\mathcal{C}$  と同様にして DGA の構造がはいる、 $K$  は  $\mathcal{C}$  の DG イデアルである。同様の構成は  $\mathcal{M}_{1,1}$  についても構成される。

**命題 3.2.** (1) 次の二つのスペクトル系列が存在する。

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr_{F_K}^p(B(\mathcal{C}))) \Rightarrow E_\infty^{p+q} = H^{p+q}(B(\mathcal{C}))$$

$$\begin{aligned} {}'E_1^{-p,*+p} &= H^*(B(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))) \otimes (H^*(K) \otimes H^*(B(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))))^{\otimes p} \\ &\Rightarrow {}'E_\infty^* = H^*(Gr_{F_K}^r(B(\mathcal{C}))) \end{aligned}$$

(2)

$$H^0(G_{\mathbf{Q}}, H^1(K \otimes \overline{\mathbf{Q}})) = \bigoplus_{m \geq 1} \gamma_m \mathbf{Q}_x(-m)$$

証明. これは

$$H^*(B(\mathcal{C}')) = H^*(B(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)))$$

なる同型とサンドイッチ解消 (5章参照) を用いて示される。□

$\mathcal{M}_{1,1}$  に関しても同様の構成法ができる。 $\mathcal{M}_{1,1}$  に関して構成したものを  $\bar{\mathcal{C}}$ ,  $\bar{\mathcal{C}}', \bar{K}(=K)$  と書くことにする。このとき次の命題が成り立つ。

**命題 3.3.** (1) 次の二つのスペクトル系列が存在する。

$$F_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr_{F_K}^p(B(\bar{\mathcal{C}})) \Rightarrow F_\infty^{p+q} = H^{p+q}(B(\bar{\mathcal{C}}))$$

$$\begin{aligned} {}'F_1^{-p,*+p} &= H^*(B(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))) \otimes (H^*(\bar{K}) \otimes H^*(B(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))))^{\otimes p} \\ &\Rightarrow {}'F_\infty^* = H^*(Gr_{F_K}^r(B(\bar{\mathcal{C}}))) \end{aligned}$$

(2) 上のスペクトル系列  $E$  と  $F$  あるいは  $'E$  と  $'F$  についてスペクトル系列の写像

$$F \rightarrow E, {}'F \rightarrow {}'E$$

がある。特に  $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H^0(B(\mathcal{C}))$ ,  $\mathcal{H}(\bar{\mathcal{C}}) = H^0(B(\bar{\mathcal{C}}))$  とおくと

$$\mathcal{H}(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{C})$$

なるホップ代数の準同型が存在する。

3.4. 比較定理と多重ゼータ値の正規化. ここで多重ゼータ値の正規化について述べよう。下の比較同型について考える。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{U}}_B(\mathbf{G}_m - \{0\}) & \xrightarrow{i_*^B} & \widehat{\mathcal{U}}_B(\mathcal{E}^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C}\langle\langle\omega_0^*, \omega_1^*\rangle\rangle & \xrightarrow{i_*^{dR}} & \mathbf{C}\langle\langle u^*, \omega_0^*\rangle\rangle \end{array}$$

この水平方向の写像は二つのフィルトレーション  $E$  及び  $M$  について厳密協調的 (strictly compatible) になっている。従って、単射性を保ち、

$$\widehat{\mathcal{U}}_B(\mathcal{E}^0)/E_k \widehat{\mathcal{U}}_B(\mathcal{E}^0) \rightarrow \mathbf{C}\langle\langle\omega_0^*, \omega_1^*\rangle\rangle/E_k \mathbf{C}\langle\langle\omega_0^*, \omega_1^*\rangle\rangle$$

なる写像は単射である。さらに、 $i_*^B$  は双対ホップ代数の写像にもなっているので、 $\nabla_P(g) = g \otimes g$  であれば、 $\nabla_E(i_*^B(g)) = i_*^B(g) \otimes i_*^B(g)$  が成り立つ。次の定理が成り立つ。

**命題 3.4.**  $\Phi_k(\omega_0^*, \omega_1^*)$  を  $\mathbf{C}\langle\langle\omega_0^*, \omega_1^*\rangle\rangle/E_k \mathbf{C}\langle\langle\omega_0^*, \omega_1^*\rangle\rangle$  における群元的元とすると、0 で始まり 1 で終わる語  $I$  に対応する単項式  $\omega_I^*$  の係数で  $\Phi_k(\omega_0^*, \omega_1^*)$  のすべての係数は書ける。

#### 4. ホップ代数とバー・スペクトル系列

ハイン-松本によって導入された相対完備化およびハインの相対バー複体に関するバー・スペクトル系列を考える。

4.1. 余加群  $\mathcal{H}(\mathcal{E}^0)$  と楕円フィルトレーション.  $GL_2$  における正の規約表現の集合を定義した。ここでは次数が  $n$  以下のバー複体の部分複体を定義する。 $GL(2)$  に関して、楕円次数が  $k$  以下の正の既約表現の集合を

$$R_k^+(GL(2)) = \{S^i(n) \mid 0 \leq i \leq n, 2n - i \leq k\}$$

と定義する。(3.1) の定義における直和和を  $R_k^+(GL(2))$  でとることにより、微分次数加群  $\Omega(\mathcal{M}_{13}, GL(2))$  上に楕円フィルトレーション  $E$  を入れる。

また  $O_{B,X}^+$  の定義 (3.2) に現われる直和の添え字  $m$  が  $2m \leq k$  となるもの制限することにより、 $\Omega(X, B)$  に楕円フィルトレーションが導入される。特に命題 3.2 (2) に現れる  $\gamma_m$  は楕円フィルトレーションが  $2m$  の部分に含まれる。

$\Omega(\mathcal{M}_{13}, GL(2))$ ,  $\Omega(X, B)$  におけるそれぞれの楕円フィルトレーションは協調的であるので、(3.3) で定義された微分次数加群  $\mathcal{C}$  にも楕円フィルトレーションが導入される。

$\Omega(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ ,  $\Omega(X, B)$  および  $\mathcal{C}$  のに楕円フィルトレーションからそのバー・複体  $B(\Omega(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)))$ ,  $B(\Omega(X, B))$  および  $B(\mathcal{C})$  にも楕円フィルトレーションが定まりそこからホップ代数  $\mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ ,  $\mathcal{H}(X, D^*)$  にも楕円フィルトレーションが定まる。 $k$  次以下の部分を  $\mathcal{H}_k(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ ,  $\mathcal{H}_k(X, D^*)$  と書く。自然な写像

$$\mathcal{M}_{1,3} \rightarrow \mathcal{M}_{1,1}$$

から下の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n(\mathcal{M}_{1,1}, GL_2) & \rightarrow & \mathcal{H}_n(\mathcal{M}_{1,3}, GL_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL_2) & \rightarrow & \mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,3}, GL_2) \end{array}$$

4.2. 余作用と楕円フィルトレーション、および道による評価. (2.2) で導入された  $\mathcal{H}(\mathcal{E}_x^0)$  上の楕円フィルトレーションと前節で導入された  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  上の楕円フィルトレーションは余作用に関する協調性は下の図式で与えられる。

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n(\mathcal{E}_x^0) & \rightarrow & \bigoplus_{a+b=n} \mathcal{H}_a(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{H}_b(\mathcal{E}_x^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_n(\mathcal{E}_x^0) & \rightarrow & \bigoplus_{a+b=n} \mathcal{H}(D_{13}^*, \mathcal{O}_B) \otimes \mathcal{H}_b(\mathcal{E}_x^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_n(\mathbf{G}_m - \{1\}) & \rightarrow & \bigoplus_{a+b=n} \mathcal{H}(D^*, \mathcal{O}_B) \otimes \mathcal{H}_b(\mathbf{G}_m - \{1\}) \end{array}$$

多重ゼータ値と算術的ホップ代数の関係を述べるためには標準道  $[0, 1]$  における評価が必要であった。これを混合楕円モチーフのレベルにおいても考えることにする。標準道で評価することにより、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n(\mathcal{E}_x^0) & \rightarrow & \mathcal{H}_n(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_n(\mathbf{G}_m - \{1\}) & \rightarrow & \mathcal{H}(D^*, \mathcal{O}_B) = D \\ & & \downarrow \\ & & \underline{D} \end{array}$$

4.3. バー・スペクトル系列とアイヒラー・志村同型、制限写像. ここでは簡単のため、 $\mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))$  のバー・スペクトル系列について考える。 $\mathcal{M}_{1,3}$  についてもほぼ同様に計算できるが、少し複雑になる。バー・スペクトル系列は

$$(4.2) \quad E_1^{p,q} = \left[ (H^*(\Omega^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))))^{\otimes -p} \right]^q \\ \Rightarrow E_\infty^{p+q} = H^{p+q}(B(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2)))$$

となり、

$$H^*(\Omega^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))) = \bigoplus_{\rho \in R^+(GL(2))} H^*(\mathcal{M}_{1,1}, \rho(V)) \otimes \rho(V_x)^*$$

となる。もう少し詳しく、

補題 4.1. (1)

$$(4.3) \quad H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^i(V)(j)) = \begin{cases} e_{2m+2} \mathbf{Q} & (i, j) = (2m, 2m+1) \\ 0 & (i, j) \neq (2m, 2m+1) \end{cases}$$

(2) ドリーニュ・コホモロジーに関して

$$H_D^2(\mathcal{M}_{1,2}, S^{2m}(V)(2m+2)) \simeq S_{2m+2}$$

ここで  $S_k$  は重さが  $k$  の楕円尖点形式の空間である。

以下次の予想を仮定する。

予想 4.2. エタール・コホモロジーに関して自然な同型

$$H_{et}^2(\mathcal{M}_{1,2}, S^{2m}(V)(2m+2) \otimes \mathbf{Q}_l) \simeq S_{2m+2} \otimes \mathbf{Q}_l$$

が存在する。また楕円モチーフについても同じ形の余関係式が存在する。

この予想を仮定すると  $E_1$  微分は実質的には下の写像の和になっていて、 $E_1$  項において楕円フィルトレーションは次数付けになっている。

$$\begin{aligned} & [H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^i(n)) \otimes S^{i*}(-n)] \otimes [H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^j(m)) \otimes S^{j*}(-m)] \\ & [H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^i(n)) \otimes H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^j(m))] \otimes [S^{i*}(-n) \otimes S^{j*}(-m)] \\ & [H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^i(n)) \otimes H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^j(m))] \otimes [S^{i+j-2k*}(-n-m+k)] \\ & \rightarrow H^2(\mathcal{M}_{1,1}, S^{i+j-2k}(n+m-k)) \otimes S^{i+j-2k*}(-n-m+k) \end{aligned}$$

どのような関係式が出てくるかはレギュレータが尖点形式の  $L$  関数の特殊値をつかって表示できることから具体的な予想がたてられている。

4.4. 制限写像と接基点. 制限写像

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2)) \rightarrow \mathcal{H}(D^*, B)$$

によって  $E_1$  項の写像

$$(4.4) \quad H^*(\mathcal{M}_{1,1}, S^i(V)(j)) \otimes (S^i(V_x)(j))^* \rightarrow H^*(D^*, \text{Kum}^\infty \otimes \mathbf{Q}(j)) \otimes \mathbf{Q}(-j)$$

が誘導される。これは可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(G_{\overline{\mathbf{Q}}}, H^0(\overline{\mathcal{M}}_{1,1}, S^{2m}(2m+1))) & \rightarrow & H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^i(2m+1)) & \xrightarrow{\cong} & H^0(G_{\overline{\mathbf{Q}}}, H^1(\overline{\mathcal{M}}_{1,1}, S^{2m}(2m+1))) \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(G_{\overline{\mathbf{Q}}}, H^0(\overline{D}^*, \text{Kum}^\infty(2m+1))) & \xrightarrow{\cong} & H^1(D^*, \text{Kum}^\infty(2m+1)) & \rightarrow & H^0(G_{\overline{\mathbf{Q}}}, H^1(\overline{D}^*, \text{Kum}^\infty(2m+1))) \\
\parallel & & & & \parallel \\
H^1(G_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}(2m+1)) & & & & 0
\end{array}$$

により得られる写像

$$\begin{aligned}
(4.5) \quad H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2m}(V)(2m+1)) &\rightarrow H^1(D^*, \mathbf{Q}(2m+1) \otimes \text{Kum}^\infty) \\
&= H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}), \mathbf{Q}(2m+1))
\end{aligned}$$

と射影

$$(S^i(V_x)(j))^* = \bigoplus_{k=0}^i \mathbf{Q}(k-j) \rightarrow \mathbf{Q}(-j)$$

を組合せてえられるものと一致する。

**命題 4.3.** 同型 (4.3) であたえられた生成元  $e_{2m+2}$  は写像 (4.5) によってスーレ元  $c_{2m+1}$  に写像される。

このことから、 $H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^i)(j)$  で消えない部分 (命題 4.1) とおよび  $SL(2)$  の表現のテンソル積の分解公式および射影を取る操作で生き残る部分、を考えると、 $E_1$  項のコホモロジー ( $E_2$  項) の (4.4) による像は微分次数環

$$\begin{aligned}
H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B : \bigoplus_{m \geq 0} H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2m}(2m+1)) \otimes \mathbf{Q}(-2m-1) \\
\rightarrow \bigoplus_{m \geq 0} H^2(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2m}(2m+2)) \otimes \mathbf{Q}(-2m-2)
\end{aligned}$$

のバー複体  $B(H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B)$  と一致する。

バー複体  $B(H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B)$  における微分は楕円フィルトレーションが次数付けになるような次数付けを導入することができる。さらにこれは  $t$  フィルトレーションに関する形式変数を  $s$ 、楕円次数に関する形式変数を  $u$  として 2 重次数に関するベクトル空間  $V$  の母関数  $ch(V)$  を考える。すなわち

$$\deg_t(c_{2i+1}) = 2i+1, \quad \deg_t(e_{2i+2}) = 2i+1$$

と考える。すなわち、予想 4.2 を仮定すると、

$$\begin{aligned}
ch(H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2i}(2i+1))) &= s^{2i+1}u^{2i+2} \quad (i=1, 2, \dots) \\
ch(H^2(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2i}(2i+2))) &= \mathcal{S}_{2i+2}s^{2i+2}u^{2i+4} \quad (i=1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathcal{S}_{2i+2} = \dim S_{2i+2}$  である。

**定義 4.4.**  $i \neq 0$  に対して  $H^i(B(K)) = 0$  が成り立つとき、DGA  $K$  は  $K\pi_1$  性をもつという。

**予想 4.5.**  $H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B$  は  $K\pi_1$  性をもつ。

**命題 4.6.** 予想 4.2 を仮定する。

(1)

$$\begin{aligned}
& ch(H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B) \\
&= \sum_{i \geq 1} ch(H^1(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2i}(2i+1))^B) - \sum_{i \geq 1} ch(H^2(\mathcal{M}_{1,1}, S^{2i}(2i+2))^B) \\
&= \frac{s^3 u^4}{1-s^2 u^2} - \frac{s^{12} u^{14}}{(1-s^4 u^4)(1-s^6 u^6)} \\
&= \mathbf{O}(su)u - \mathbf{S}(su)u^2
\end{aligned}$$

(2)

$$ch(B(H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B)) = \frac{1}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2}$$

(3) さらに  $H^*(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B$  の  $K\pi_1$  性を仮定すると、

$$ch(\mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B) = \frac{1}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2}$$

となる。

次に命題 3.2 に現れるスペクトル系列での  $H(K)$  についても楕円フィルトレーションと協調的なフィルトレーションを導入する。とくに  $\gamma_m$  は楕円次数が  $2m$  となる。ここで  $H^1(K)$  の部分商である  $\gamma_1 \mathbf{Q}$  を考えると

$$ch(\gamma_1 \mathbf{Q}) = s^0 u^2$$

命題 3.3(1) におけるスペクトル系列の  $E_1$  項に

$$'F_1^{-p, *+p} = \mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2)) \otimes (H^*(K) \otimes \mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2)))^{\otimes p}$$

において

- (1)  $\mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))$  を  $\mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B$  で
- (2)  $H^*(K)$  を  $\gamma_1 \mathbf{Q}$  で

置き換えたもの

$$\tilde{F}_1^{-p, *+p} = \mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B \otimes (\gamma_1 \mathbf{Q} \otimes \mathcal{H}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B)^{\otimes p}$$

を考える。さらに

$$\varphi : \tilde{F}_1^{-p, *+p} \rightarrow \mathbf{Q}\langle c_3, c_5, \dots \rangle$$

を  $B(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B$  上では (4.5) の写像を  $H^1(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B$  の自由テンソル代数にまで延長したもので、 $\varphi(\gamma_1) = 1$  なる写像として定義する。

命題 4.7. 命題 4.6 の仮定のもとで、

$$G_p = \text{Im}(\varphi : \tilde{F}_1^{-p, *+p})$$

は  $\mathbf{Q}\langle c_3, c_5, \dots \rangle$  の中の増加フィルトレーションを与える。

予想 4.8. 図式 (4.1) で定義された写像

$$\mathcal{H}_n(\mathcal{E}_x^0) \rightarrow \mathcal{H}(D_{13}^*, \mathcal{O}_B)$$

と、ある接基点による引き戻し写像

$$\mathcal{H}(D_{13}^*, \mathcal{O}_B) \rightarrow \mathbf{Q}\langle c_3, c_5, \dots \rangle$$

の合成から得られる写像を考える。 $\mathcal{H}_n(E^0)$  の楕円フィルトレーションから誘導されるフィルトレーションと  $G_p$  により定義されるフィルトレーションは一致する。

$t$ -次数と  $e$ -次数の関係を見ると、 $\tilde{F}_1^{-p, *+p}$  が楕円フィルトレーションに寄与すると考えられる。 $p$  に関して増加フィルトレーションになるが、 $p$  を固定したときにモチーフ的ガロア群への写像は単射ではない。フィルトレーション像に付随する次数加群の次元を計算するには次章のサンドイッチ解消を用いることで計算できる。

## 5. サンドイッチ解消とサンドイッチ・フィルトレーション

5.1. サンドイッチ解消.  $V$  をベクトル空間  $H$  を部分空間として、商空間  $V/H$  の自由テンソル代数に関するサンドイッチ解消を定義する。 $V$  をベクトル空間とすると、

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$$

を自由テンソル代数とする。自由テンソル代数は自然な仕方で積” $\cdot$ ” が定義される。 $V$  をベクトル空間  $H$  を  $V$  の部分空間とする。 $L_i = T(V) \otimes (H \otimes T(V))^{\otimes i}$  ( $i$  はサンドイッチの中身の数である。) さらに

$$d: L_n \rightarrow L_{n-1}:$$

$$a_0 \otimes \bigotimes_{k=1}^n (b_k \otimes a_k) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \bigotimes_{k=1}^i (a_{k-1} \otimes b_k) \otimes (a_i \cdot b_{i+1} \cdot a_{i+1}) \otimes \bigotimes_{k=i+1}^n (b_k \otimes a_k)$$

**命題 5.1.** このとき次は完全列となる。

$$Sw(V, H) : \cdots \xrightarrow{d} L_n \xrightarrow{d} L_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} L_0 \rightarrow T(V/H) \rightarrow 0$$

言い換えれば、 $L_\bullet$  は  $T(V/H)$  の両側自由  $T(V)$  分解になる。複体  $Sw(V, H)$  を  $T(V/H)$  の  $T(V)$  加群としてサンドイッチ解消という。

実際  $V$  の完備化  $K$  環の中  $T(V/H)$  の指標と  $L_\bullet$  の指標が一致することを確かめてみよう。 $V$  の指標を  $\chi(V)$  と書く。 $T(V/H)$  の指標の方は

$$\chi(T(V/H)) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(V/H)^n = \frac{1}{1 - \chi(V) + \chi(H)}$$

である。他方、

$$\begin{aligned} \chi(L_\bullet) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \chi(T(V))^{i+1} \chi(H)^i \\ &= \frac{1}{1 - \chi(V)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left( \frac{\chi(H)}{1 - \chi(V)} \right)^i = \frac{1}{1 - \chi(V) + \chi(H)} \end{aligned}$$

となり、二つの指標は一致する。

次に DGA と DG イデアルについて考える。 $\tilde{K} = K^1 \oplus K^2$  を次数付きベクトル空間で次数を保つ積

$$\cup: K \otimes K \rightarrow K$$

が与えられているとする。これは実質的には  $K^1 \otimes K^1 \rightarrow K^2$  という写像が与えられていることに他ならない。このとき  $\mathbf{Q} \oplus \tilde{K}$  を考えて、ここに境界作用素が 0 であると定義すれば、 $K$  には結合的な DGA の構造が自然に導入される。 $B(K)$  を被約バー複体

$$B(K) = \mathbf{Q} \oplus \tilde{K} \oplus \tilde{K}^{\otimes 2} \oplus \tilde{K}^{\otimes 3} \oplus \dots$$

とする。 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$  に対して全次数  $\deg_t(\mathbf{i})$  とバー次数  $\deg_b(\mathbf{i})$  を

$$(5.1) \quad \deg_t(\mathbf{i}) = i_1 + \dots + i_n, \deg_b(\mathbf{i}) = i_1 + \dots + i_n - n$$

によって定義する。このとき、

$$\deg_b(\mathbf{i}) = \#\{1 \leq j \leq n \mid i_j = 2\}.$$

となることを注意しよう。 $\star = t, b$  として、 $B(K)$  の部分空間  $K^{i_1} \otimes \dots \otimes K^{i_n}$  の  $\star$  次数を  $\deg_\star((i_1, \dots, i_n))$  として定義する。上の形のテンソル積で  $\star$  次数が  $d$  の部分の直和を  $\star$  次数が  $d$  の部分空間という。バー微分  $d: \tilde{K}^{\otimes n} \rightarrow \tilde{K}^{\otimes(n-1)}$  を

$$(5.2) \quad d(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_1 \otimes \dots \otimes (a_i \cup a_{i+1}) \otimes \dots \otimes a_n$$

と定義する。バー次数が  $i$  の部分を  $B(K)^i$  と書くと、 $d$  は複体

$$0 \rightarrow B(K)^0 \xrightarrow{d} B(K)^1 \xrightarrow{d} B(K)^2 \dots$$

を定める。とくに

$$B(K)^0 = \mathbf{Q} \oplus K^1 \oplus (K^1)^{\otimes 2} \oplus (K^1)^{\otimes 3} \oplus \dots$$

となっているので、 $B(K)^0$  は  $\mathbf{Q} \oplus K^1$  の被約バー複体とみることができる。 $B(K)$  の元  $a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n$  は  $[a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n]$  と書かれる。

**補題 5.2.** 次のように定義される結合写像  $\kappa: B(K) \otimes K^2 \otimes B(K) \rightarrow B(K)$  は複体の写像である。

$$\tilde{K}^{\otimes i} \otimes K^2 \otimes \tilde{K}^{\otimes j} \rightarrow \tilde{K}^{\otimes(i+j+1)}$$

$$[a_1 \mid \dots \mid a_i] \otimes b \otimes [c_1 \mid \dots \mid c_j] \mapsto [a_1 \mid \dots \mid a_i \mid b \mid c_1 \mid \dots \mid c_j]$$

とくに写像

$$\begin{array}{ccccc} L_{i+1} = & B(K) \otimes \dots \otimes & (B(K) \otimes K^2 \otimes B(K)) & \otimes \dots \otimes & B(K) \\ \partial_p \downarrow & & \kappa \downarrow & & \\ L_i = & B(K) \otimes \dots \otimes & B(K) & \otimes \dots \otimes & B(K) \end{array}$$

は複体の写像である。

**証明.**  $\deg(a_i), \deg(c_1)$  は 1 または 2 であるとしてよく、その時は  $a_i \cup b = b \cup c_1 = 0$  となることから符号に気をつけて補題を得る。  $\square$

$$\partial = \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} \partial_j : \partial : L_{i+1} \rightarrow L_i$$

とおくことによりサンドイッチ解消  $L^\bullet = Sw(\tilde{K}, K^2)$  は上の補題 5.2 により二重複体となり、

$$Sw(\tilde{K}, K^2) \rightarrow B(K^1)$$

は擬同型になる。

従って次の定理を得る。

**命題 5.3.** 上の記法の下で、

$$H^0(Sw(\tilde{K}, K^2)) \simeq H^0(B(K^1))$$

**定義 5.4.** 二重複体  $L_\bullet$  のフィルトレーションを

$$\phi_i : F_i L_* = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow L_i \rightarrow \cdots \rightarrow L_0)$$

によって定義する。このフィルトレーションにより誘導される  $B(K^1)$  上のフィルトレーションを  $F_i B(K^1)$  と書く。

上のフィルトレーションによるスペクトル系列

$$E_1^{-i,j} = H^j(L_i) \Rightarrow H^{i+j}(B(K^1))$$

を考える。

**命題 5.5.**  $K$  が  $K\pi_1$  性をもつとする。このとき

$$E_1^{-i,j} = \begin{cases} 0 & (\text{if } i \neq j) \\ H^0(B(K)) \otimes (K^2 \otimes H^0(B(K)))^{\otimes i} & (\text{if } i = j) \end{cases}$$

となる。とくに上のスペクトル系列は  $E_1$  で退化する。従って

$$Gr_i^F B(K^1) \simeq H^0(B(K)) \otimes (K^2 \otimes H^0(B(K)))^{\otimes i}$$

となる。

5.2. サンドイッチ・フィルトレーション. この章では  $K$  が  $K\pi_1$  性をもっているとする。埋め込み  $H^0(B(K)) \subset B(K)^0 = B(K^1)$  を考える。結合写像を

$$\mu_i : \underbrace{B(K^1) \otimes B(K^1) \otimes \cdots \otimes B(K^1)}_{i+1} \rightarrow B(K^1).$$

と定義する。写像  $\mu_i$  による  $H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} = H^0(B(K)) \otimes H^0(B(K)) \otimes \cdots \otimes H^0(B(K))$  の像を  $F_i^* B(K^1)$  と書く。 $\mathbf{Q} \subset H^0(B(K))$  なので、 $F_i^* B(K^1) \subset F_{i+1}^* B(K^1)$  となる。この章では下の定理を証明する。

**定理 5.6.**  $K$  に関する  $K\pi_1$  性の仮定の下で、

$$F_i^* B(K^1) = F_i B(K^1).$$

となる。

第一段 まず、 $F_i^*B(K^1) \subset F_iB(K^1)$  を示す。そのために

$$H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} \rightarrow \text{tot}(F_iL_*)$$

という複体の写像を定義する。そのために記号の準備をする。

$$a = [a_1 \mid \cdots \mid a_n], b = [b_1 \mid \cdots \mid b_m] \in B(K)$$

に対して最外成分の結合操作  $a\bar{\otimes}b \in B(K) \otimes K^2 \otimes B(K)$  を

$$a\bar{\otimes}b = [a_1 \mid \cdots \mid a_{n-1}] \otimes (a_n \cup b_1) \otimes [b_2 \mid \cdots \mid b_m]$$

と定義する。 $n = 0$  または  $m = 0$  のときは  $0$  である。

まず、 $H^0(B(K))^{\otimes(i+1)}$  に現れる  $i$  個のテンソル記号に番号を付けて  $1, \dots, i$  とおく。一般に  $p \leq i$  and  $J \subset \{1, \dots, i\}$ ,  $\#J = p$  となる  $J$  に対して挟まれてあるテンソル記号の  $J$  に属するところだけ上の最外成分の結合操作を施すことにより、

$$\alpha_{i,p,J} : H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} \rightarrow L_p^p$$

という写像が定義される。さらに

$$\alpha_{i,p} = \sum_{J \subset \{1, \dots, i\}} \alpha_{i,p,J}.$$

とおくことにより

$$\alpha_{i,0} : H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} \rightarrow L_0^0 = B(K^1)$$

なる写像が定義される。 $p = 0$  のときは  $\mu_i$  にほかならない。

**補題 5.7.**  $p + 1 \leq i$  なら下は可換図式である。

$$\begin{array}{ccc} H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_{ip}} & L_p^p \\ \alpha_{i,p+1} \downarrow & & \downarrow d \\ L_{p+1}^{p+1} & \xrightarrow{\partial} & L_p^{p+1} \end{array}$$

この補題により  $\phi_i : H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} \rightarrow \text{tot}(F_iL_*)$  が

$$\phi_i(x) = \sum_{p=0}^i \alpha_{ip}$$

により定義される。従って

$$\begin{aligned} & H^0(B(K))^{\otimes(i+1)} \xrightarrow{\phi_i} H^0(\text{tot}(F_iL_*)) \\ & \rightarrow F_iH^0(\text{tot}(L_*)) = F_iH^0(B(K^1)) = F_iB(K^1) \end{aligned}$$

という写像が得られるが、この写像は  $\alpha_{i0}$  に他ならないので  $F_i^*B(K^1) \subset F_iB(K^1)$  となる。

第二段 次に合成写像

$$\begin{aligned} & H^0(B(K)) \otimes H^0(B(K)) \otimes \cdots \otimes H^0(B(K)) \xrightarrow{\nu_i} F_iB(K^1) \\ & \rightarrow Gr_i^F B(K^1) \simeq H^0(B(K)) \otimes (K^2 \otimes H^0(B(K)))^{\otimes i} \end{aligned}$$

の全射性を証明しよう。ここで  $\nu_i$  は第一段で用いられた写像である。この写像の全射性が言えれば帰納法により  $F_i^* B(K^1) = F_i B(K^1)$  が示されたことになる。この写像は

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} : H^0(B(K)) \otimes H^0(B(K)) \otimes \cdots \otimes H^0(B(K)) \\ \rightarrow H^0(B(K)) \otimes K^2 \otimes H^0(B(K)) \otimes \cdots \otimes K^2 \otimes H^0(B(K)) \end{aligned}$$

によって与えられる。

$$a^{(0)} \otimes \cdots \otimes a^{(i)} \mapsto a^{(0)} \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} a^{(i)}$$

**定理 5.8.**  $K\pi_1$  性の仮定のもとで、準同型  $\alpha_{ii}$  は全射である。

上の定理は次の命題の帰結である。

**命題 5.9.** 上の定理と同じ仮定のもとで、写像

$\alpha : H^0(B(K)) \otimes H^0(B(K)) \rightarrow H^0(B(K)) \otimes K^2 \otimes H^0(B(K)) : a \otimes b \mapsto a \overline{\otimes} b$   
は全射である。

**証明.** (5.1) で定義した  $t$ -次数,  $b$ -次数を考える。  $K$  の微分は 0 であることから、  $B(K)$  および  $B(K) \otimes B(K)$  において  $t$ -次数 (全次数) は微分により保たれる。  $B(K)$  において  $t$ -次数が  $n$  の部分は部分複体となる。これを  $B(K)_n$  と書く。さらに  $b$ -次数が  $i$  の部分を  $B(K)_n^i$  と書く。  $m, n$  を固定する。次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(B(K))_{m+n} & \xrightarrow{\psi} & H^0(B(K))_m \otimes H^0(B(K))_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(K)_{n+m}^0 & \xrightarrow{\varphi^0} & B(K)_m^0 \otimes B(K)_n^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(K)_{n+m}^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & \bigoplus_{p+q=1} B(K)_m^p \otimes B(K)_n^q \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(K)_{n+m}^2 & \xrightarrow{\varphi^2} & \bigoplus_{p+q=2} B(K)_m^p \otimes B(K)_n^q \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

ここで  $\psi, \varphi^i$  は左から初めて全次数が  $m$  になるところで、分割する写像とする。左から次数を加えて行って、分割できなければ 0 と定める。このとき左右の縦の微分は交換する。  $K\pi_1$  性の仮定から縦は完全である。従って定義により、次の補題は明らかである。

**補題 5.10.**  $\varphi^i$  は  $i \geq 0$  において全射でその核は

$$\bigoplus_{p+q+1=i} B(K)_{m-1}^p \otimes K^2 \otimes B(K)_{n-1}^q$$

と同型である。複体  $\ker(\varphi^*)$  は  $B(K)_{m-1} \otimes K^2 \otimes B(K)_{n-1}$  と同型である。

上の補題より

$$\begin{aligned} \text{Coker}(\psi) &\simeq H^0(B(K)_{m-1} \otimes K^2 \otimes B(K)_{n-1}) \\ &\simeq H^0(B(K))_{m-1} \otimes K^2 \otimes H^0(B(K))_{n-1} \end{aligned}$$

をえる。したがって命題 5.9 の写像は全射である。  $\square$

5.3. **BK 母関数と  $E_2$  退化予想、 $K\pi_1$  予想.** 命題 4.7 における  $\tilde{F}_1^{-p,*+p}$  の像

$$G_p = \text{Im}(\tilde{F}_1^{-p,*+p} \rightarrow \mathbf{Q}\langle c_3, c_5, \dots \rangle)$$

を考える。このとき

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots$$

なる増加フィルトレーションが定まる。ここで  $G_p/G_{p-1}$  に寄与する二重母関数を考えると、命題 4.6 と定理 5.6 より、

$$\frac{1}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2} \left( \frac{S(su)u^4}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2} \right)^p$$

となる。これらを  $p$  に関して加えると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2} \left( \frac{S(su)u^4}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2} \right)^p \\ &= \frac{1}{1 - \mathbf{O}(su)u + \mathbf{S}(su)u^2 - \mathbf{S}(su)u^4} \end{aligned}$$

$\overline{\mathcal{Z}}_N^d$  をモチーフ的多重ゼータ値の重さ  $N$  の空間の、深さに付随する次数加群の  $d$  次部分空間の次元とすると、これは楕円次数が  $N + d$  の部分になるので、Broadhurst-Kreimer 予想は

$$\sum_{N,d} (\dim_{\mathbf{Q}} \overline{\mathcal{Z}}_N^d) s^N t^d = \frac{1}{1 - \mathbf{O}t + \mathbf{S}t^2 - \mathbf{S}t^4}$$

と書き直すことができる。結果として、モチーフに関して無限小退化ファイバーなどが構成されていると仮定すると、予想 4.2、予想 4.5 および予想 4.8 が成立すれば、Broadhurst-Kreimer 予想はその帰結であることが結論される。

東京大学大学院数理科学研究科

*E-mail address:* terasoma@ms.u-tokyo.ac.jp

# KONTSEVICH'S EYE, LIE GRAPHS AND THE ALEKSEEV-TOROSSIAN ASSOCIATOR

HIDEKAZU FURUSHO

ABSTRACT. After we recall the definition of Kontsevich's eye  $\overline{C}_{2,0}$  and the notion of Lie graphs, we explain how to construct the new associator  $\Phi_{\text{AT}}$  of Alekseev and Torossian by using a holonomy of differential equation, made by Lie graphs, on  $\overline{C}_{2,0}$ , and also introduce the AT-analogues of multiple zeta values.

We start by recalling the compactified configuration spaces and weights of Lie graphs [K03].

Let  $n \geq 1$ . For a topological space  $X$ , we define

$$\text{Conf}_n(X) := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}.$$

The group

$$\text{Aff}_+ := \{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}_+^\times, b \in \mathbb{C}\}$$

acts on  $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$  diagonally by rescallings and parallel translations. We denote the quotient by

$$C_n := \text{Conf}_n(\mathbb{C})/\text{Aff}_+$$

for  $n \geq 2$ , which is a connected oriented smooth manifold with dimension  $2n - 3$ .

**Example 1.**      •  $C_2 \simeq S^1$ .  
                      •  $C_3 \simeq S^1 \times (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ .

For a finite set  $I$  with  $|I| = n$ , we put  $C_I = C_n$ . For  $I' \subset I$  with  $|I'| > 1$ , we have the pull-back map  $C_I \rightarrow C_{I'}$ .

Put

$$\text{Conf}_{n,m}(\mathbb{H}, \mathbb{R}) := \text{Conf}_n(\mathbb{H}) \times \text{Conf}_m(\mathbb{R})$$

with the coordinate  $(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m)$ , where  $\mathbb{H}$  is the upper half plane. The group

$$\text{Aff}_+^{\mathbb{R}} := \{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}_+^\times, b \in \mathbb{R}\}$$

---

*Date:* November 16, 2018.

This article is for the proceedings of the 26th Number Theory Summer School on 2018.

acts there diagonally and we denote the quotient by

$$C_{n,m} := \text{Conf}_{n,m}(\mathbb{H}, \mathbb{R}) / \text{Aff}_+^{\mathbb{R}}$$

for  $n, m \geq 0$  with  $2n + m \geq 2$ . It is an oriented smooth manifold with dimension  $2n + m - 2$  and with  $m!$  connected components.

**Example 2.**

- $C_{0,2} \simeq \{\pm 1\}$ ,  $C_{0,2}^+ = \{+1\}$ ,  $C_{0,2}^- := \{-1\}$ .
- $C_{1,1} \simeq \{e^{\sqrt{-1}\pi\theta} \mid 0 < \theta < 1\}$ .
- $C_{2,0} \simeq \mathbb{H} - \{\sqrt{-1}\}$ .

For a finite set  $I$  and  $J$  with  $|I| = n$  and  $|J| = m$ , we put  $C_{I,J} = C_{n,m}$ . Then for  $I' \subset I$  and  $J' \subset J$ , we have the pull-back map  $C_{I,J} \rightarrow C_{I',J'}$ .

Below we recall <sup>1</sup> Kontsevich's [K03] compactifications  $\overline{C}_n$  and  $\overline{C}_{n,m}$  of  $C_n$  and  $C_{n,m}$  à la Fulton-MacPherson (in more detail, consult [Si]):

**Definition 3.** For a finite set  $I$  with  $|I| = n$ , we put

$$\tilde{C}_I := \tilde{C}_n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n z_i = 0\} \cap S^{2n-1}.$$

By identifying it with  $\mathbb{C}^n\text{-diag}/\text{Aff}_+$  ( $\text{diag} = \{(z, \dots, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ ), we obtain an embedding  $C_I \hookrightarrow \tilde{C}_I$ . The compactification

$$\overline{C}_I = \overline{C}_n$$

is a compact topological manifold *with corners* which is defined to be the closure of the image of the associated embedding

$$\Phi : C_I \hookrightarrow \prod_{J \subset I, 1 < |J|} \tilde{C}_J.$$

While by the embedding  $\text{Conf}_{n,m}(\mathbb{H}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{Conf}_{2n+m}(\mathbb{C})$  sending  $(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) \mapsto (z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, x_1, \dots, x_m)$ , we have an embedding  $C_{n,m} \hookrightarrow C_{2n+m}$ . By combining it with  $\Phi$ , we obtain an embedding  $C_{n,m} \hookrightarrow \overline{C}_{2n+m}$ . The compactification

$$\overline{C}_{I,J} = \overline{C}_{n,m}$$

is a compact topological manifold with corners which is defined to be the closure of the embedding.

They are functorial with respect to the inclusions of two finite sets, i.e.  $I_1 \subset I_2$  and  $J_1 \subset J_2$  with  $\sharp(I_k) = n_k$  and  $\sharp(J_k) = m_k$  ( $k = 1, 2$ ) yield a natural map  $\overline{C}_{n_2, m_2} \rightarrow \overline{C}_{n_1, m_1}$ .

The stratification of his compactification has a very nice description in terms of trees in [K03] (also refer [CKTB]).

<sup>1</sup>Here we follow the conventions of Bruguières ([CKTB]).

- Example 4.**
- $\overline{C}_{0,2} = C_{0,2} \simeq \{\pm 1\}$ ,
  - $\overline{C}_{1,1} = C_{1,1} \sqcup C_{0,2} = \{e^{\sqrt{-1}\pi\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ ,
  - $\overline{C}_{2,0} = C_{2,0} \sqcup C_{1,1} \sqcup C_{1,1} \sqcup C_2 \sqcup C_{0,2}$ .

The  $\overline{C}_{2,0}$  is called *Kontsevich's eye* and its each component bears a special name as is indicated in Figure 1. The *upper* (resp. *lower*) *eyelid*

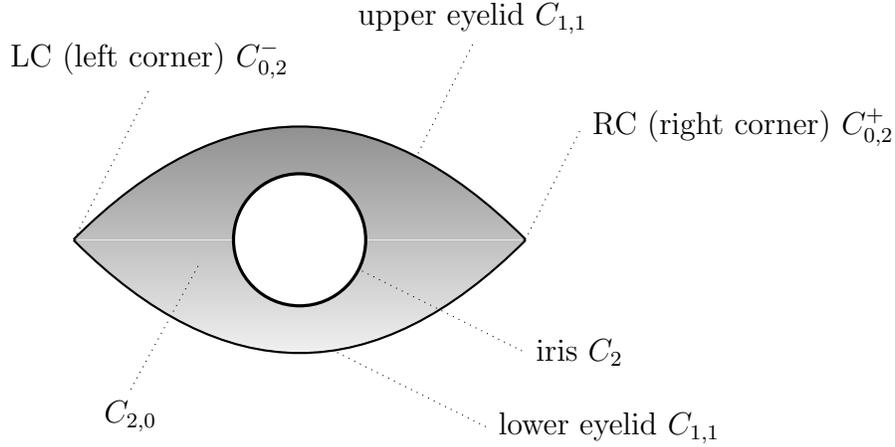


FIGURE 1. Kontsevich's eye  $\overline{C}_{2,0}$

corresponds to  $z_1$  (resp.  $z_2$ ) on the the real line. The *iris* magnifies collisions of  $z_1$  and  $z_2$  on  $\mathbb{H}$ . LC (resp. RC) which stands for the *left* (resp. *right*) *corner* is the configuration of  $z_1 > z_2$  (resp.  $z_1 < z_2$ ) on the real line.

**Definition 5.** The *angle map*  $\phi : \overline{C}_{2,0} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  is the map induced from the map  $\text{Conf}_2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sending

$$(1) \quad \phi : (z_1, z_2) \mapsto \frac{1}{2\pi} \arg \left( \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right).$$

We note that  $\phi$  is identically zero on the upper eyelid but is not on the lower eyelid.

Next we will recall the notion of Lie graphs and their weight functions and 1-forms.

**Definition 6.** Let  $n \geq 1$ . A *Lie graph*  $\Gamma$  of type  $(n, 2)$  is a graph consisting of two finite sets, the *set of vertices*  $V(\Gamma) := \{\boxed{1}, \boxed{2}, \textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{n}\}$  and the *set of edges*  $E(\Gamma) \subset V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ . The points  $\boxed{1}$  and  $\boxed{2}$  are called as the *ground points*, while the points  $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{n}$  are called

as the *air points*. We equip  $V(\Gamma)$  with the total order  $\boxed{1} < \boxed{2} < \textcircled{1} < \textcircled{2} < \cdots < \textcircled{n}$ .

For each  $e \in E(\Gamma)$ , under the inclusion  $E(\Gamma) \subset V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ , we call the corresponding first (resp. second) component  $s(e)$  (resp.  $t(e)$ ) as the *source* (resp. the *target*) of  $e$  and denote as  $e = (s(e), t(e))$ . We equip  $E(\Gamma)$  with the lexicographic order induced from that of  $V(\Gamma)$ . Both  $V(\Gamma)$  and  $E(\Gamma)$  are subject to the following conditions:

- (i) An air point fires two edges: That means there always exist two edges with the source  $\textcircled{i}$  for each  $i = 1, \dots, n$ .
- (ii) An air point is shot by one edge at most: That means there exists at most one edge with its target  $\textcircled{i}$  for each  $i = 1, \dots, n$ .
- (iii) A ground point never fire edges: That means there is no edge with its source on ground points.
- (iv) The graph  $\Gamma$  becomes a rooted trivalent tree after we cut off small neighborhoods of ground points: That means that the graph of  $\Gamma$  admits a unique vertex (called *the root*) shoot by no edges and it gives a rooted trivalent trees if we regard the vertex as a root and distinguish all targets of edges firing ground points.

Let  $\Gamma$  be a Lie graph of type  $(n, 2)$ . We define a Lie monomial  $\Gamma(A, B) \in \widehat{\mathfrak{f}}_2$  of degree  $n+1$  to be the associated element with the root by the following procedure: With  $\boxed{1}$  and  $\boxed{2}$ , we assign  $A$  and  $B \in \widehat{\mathfrak{f}}_2$  respectively. With each internal vertex  $v$  firing two edges  $e_1 = (v, w_1)$  and  $e_2 = (v, w_2)$  such that  $e_1 < e_2$ , we assign  $[\Gamma_1, \Gamma_2] \in \widehat{\mathfrak{f}}_2$  where  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2 \in \widehat{\mathfrak{f}}_2$  are the corresponding Lie monomials with the vertices  $w_1$  and  $w_2$  respectively. Recursively we may assign Lie elements with all vertices of  $\Gamma$ .

**Example 7.** Figure 2 is an example of Lie graph of type  $(3, 2)$ . Its root is  $\textcircled{3}$ . The associated Lie elements of the vertices  $\boxed{1}, \boxed{2}, \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  are  $A, B, [A, B], [B, [A, B]], [B, [B, [A, B]]]$  respectively.

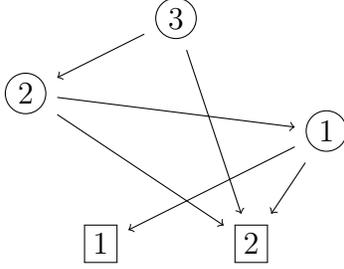
Each  $e \in E(\Gamma)$  determines a subset  $\{s(e), t(e)\} \subset V(\Gamma)$  with  $|V(\Gamma)| = n+2$  which yields a pull-back  $p_e : \overline{C}_{n+2,0} \rightarrow \overline{C}_{2,0}$ . By composing it with the angle map (1), we get a map  $\phi_e : \overline{C}_{n+2,0} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . The  $\text{PA}^2$   $2n$ -forms  $\Omega_\Gamma$  on  $\overline{C}_{n+2,0}$  (which is  $2n$ -dimensional compact space) associated with  $\Gamma$  is given by the ordered exterior product

$$\Omega_\Gamma := \wedge_{e \in E(\Gamma)} d\phi_e \in \Omega_{\text{PA}}^{2n}(\overline{C}_{n+2,0}).$$

Here  $\Omega_{\text{PA}}^{2n}(\overline{C}_{n+2,0})$  means the space of  $\text{PA}$   $2n$ -forms of  $\overline{C}_{n+2,0}$

---

<sup>2</sup>·PA' stands for piecewise-algebraic (cf. [KS, HLTV, LV]).

FIGURE 2.  $\Gamma(A, B) = [B, [B, [A, B]]]$ 

**Definition 8.** (i). Put  $\pi : \overline{C}_{n+2,0} \rightarrow \overline{C}_{2,0}$  to be the above projection induced from the inclusion  $\{\boxed{1}, \boxed{2}\} \subset \{\boxed{1}, \boxed{2}, \textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{n}\}$ . The *weight function* (see [To]) of  $\Gamma$  is the smooth function  $w_\Gamma : \overline{C}_{2,0} \rightarrow \mathbb{C}$  defined by  $w_\Gamma := \pi_*(\Omega_\Gamma)$  where  $\pi_*$  is the push-forward (the integration along the fiber of the projection  $\pi$ , cf. [HLTV]), that is, the function which assigns  $\xi \in \overline{C}_{2,0}$  with

$$w_\Gamma(\xi) = \int_{\pi^{-1}(\xi)} \Omega_\Gamma \in \mathbb{C}.$$

(ii). We denote  $L\Gamma$  (resp.  $R\Gamma$ ) to be a graph obtained from  $\Gamma$  by adding one more edge  $e_L$  from  $\boxed{1}$  (resp.  $e_R$  from  $\boxed{2}$ ) to the root of  $\Gamma$ . The regular  $(2n+1)$ -form  $\Omega_{L\Gamma}$  (resp.  $\Omega_{R\Gamma}$ ) on  $\overline{C}_{n+2,0}$  is defined to be

$$\Omega_{L\Gamma} := d\phi_{e_L} \wedge \Omega_\Gamma \quad (\text{resp.} \quad \Omega_{R\Gamma} := d\phi_{e_R} \wedge \Omega_\Gamma)$$

in  $\Omega_{\text{PA}}^{2n}(\overline{C}_{n+2,0})$ . The one-forms  $\omega_{L\Gamma}$  and  $\omega_{R\Gamma}$ , which we call the *weight forms* of  $\Gamma$  here, are the PA one-forms of  $\overline{C}_{2,0}$  respectively defined by

$$\omega_{L\Gamma} := \pi_*(\Omega_{L\Gamma}) \quad \text{and} \quad \omega_{R\Gamma} := \pi_*(\Omega_{R\Gamma})$$

in  $\Omega_{\text{PA}}^1(\overline{C}_{2,0})$ , i.e. they are one-forms respectively defined by

$$\omega_{L\Gamma}(\xi) = \int_{\pi^{-1}(\xi)} \Omega_{L\Gamma}, \quad \text{and} \quad \omega_{R\Gamma}(\xi) = \int_{\pi^{-1}(\xi)} \Omega_{R\Gamma}$$

where  $\xi$  runs over  $\overline{C}_{2,0}$ .

**Remark 9.** (i). Particularly the special value  $w_\Gamma(\text{RC})$  of the function  $w_\Gamma(\xi)$  at  $\xi = \text{RC}$  is called the *Kontsevich weight* of  $\Gamma$  and denoted simply by  $w_\Gamma$ . It appears as a coefficient of Kontsevich's formula on deformation quantization in [K03].

(ii). While its restriction  $w_\Gamma|_{C_2}$  to the iris  $C_2$  is identically 0 because  $\Omega_\Gamma|_{C_2} = 0$  due to the occurrence of double edges.

**Example 10.** (i). For  $\Gamma$  depicted in Figure 3, by calculations of Torossian [To] we have

- $\omega_\Gamma = (-1)^n \frac{B_n}{n!}$
- $\omega_\Gamma(\theta) = (-1)^n \frac{B_n(\frac{\theta}{\pi})}{n!}$  where  $\theta$  is the local parameter of the upper eyelid  $C_{1,1}$  and  $B_n(x)$  is the Bernoulli polynomial defined by  $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$ .
- While the restriction of  $\omega_\Gamma$  to lower eyelid is not well-understood.

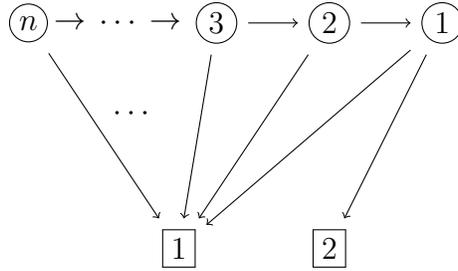


FIGURE 3.  $\Gamma(A, B) = (\text{ad}A)^n(B)$

(ii). G. Felder and Willwacher [FeW] showed that for  $\Gamma$  depicted in Figure 4 we have

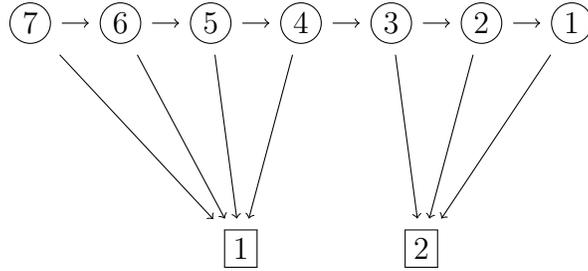


FIGURE 4.  $\Gamma(A, B) = (\text{ad}A)^4(\text{ad}B)^2([A, B])$

$$\omega_\Gamma = a \frac{\zeta(3)^2}{\pi^6} + b$$

with some rational numbers  $a$  and  $b$ . Since it is conjectured that  $\frac{\zeta(3)^2}{\pi^6} \notin \mathbb{Q}$ , the Kontsevich weights might not be always rational.

**Remark 11.** It looks unknown if Kontsevich weights of Lie graphs can be expressed as algebraic combinations of multiple zeta values and  $(2\pi\sqrt{-1})^{\pm 1}$  or not.

Let  $\text{tder}_2$  be the Lie algebra consisting of tangential derivations  $\text{der}(\alpha, \beta) : \widehat{\mathfrak{f}}_2 \rightarrow \widehat{\mathfrak{f}}_2$  ( $\alpha, \beta \in \widehat{\mathfrak{f}}_2$ ) such that  $A \mapsto [A, \alpha]$  and  $B \mapsto [B, \beta]$ . A connection valued there

$$\omega_{\text{AT}} = \text{der}(\omega_L, \omega_R) \in \text{tder}_2 \widehat{\otimes} \Omega_{\text{PA}}^1(\overline{C}_{2,0})$$

is introduced in [AT10, To]. Here  $\Omega_{\text{PA}}^1(\overline{C}_{2,0})$  means the space of PA one-forms of  $\overline{C}_{2,0}$  and

$$\begin{aligned} \omega_L &:= B \cdot d\phi + \sum_{n \geq 1} \sum_{\Gamma \in \text{LieGra}_{n,2}^{\text{geom}}} \Gamma(A, B) \cdot \omega_{L\Gamma}, \\ \omega_R &:= A \cdot \sigma^*(d\phi) + \sum_{n \geq 1} \sum_{\Gamma \in \text{LieGra}_{n,2}^{\text{geom}}} \Gamma(A, B) \cdot \omega_{R\Gamma}. \end{aligned}$$

with the set  $\text{LieGra}_{n,2}^{\text{geom}}$  of *geometric* (it means non-labeled) Lie graphs of type  $(n, 2)$  (cf. Definition 6). We note that both  $\Omega_\Gamma$  and  $\Gamma(A, B)$  require the order of  $E(\Gamma)$  however their product  $\Omega_\Gamma \cdot \Gamma(A, B)$  does not (cf. [CKTB]), whence both  $\omega_L$  and  $\omega_R$  do not require labels. The symbol  $\sigma$  stands for the involution of  $\overline{C}_{2,0}$  caused by the switch of  $z_1$  and  $z_2$ .

In [AT10] they considered the following differential equation on  $\overline{C}_{2,0}$  which was shown to be flat:

$$(2) \quad dg(\xi) = -g(\xi) \cdot \omega_{\text{AT}}$$

with  $g(\xi) \in \text{TAut}_2 := \text{exp tder}_2$ , the pro-algebraic subgroup of  $\text{Aut}_2$  consisting of tangential automorphisms  $\text{Int}(\alpha, \beta) : \widehat{\mathfrak{f}}_2 \rightarrow \widehat{\mathfrak{f}}_2$  ( $\alpha, \beta \in \text{exp } \widehat{\mathfrak{f}}_2$ ) such that  $A \mapsto \alpha^{-1}A\alpha$  and  $B \mapsto \beta^{-1}B\beta$ . They denote its parallel transport (its holonomy) of (2) for the straight path from  $\alpha_0$  (the position 0 at the iris, see Figure 5) to RC by  $F_{\text{AT}} \in \text{TAut}_2$ .

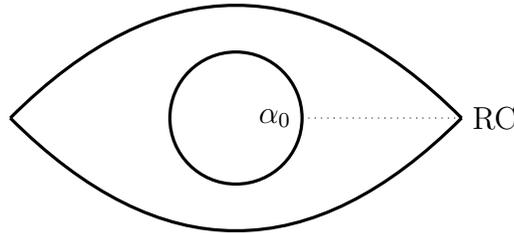


FIGURE 5. Parallel transport

**Definition 12** ([AT10]). The *AT-associator*  $\Phi_{\text{AT}}$  is defined to be

$$(3) \quad \Phi_{\text{AT}} := F_{\text{AT}}^{1,23} \circ F_{\text{AT}}^{2,3} \circ (F_{\text{AT}}^{1,2})^{-1} \circ (F_{\text{AT}}^{12,3})^{-1} \in \text{TAut}_3.$$

Here for any  $T = \text{Int}(\alpha, \beta) \in \text{TAut}_2$ , we denote

$$\begin{aligned} T^{1,2} &:= \text{Int}(\alpha(A, B), \beta(A, B), 1), & T^{2,3} &:= \text{Int}(1, \alpha(B, C), \beta(B, C)), \\ T^{1,23} &:= \text{Int}(\alpha(A, B + C), \beta(A, B + C), \beta(A, B + C)), \\ T^{12,3} &:= \text{Int}(\alpha(A + B, C), \alpha(A + B, C), \beta(A + B, C)) \end{aligned}$$

in  $\text{TAut}_3 := \text{exp tder}_3$  which is similarly defined to be the group of tangential automorphisms of the completed free Lie algebra  $\widehat{\mathfrak{f}}_3$  with variables  $A, B$  and  $C$ .

We note that there is a Lie algebra inclusion  $\widehat{\mathfrak{f}}_2 \hookrightarrow \text{tder}_3$  sending

$$(4) \quad A \mapsto t_{12} := \text{der}(B, A, 0) \quad \text{and} \quad B \mapsto t_{23} := \text{der}(0, C, B)$$

which induces an inclusion  $\text{exp } \widehat{\mathfrak{f}}_2 \hookrightarrow \text{TAut}_3$ .

**Theorem 13** ([AT12, SW]). *The AT-associator  $\Phi_{\text{AT}}$  forms an associator. Namely it belongs to  $\text{exp } \widehat{\mathfrak{f}}_2 \subset \mathbb{C}\langle\langle A, B \rangle\rangle$  and satisfies the equations [Dr] (2.12), (2.13) and (5.3). Furthermore it is real (i.e. it belongs to the real structure  $\mathbb{R}\langle\langle A, B \rangle\rangle$ ) and even.*<sup>3</sup>

The following gives a more direct presentation of  $\Phi_{\text{AT}}$ .

**Theorem 14** ([Fu18]). *We have*

$$(5) \quad \Phi_{\text{AT}} = \left( \mathcal{P} \exp \int_{\text{RC}}^{\alpha_0} (l_{\widehat{\omega}} + D_{\widehat{\omega}}) \right) (1) \in \mathbb{C}\langle\langle A, B \rangle\rangle.$$

Here  $l_{\widehat{\omega}}$  is the left multiplication by  $\widehat{\omega}$  and  $D_{\widehat{\omega}}$  is given by

$$D_{\widehat{\omega}} := \text{der}(0, \widehat{\omega}) \in \text{tder}_2 \widehat{\otimes} \Omega_{\text{PA}}^1(\overline{C}_{2,0})$$

with

$$(6) \quad \widehat{\omega} := \sum_{n \geq 1} \sum_{\Gamma \in \text{LieGra}_{n,2}^{\text{geom}}} \widehat{\Gamma}(A, B) \cdot \omega_{\Gamma} \quad \text{and} \quad \widehat{\omega}_{\Gamma} := \omega_{R\Gamma} - \omega_{L\Gamma}.$$

and for any one-form  $\Omega \in \Omega_{\text{PA}}^1(\overline{C}_{2,0})$  we define

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \exp \int_{\text{RC}}^{\alpha_0} \Omega &:= \text{id} + \int_{\text{RC}}^{\alpha_0} \Omega + \int_{\text{RC}}^{\alpha_0} \Omega \cdot \Omega + \cdots \\ &:= \text{id} + \int_{0 < s_1 < 1} \ell^* \Omega(s_1) + \int_{0 < s_1 < s_2 < 1} \ell^* \Omega(s_2) \wedge \ell^* \Omega(s_1) + \cdots \end{aligned}$$

with the straight path  $\ell$  from RC to  $\alpha_0$  in Figure 5.

<sup>3</sup>It means  $\Phi_{\text{AT}}(-A, -B) = \Phi_{\text{AT}}(A, B)$ , from which it follows that  $\Phi_{\text{KZ}} \neq \Phi_{\text{AT}}$  because  $\Phi_{\text{KZ}}$  is not even.

This theorem enables us to calculate explicitly all the coefficients of the AT-associator  $\Phi_{\text{AT}}$  as rational linear combinations of iterated integrals of weight forms of Lie graphs (see [Fu18] for explicit computations in depth 1 and 2).

As is explained in [Ha] that *multiple zeta values*, the real numbers defined by the following power series

$$\zeta(k_1, \dots, k_m) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}$$

with  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  and  $k_m > 1$  (the condition to be convergent), appear as coefficients of the *KZ-associator*  $\Phi_{\text{KZ}}$ . Particularly its coefficient  $(\Phi_{\text{KZ}}|A^{k_m-1}B \dots A^{k_1-1}B)$  of the monominal  $A^{k_m-1}B \dots A^{k_1-1}B$  is given by

$$(\Phi_{\text{KZ}}|A^{k_m-1}B \dots A^{k_1-1}B) = (-1)^m \zeta(k_1, \dots, k_m)$$

(cf. [Fu03, LM96b]).

Alm introduced the following AT-analogue of multiple zeta values:

**Definition 15** ([Alm]). For  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ , we define the AT-analogue of multiple zeta values by

$$\zeta_{\text{AT}}(k_1, \dots, k_m) := (-1)^m (\Phi_{\text{AT}}|A^{k_m-1}B \dots A^{k_1-1}B) \in \mathbb{R}.$$

It was shown in [Alm] that

$$\zeta_{\text{AT}}(n) = -\frac{B_n}{2(n!)},$$

whence in particular it is 0 for all odd  $n$ . M. Felder [Fe] calculated

$$\zeta_{\text{AT}}(5, 3) = \frac{2048\zeta(3, 5) - 6293\zeta(3)\zeta(5)}{524288\pi^8}.$$

It is a challenging problem to present closed formulae describing all  $\zeta_{\text{AT}}(k_1, \dots, k_m)$  for general indices  $(k_1, \dots, k_m)$  in terms of multiple zeta values.

## REFERENCES

- [AT10] Alekseev, A. and Torossian, C., *Kontsevich deformation quantization and flat connections*, Comm. Math. Phys. **300** (2010), no. 1, 47–64.
- [AT12] Alekseev, A. and Torossian, C., *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.
- [Alm] Alm, J., *Universal algebraic structures on polyvector fields*, PhD thesis, Stockholm Univ, 2014.
- [B95] Bar-Natan, D.; *On the Vassiliev knot invariants*, Topology 34 (1995), no. 2, 423–472.

- [B97] Bar-Natan, D.; *Non-associative tangles*, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 139-183, AMAPIP Stud. Adv. Math., **2.1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [BD] Bar-Natan, D. and Dancso, Z.; *Pentagon and hexagon equations following Furusho*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), no. 4, 1243–1250.
- [Ca] Cartier, P.; *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des nœuds*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **316** (1993), no. 11, 1205-1210.
- [CKTB] Cattaneo, A., Bernhard, B., Torossian, C. and Bruguières, A., *Déformation, quantification, théorie de Lie*, Panoramas et Synthèses, **20**. Société Mathématique de France, Paris, 2005.
- [Dr] Drinfeld, V. G., *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 4, 829–860.
- [EK] Etingof, P. and Kazhdan, D.; *Quantization of Lie bialgebras. II*, Selecta Math. **4** (1998), no. 2, 213–231.
- [FeW] Felder, G. and Willwacher, T., *On the (ir)rationality of Kontsevich weights*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2010, no. 4, 701–716.
- [Fe] Felder, M., *On the irrationality of certain coefficients of the Alekseev-Torossian associator*, J. Lie Theory **27** (2017), no. 2, 501–528.
- [Fu03] Furusho, H., *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol **39**. no 4. (2003). 695–720.
- [Fu10] Furusho, H., *Pentagon and hexagon equations*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 1, 545–556.
- [Fu14] Furusho, H., *Around associators*, Automorphic forms and Galois representations, 2, London Math.Soc. Lecture Note Ser. **415** (2014), 105-117, Cambridge Univ. Press, Cambridge, which is a revised version of ‘Four groups related to associators’, the report on Mathematische Arbeitstagung, 2011.
- [Fu16] *Knots and Grothendieck-Teichmüller group* (Japanese), Math for Industry Lecture note series, Vol 68, Kyushu. Univ.
- [Fu18] Furusho, H., *On the coefficients of the Alekseev Torossian associator*, Journal of Algebra **506** (2018), 364–378.
- [Ha] Harada, R., *KZ-equation and KZ-associator* (Japanese), in this volume.
- [HLTV] Hardt, R., Lambrechts, P., Turchin, V. and Volić, I., *Real homotopy theory of semi-algebraic sets*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), no. 5, 2477–2545.
- [JS] Joyal, A. and Street, R.; *Braided tensor categories*, Adv. Math. **102** (1993), no. 1, 20–78.
- [KaT] Kassel, C. and Turaev, V.; *Chord diagram invariants of tangles and graphs*, Duke Math. J. **92** (1998), no. 3, 497–552.
- [Kat] Kathotia, V.; *Kontsevich’s universal formula for deformation quantization and the Campbell-Baker-Hausdorff formula*, Internat. J. Math. **11** (2000), no. 4, 523–551.
- [K93] Kontsevich, M.; *Vassiliev’s knot invariants*, I. M. Gel’fand Seminar, 137–150, Adv. Soviet Math., 16, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [K03] Kontsevich, M., *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.

- [KS] Kontsevich, M. and Soibelman, Y., *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), 255–307, Math. Phys. Stud., **21**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [LV] Lambrechts, P. and Volić, I., *Formality of the little  $N$ -disks operad*, Mem. Amer. Math. Soc. **230** (2014), no. 1079.
- [LM96a] Le, T.Q.T. and Murakami, J.; *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Compositio Math. **102** (1996), no. 1, 41–64.
- [LM96b] Le, T.Q.T. and Murakami, J., *Kontsevich’s integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 39–65.
- [P] Piunikhin, S.; *Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant*, Comm. Math. Phys. **168** (1995), no. 1, 1–22.
- [RW] Rossi, C. and Willwacher, T., *P. Etingof’s conjecture about Drinfeld associators*, preprint [arXiv:1404.2047](https://arxiv.org/abs/1404.2047).
- [SW] Ševera, P. and Willwacher, T., *Equivalence of formalities of the little discs operad*, Duke Math. J. **160** (2011), no. 1, 175–206.
- [Si] Sinha, Dev P., *Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), no. 3, 391–428.
- [Ta] Tamarkin, D. E.; *Formality of chain operad of little discs*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 1-2, 65–72.
- [To] Torossian, C., *Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne*, J. Lie Theory **12** (2002), no. 2, 597–616.
- [W] Willwacher, T., *M. Kontsevich’s graph complex and the Grothendieck-Teichmüller Lie algebra*, Invent. Math. **200** (2015), no. 3, 671–760.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY, CHIKUSA-KU,  
FURO-CHO, NAGOYA, 464-8602, JAPAN

*Email address:* [furusho@math.nagoya-u.ac.jp](mailto:furusho@math.nagoya-u.ac.jp)

# ポスター発表

# 多重ポリログ関数に対する Landen 型接続公式の 多変数化について

伊東 邦大\* (東北大学大学院理学研究科)

## 概要

奥田-上野による多重ポリログ関数に対する Landen 型接続公式の多変数多重ポリログ関数への拡張について議論し、インデックス  $k = (\{1\}^{r-1}, k)$  に対して得た結果を報告する。

## 1 導入

一変数多重ポリログ関数  $\text{Li}_k(z)$  は、インデックス  $k = (k_j)_{j=1}^r \in \mathbb{N}^r$  に対し、

$$\text{Li}_k(z) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

なる無限級数で定義される (絶対収束域は  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < 1$ )。一変数多重ポリログ関数には、次の微分構造が存在する:

命題 1. 自然数  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  に対し、

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_{r-1}, k_r+1}(z) = \int_0^z \frac{1}{u} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{r-1}, k_r}(u) du, \quad (1)$$

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_{r-1}, 1}(z) = \int_0^z \frac{1}{1-u} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{r-1}}(u) du \quad (2)$$

が領域  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  上で成立する。

ここから帰納的に、以下の関数等式 (多重ポリログ関数に対する Landen 型接続公式) が導かれる:

定理 1 (奥田-上野 [1]). インデックス  $k = (k_j)_{j=1}^r \in \mathbb{N}^r$  に対し、

$$\text{Li}_k\left(\frac{z}{z-1}\right) = (-1)^r \sum_{k' \succeq k} \text{Li}_{k'}(z)$$

が領域  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \Re(z) < \frac{1}{2}\}$  上で成立する。ただし和は  $k$  のすべての refinement を亘る。

ここで refinement  $\succeq$  とは、次のように定義される半順序である:

定義 1. インデックス  $k = (k_1, \dots, k_r)$  に対して

$$J(k) := \{k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + \dots + k_{r-1}\} \subset \{1, 2, \dots, \text{wt}(k) - 1\}$$

とする。インデックス  $k'$  が  $k$  の refinement であるとは、 $\text{wt}(k) = \text{wt}(k')$  かつ  $J(k) \subset J(k')$  が成り立つこととし、このとき  $k' \succeq k$  と書く (この定義は、インデックスの成分を 1 の和のみで書き表したときに、“+” を “,” で置き換えて得られるようなインデックスが refinement である、としても同じことである)。

\*kunihiro.ito.q4@dc.tohoku.ac.jp

本稿は、第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」におけるポスター発表の内容をまとめたものである。

定理 1 は, Mellin 変換を通じて多重ゼータ値の大野関係式と対応する ([1]). また, 荒川-金子ゼータ関数と金子-津村ゼータ関数の変換公式, 及び, 多重ポリベルヌーイ数の B 型と C 型の変換公式を与える ([2]).

## 2 主定理

前節の結果の多変数多重ポリログ関数への拡張について述べる. はじめに多変数多重 (Shuffle) ポリログ関数  $\text{Li}_k^{\sqcup}(z_1, \dots, z_r)$  は, インデックス  $k = (k_j)_{j=1}^r \in \mathbb{N}^r$  に対し,

$$\text{Li}_k^{\sqcup}(z_1, \dots, z_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2 - m_1} \dots z_r^{m_r - m_{r-1}}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

で定義される (絶対収束域は各  $z_j \in \mathbb{C}$ ,  $|z_j| < 1$ ,  $j = 1, \dots, r$ ). この関数は反復積分表示を持つことが知られており, したがって一変数の場合と同様に, シャッフル積の構造を有する. また, 多変数ならでの現象として, 下記の微分構造を持つ:

**命題 2.** 自然数  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  に対し,

$$\begin{aligned} & \text{Li}_{1, k_2, \dots, k_r}^{\sqcup}(z_1, z_2, \dots, z_r) \\ &= \int_0^{z_1} \frac{1}{v(z_2 - v)} (v \text{Li}_{k_2, \dots, k_r}^{\sqcup}(z_2, z_3, \dots, z_r) - z_2 \text{Li}_{k_2, \dots, k_r}^{\sqcup}(v, z_3, \dots, z_r)) dv, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_1} \frac{1}{v(z_2 - v)} (v \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z_2) - z_2 \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(v)) dv \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+1}, \dots, k_r}^{\sqcup}(\overbrace{z_1, \dots, z_1}^i, \overbrace{z_2, \dots, z_2}^{r-i}) + \sum_{i=1}^r \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i-1}, 1, k_i, \dots, k_r}^{\sqcup}(\overbrace{z_1, \dots, z_1}^i, \overbrace{z_2, \dots, z_2}^{r+1-i}) \end{aligned}$$

が領域  $\{z_j \in \mathbb{C} \mid |z_j| < 1, j = 1, \dots, r\}$  上で成立する.

今回, これらの命題を組み合わせることで, 次の関数等式を得た:

**定理 2.** (I.) 自然数  $k, r$  に対し,

$$\begin{aligned} & \text{Li}_{\{1\}^{r-1}, k}^{\sqcup}\left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, \dots, \frac{z_r}{z_r - 1}\right) \\ &= \sum_{(n_1, \dots, n_i) \geq (r)} (-1)^i \prod_{j=1}^{i-1} \text{Li}_{\{1\}^{n_j}}^{\sqcup}(z_{\sum_{\nu=1}^{j-1} n_\nu + 1}, \dots, z_{\sum_{\nu=1}^{j-1} n_\nu + n_j}) \\ &\times \sum_{(k) \geq (k+n_i-1)} \sum_{\substack{l = \text{dep}(k) \\ l \geq 1}} \text{Li}_k^{\sqcup}(\overbrace{z_{\sum_{\nu=1}^{i-1} n_\nu + 1}, \dots, z_{\sum_{\nu=1}^{i-1} n_\nu + 1}}^{l_{\sum_{\nu=1}^{i-1} n_\nu + 1}}, \dots, \overbrace{z_r, \dots, z_r}^{l_r}) \end{aligned}$$

が領域  $\{z_j \in \mathbb{C} \mid |z_j| < 1, \Re(z_j) < \frac{1}{2}, j = 1, \dots, r\}$  上で成立する.

**注意 1.** この定理は, 多変数版 Landen 型接続公式の特殊な場合に相当する (実際, 各変数が一致するときは, 定理 1 の  $k = (\{1\}^{r-1}, k)$  の場合が得られる).

なお特に  $k = 1$  の場合は, 右辺の交代和が打ち消し合い, 次の比較的簡明な式を得る:

**定理 3.** 自然数  $r$  に対し,

$$\text{Li}_{\{1\}^r}^{\sqcup}\left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, \dots, \frac{z_r}{z_r - 1}\right) = (-1)^r \text{Li}_{\{1\}^r}^{\sqcup}(z_r, \dots, z_1)$$

が領域  $\{z_j \in \mathbb{C} \mid |z_j| < 1, \Re(z_j) < \frac{1}{2}, j = 1, \dots, r\}$  上で成立する.

さらに、多重ポリログ関数のシャッフル積構造に注目すると、定理 2 の変型として “重さと深さを固定した和に関する Landen 型接続公式” も得られる:

定理 4. 自然数  $k$  に対し、

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ k_1, k_2 \geq 1}} \text{Li}_{k_1, k_2}^{\sqcup} \left( \frac{z_1}{z_1-1}, \frac{z_2}{z_2-1} \right) = \sum_{(k+1) \succeq (k_1, \dots, k_r)} \sum_{i=1}^{r-1} \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}^{\sqcup} \left( \overbrace{z_2, \dots, z_2}^i, \overbrace{z_1, \dots, z_1}^{r-i} \right)$$

が領域  $\{z_j \in \mathbb{C} \mid |z_j| < 1, \Re(z_j) < \frac{1}{2}, j = 1, 2\}$  上で成立する.

### 3 ベルヌーイ数の関係式への応用

まず multi-indexed ポリベルヌーイ数とは次のように母関数で定められる数である:

定義 2 (B 型は金子-津村 [2], C 型は I.). 複素数  $s_j \in \mathbb{C}$ ,  $d \in \{1, 2, \dots, r\}$  に対して multi-indexed ポリベルヌーイ数  $B_{m_1, \dots, m_r}^{(s_1, \dots, s_r), (d)}$ ,  $C_{m_1, \dots, m_r}^{(s_1, \dots, s_r), (d)}$  を次の母関数で定める:

$$\sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} B_{n_1, \dots, n_r}^{(s_1, \dots, s_r), (d)} \frac{t_1^{n_1} \cdots t_r^{n_r}}{n_1! \cdots n_r!} := \frac{\text{Li}_{s_1, \dots, s_r}^{\sqcup} (1 - e^{-\sum_{\nu=1}^r t_\nu}, \dots, 1 - e^{-t_{r-1}-t_r}, 1 - e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^d (1 - e^{-\sum_{\nu=j}^r t_\nu})},$$

$$\sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} C_{n_1, \dots, n_r}^{(s_1, \dots, s_r), (d)} \frac{t_1^{n_1} \cdots t_r^{n_r}}{n_1! \cdots n_r!} := \frac{\text{Li}_{s_1, \dots, s_r}^{\sqcup} (1 - e^{-\sum_{\nu=1}^r t_\nu}, \dots, 1 - e^{-t_{r-1}-t_r}, 1 - e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^d (e^{\sum_{\nu=j}^r t_\nu} - 1)}.$$

この multi-indexed ポリベルヌーイ数は、多変数金子-津村ゼータ関数及び多変数荒川-金子ゼータ関数の特殊値に現れる (金子-津村 [2], 筆者). また第二種スターリング数による明示公式や、上添え字、下添え字に関する漸化式など、多重ポリベルヌーイ数に成り立つ豊富な関係式の類似が存在することも、筆者による最近の研究で明らかになっている. ここでは、奥田-上野による Landen 型接続公式 (定理 1) の帰結として、以下に示す B-type と C-type の変換公式が導かれることに注目する:

命題 3 (金子-津村 [2], Cor.3.4). 自然数  $k$ , 非負整数  $m$  に対して

$$B_m^{(k)} = (-1)^m \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_i, r \geq 1}} C_m^{(k)},$$

$$C_m^{(k)} = (-1)^m \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_i, r \geq 1}} B_m^{(k)}$$

が成立する.

同様に定理 3 からは、multi-indexed ポリベルヌーイ数の B-type と C-type の変換公式が、特殊な場合について導かれる:

系 1 (cf. 定理 3). 自然数  $r$ , 及び自然数  $k_j$ , 非負整数  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  に対して

$$\mathbb{B}_{m_1, \dots, m_r}^{(\{1\}^r)} = \sum_{\substack{0 \leq i_\nu \leq m_\nu \\ \nu=1, \dots, r-1}} (-1)^{m_r} \prod_{\nu=1}^{r-1} \binom{m_\nu}{i_\nu} \mathbb{C}_{m_{r-1}-i_{r-1}, \dots, m_1-i_1, m_r+\sum_{\nu=1}^{r-1} i_\nu}^{(\{1\}^r)},$$

$$\mathbb{C}_{m_1, \dots, m_r}^{(\{1\}^r)} = \sum_{\substack{0 \leq i_\nu \leq m_\nu \\ \nu=1, \dots, r-1}} (-1)^{m_r} \prod_{\nu=1}^{r-1} \binom{m_\nu}{i_\nu} \mathbb{B}_{m_{r-1}-i_{r-1}, \dots, m_1-i_1, m_r+\sum_{\nu=1}^{r-1} i_\nu}^{(\{1\}^r)}$$

が成立する.

原理的には定理 2 を multi-indexed ポリベルヌーイ数の関係式に翻訳出来るが、表示が煩雑になるためここには記さない. 比較的単純な表示を持つ定理 4 からでさえ、導かれるのは次の式である:

命題 4 (深さ 2 の和公式). 任意の自然数  $k$  と非負整数  $m_1, m_2$  に対して

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ k_1, k_2 \geq 1}} \mathbb{C}_{m_1, m_2}^{(k_1, k_2)} \\
&= \sum_{(k+1) \leq (k_1, \dots, k_r)} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{\substack{n_{1,1}, n_{3,1} \geq 0 \\ n_{1,1} + n_{3,1} = m_1}} \sum_{\substack{n_{1,2}, n_{2,2}, n_{3,2} \geq 0 \\ n_{1,2} + n_{2,2} + n_{3,2} = m_2}} \binom{m_1}{n_{1,1}, n_{3,1}} \binom{m_2}{n_{1,2}, n_{2,2}, n_{3,2}} \\
&\quad \times \sum_{\substack{l_{1,1}, l_{1,2} \geq 0 \\ l_{1,1} + l_{1,2} = n_{1,1}}} (-1)^{n_{1,2} + l_{1,2}} \binom{n_{1,1}}{l_{1,1}, l_{1,2}} \sum_{p=0}^{i-1} (-1)^p \binom{i-1}{p} p^{n_{2,2}} \sum_{q=0}^{r-i-1} (-1)^q \binom{r-i-1}{q} q^{n_{3,1} + n_{3,2}} \\
&\quad \times \mathbb{B}_{\{0\}^{i-1}, l_{1,1}, \{0\}^{r-i-1}, n_{1,2} + l_{1,2}}^{(k)}
\end{aligned}$$

が成立する.

## 4 Concluding remark

本稿の主定理 (定理 2) の証明においては, 多重ポリログ関数の微分構造がカギを握り, 特に式 (3) が, 式 (2) の多変数版に対応する働きを為すことが重要であった. 一方で, 式 (1) に対応する多変数版の式は今回の証明とうまく適合せず, 主定理に含まれない他の系列のインデックスに対する結果は, 現時点では次の例が得られているに留まる:

命題 5. 関数等式

$$\text{Li}_{2,1}^{\text{III}} \left( \frac{z_1}{z_1 - 1}, \frac{z_2}{z_2 - 1} \right) = \text{Li}_{2,1}^{\text{III}}(z_1, z_2) + \text{Li}_{1,1,1}^{\text{III}}(z_1, z_1, z_2) + \text{Li}_{1,1,1}^{\text{III}}(z_2, z_1, z_1) - \text{Li}_{1,1,1}^{\text{III}}(z_2, z_1, z_2)$$

が領域  $\{z_j \in \mathbb{C} \mid |z_j| < 1, \Re(z_j) < \frac{1}{2}, j = 1, 2\}$  上で成立する.

## 謝辞

この度, ポスター発表の機会並びに本報告集への寄稿の機会をくださった, 世話人の佐久川憲児氏, 田坂浩二氏, 三柴善範氏に感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] J.-i. Okuda and K. Ueno, *Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 2, 537–564.
- [2] M. Kaneko and H. Tsumura, *MULTI-POLY-BERNOULLI NUMBERS AND RELATED ZETA FUNCTIONS*, Nagoya Math. J. **232** (2018), 19–54.

# 重さ, 深さ, 高さを固定した有限多重ゼータ値の和の 双対性について

桜田 紘佑\* (東北大学大学院理学研究科)

## 概要

有限多重ゼータ値には, 多重ゼータ値と同様に多くの  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式が存在することが知られていて, 多重ゼータ値の満たす関係式の類似を, 有限多重ゼータ値でも証明することが問題の一つとなっている. 今回, 金子によって予想されていた有限多重ゼータ値の和の双対性について証明を与えることができたので紹介する. これは Height one duality (Hoffman [2]) の高さに関する一般化であり, 多重ゼータスター値の和の双対性 (Li [6]) の類似である.

## 1 導入

多重ゼータ値とは, Riemann ゼータ関数の正の整数点における値をある種拡張した実数値である. 以下, インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$  に対して, 重さと深さをそれぞれ  $\text{wt}(\mathbf{k}) := k_1 + \dots + k_r$ ,  $\text{dep}(\mathbf{k}) := r$  と定義し,  $k_r \geq 2$  を満たすインデックスを収束インデックスと呼ぶ.

**定義 1.1** (多重ゼータ (スター) 値). 収束インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して, 多重ゼータ値, 多重ゼータスター値をそれぞれ次のように定義する.

$$\zeta(\mathbf{k}) := \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}, \quad \zeta^*(\mathbf{k}) := \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}.$$

この多重ゼータ (スター) 値は多くの  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式を持つことが知られていて, 特に次の双対公式は有名である.

**定理 1.2** (双対性). 収束インデックス  $\mathbf{k}$  に対して, 次が成り立つ.

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^\dagger), \tag{1}$$

ここで  $\mathbf{k}^\dagger$  は,  $\mathbf{k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_s-1}, b_s+1)$  ( $a_i, b_i \geq 1$ ) に対して

$$\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1, \dots, 1}_{b_s-1}, a_s+1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

で与えられる収束インデックスである.

---

\* sakurada.ksk@gmail.com

本稿は, 筆者が 2018 年 9 月 10 日に第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」で行ったポスター発表の内容をまとめたものである.

次に Zagier によって導入された有限多重ゼータ値を定義するために、 $\mathbb{Q}$ -代数  $\mathcal{A}$  を次のように定義する。

**定義 1.3.**

$$\mathcal{A} := \left( \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) / \left( \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\} / \sim,$$

ここで  $(a_p)_p \sim (b_p)_p$  とは、高々有限個を除くすべての素数  $p$  で  $a_p = b_p$  が成り立つことを意味する。

有限多重ゼータ値は、 $\mathcal{A}$  の元として次のように定義される。

**定義 1.4** (有限多重ゼータ (スター) 値; cf. [4]). インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して、有限多重ゼータ値、有限多重ゼータスター値をそれぞれ次のように定義する。

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) := \left( \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_r \leq p-1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \pmod{p} \right)_p \in \mathcal{A},$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) := \left( \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_r \leq p-1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \pmod{p} \right)_p \in \mathcal{A}.$$

この有限多重ゼータ (スター) 値も、多重ゼータ値と同様に多くの  $\mathbb{Q}$  上の線型関係式を持つことが知られていて、定理 1.2 の有限多重ゼータスター値に対する類似として次が知られている。

**定理 1.5** (Hoffman 双対性; Hoffman [2]). インデックス  $\mathbf{k}$  に対して、次が成り立つ。

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}^\vee),$$

ここで  $\mathbf{k}^\vee$  は、 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して

$$\mathbf{k}^\vee = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1} + \underbrace{1, \dots, 1}_{k_2} + \dots + \underbrace{1, \dots, 1}_{k_r})$$

で与えられるインデックスである。

## 2 先行研究

Hoffman は、有限多重ゼータスター値における Hoffman 双対性と反転公式を用いて次を示した。

**定理 2.1** (Height one duality; Hoffman [2]). 正の整数  $m, n \geq 1$  に対して、次が成り立つ。

$$(-1)^m \zeta_{\mathcal{A}}^*(\underbrace{1, \dots, 1}_n, m+1) = (-1)^n \zeta_{\mathcal{A}}^*(\underbrace{1, \dots, 1}_m, n+1).$$

定理 2.1 から、定理 1.2 の多重ゼータスター値におけるある種の類似として金子が予想し、大野が証明したのが次の定理である (cf. [3]).

**定理 2.2** (金子-大野 [5]). 正の整数  $m, n$  で、 $m, n \geq 1$  を満たすものに対して、次が成り立つ。

$$(-1)^m \zeta^*(\underbrace{1, \dots, 1}_n, m+1) - (-1)^n \zeta^*(\underbrace{1, \dots, 1}_m, n+1) \in \mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \dots].$$

インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して, 高さを  $\text{ht}(\mathbf{k}) := \#\{i \mid k_i \geq 2\}$  と定義する. また正の整数  $k, r, s$  で  $k - s \geq r \geq s$  を満たすものに対して, 以下を定義する.

$$\begin{aligned} I_0(k, r, s) &:= \{\mathbf{k} : \text{収束インデックス} \mid \text{wt}(\mathbf{k}) = k, \text{dep}(\mathbf{k}) = r, \text{ht}(\mathbf{k}) = s\}, \\ X_0^*(k, r, s) &:= \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, r, s)} \zeta^*(\mathbf{k}), \\ X_{\mathcal{A},0}(k, r, s) &:= \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, r, s)} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}), \quad X_{\mathcal{A},0}^*(k, r, s) := \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, r, s)} \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

金子-大野 ([5]) は定理 2.2 の高さに関する一般化を予想し, 後にこの予想は Li([6]) が証明した.

**定理 2.3** (Li [6]). 正の整数  $m, n, s$  で  $m, n \geq s \geq 1$  を満たすものに対して, 次が成り立つ.

$$(-1)^m X_0^*(m+n+1, n+1, s) - (-1)^n X_0^*(m+n+1, m+1, s) \in \mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \dots].$$

**注意 2.4.** 定理 2.3 における  $s = 1$  のときが, 定理 2.2 にあたる.

**注意 2.5.** 定理 2.2, 定理 2.3 はともに左辺の母関数が明示的に与えられている. したがって, リーマンゼータ値の多項式として書き下した式も具体的に求めることが可能である.

### 3 主定理

本稿の主定理は, 定理 2.3 の有限多重ゼータスター値における類似であり, 金子によって予想されていたものである ([3]).

**定理 3.1.** 正の整数  $m, n, s$  で  $m, n \geq s \geq 1$  を満たすものに対して, 次が成り立つ.

$$(-1)^m X_{\mathcal{A},0}^*(m+n+1, n+1, s) = (-1)^n X_{\mathcal{A},0}^*(m+n+1, m+1, s). \quad (2)$$

**注意 3.2.** 定理 3.1 における  $s = 1$  のときが, 定理 2.1 にあたる.

また, 式 (2) は有限多重ゼータ値に対する以下の関係式に書き直すことができる.

**系 3.3.** 正の整数  $m, n, s$  で  $m, n \geq s \geq 1$  を満たすものに対して, 次が成り立つ.

$$X_{\mathcal{A},0}(m+n+1, n+1, s) = X_{\mathcal{A},0}(m+n+1, m+1, s). \quad (3)$$

**注意 3.4.** 式 (3) もまた, 金子によって予想されていたものである ([3]).

**注意 3.5.** 金子-Zagier の同型予想 (cf. [4]) から, 有限多重ゼータ値に対する定理 3.1 と系 3.3 は, 対称多重ゼータ値に対しても成立することが期待される. 実際, 最近筆者によって対称多重ゼータ値に対しても証明が得られ, その証明は有限多重ゼータ値に対する定理 3.1 と系 3.3 の別証明ともなっている.

### 謝辞

第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」でポスター発表および報告集執筆の機会をいただきました世話人の佐久川憲児氏, 田坂浩二氏, 三柴善範氏に感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sum of multiple zeta values and its applications, Proc. Amer. Soc., **136** (2008), 387-395.
- [2] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod  $p$  multiple harmonic sums, Kyusyu J. Math. **69**(2015), no. 2, 345-366.
- [3] M. Kaneko, Finite multiple zeta values mod  $p$  and relations among multiple zeta values, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku (2012), no. **1813**, 27-31, Aspects of multiple zeta values (in Japanese), Kyoto, 2010. 27-31.
- [4] M. Kaneko, Finite multiple zeta values (有限多重ゼータ値), RIMS Kōkyūroku Bessatsu **68** (2017), 175-180 (in Japanese).
- [5] M. Kaneko and Y. Ohno, On a kind of duality of multiple zeta-star values, Int. J. Number Theory **6**(2010), 1927-1932.
- [6] Z.-h. Li, On a conjecture of Kaneko and Ohno, Pacific J. Math. **257** (2012), no. 2, 193-206.

# 3x+1 関数の一般化における 無限軌道の剰余列の非周期性について

氏名: 藤井 大輔 (フジイ ダイスケ)  
 所属: 名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻  
 学年: 博士後期課程1年 (D1)

## 1. 背景

### 3x+1 予想 または Collatz 予想 [Col]

次のような 3x+1 関数 T を考える。

$$T: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

$$T(x) = \begin{cases} x/2 & (x \text{ is even}) \\ (3x+1)/2 & (x \text{ is odd}) \end{cases}$$

任意の正整数は 3x+1 関数の繰り返し適用によって必ず 1 に至る。

$$\forall x \in \mathbb{Z}_+ \exists k \text{ s.t. } T^k(x) = 1$$

ここで列、

$$(x, T(x), T^2(x), \dots)$$

を、数 x の軌道といい、

その 2 による剰余をとった列を数 x の剰余列という。

軌道に繰り返しの部分列が現れるとき、それをサイクルという。

サイクルの剰余列をサイクルの型という。

繰り返しが現れない軌道を無限軌道という。

この言葉使いのもと、3x+1 予想は以下のように言い換えられる。

任意の正整数は関数 T について  
(1,0) 型のサイクル (1,2) を軌道に含む。

(3x+1 予想は 1 から順に約  $2^{65} \sim 2^{70}$  までの正整数について正しいことが計算機によって検証済みである。[Sil][Roo])

3x+1 予想は未解決問題である。  
 しかしながら、知られている結果として、  
 例えば、以下の定理が存在する。

### 定理 【Lagarias】 [Lag]

3x+1 関数について  
 無限軌道の剰余列は非周期的なものに限る。

Lagarias は以下の L 関数を 3x+1 関数の延長として定義し、  
 考察することで、定理を証明した。

$$L: \mathbb{Z}(2) \rightarrow \mathbb{Z}(2)$$

$$L(x) = \begin{cases} x/2 & (\text{Ord}_2(x) > 0) \\ (3x+1)/2 & (\text{Ord}_2(x) = 0) \end{cases}$$

#### Lagarias による証明の概要

- 関数 L についてサイクル型は完備である。  
 すなわち、任意の型のサイクルが必ず存在する。
  - 関数 L について各数から軌道の剰余列を得る写像は単射である。
- 1° 2° より 関数 L にもし無限軌道が存在すれば、  
 その剰余列は非周期的なものに限る。

## 2. 主結果

### 定理

Hasse-Class に属する任意の関数について、  
 無限軌道の剰余列は非周期的なものに限る。

ここで Hasse-Class とは、 [Hep][Mol]  
 以下のように定まる関数のクラスである。

正整数  $d \geq 2$  と正整数  $m$ 、  
 および、整数の列  $r = (r_1, \dots, r_{d-1})$  によって、  
 $\mathbb{Z}$  上の変換  $H_{(d,m,r)}$  を以下のように定める

$$H_{(d,m,r)}(x) = \begin{cases} x/d & (x \equiv 0 \pmod{d}) \\ (mx - r_i)/d & (x \equiv i \pmod{d} \ (0 < i < d)) \end{cases}$$

ただし、 $\gcd(d,m) = 1$  であり、  
 各  $r_i$  は、 $mi \equiv r_i \pmod{d}$  となるものを選ぶ

(特に、  
 $d = 2, m = 3, r = (r_1) = (-1)$   
 なる場合を考えることで、  
 3x+1 関数 T は Hasse-Class に属する。)

発表者は 3x+1 関数を含む Hasse-Class に属する関数の振舞いを、  
 「**ルールの定まった行列計算**」と捉えることで、  
 線形代数の話に持ち込む手法を提案した。

#### n-dim FRACTRAN プログラム $F_{(d,m,r)}$

$$F_{(d,m,r)} = [A_0 = \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} m/d & r_1/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, A_{d-1} = \begin{pmatrix} m/d & r_{d-1}/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

$$\varphi F_{(d,m,r)} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{(d,m,r)}(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

\* n-dim FRACTRAN 計算モデルについては、PRO-2018-01 で発表を行った。

### 発表者による証明の概要

- 無限軌道であって剰余列が循環節を含むものの存在を仮定する。
- 無限軌道の剰余列の循環節に相当する計算を行列表示する。  
 これは以下の形の上三角行列となり、1 を含む異なる 2 つの固有値を含む。

$$C = \begin{pmatrix} m^b/d^{a+b} & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a, b はそれぞれ剰余列の循環節に表れる 0, 非 0 な整数の個数。  
 $\epsilon$  は有理数。C は上三角行列であるから、  
 その固有値は対角成分である  $m^b/d^{a+b}, 1$   
 $a+b \geq 1, b \geq 0, \gcd(m,d) = 1$  より、 $m^b/d^{a+b} \neq 1$

- 2 つの異なる固有空間へのスペクトル分解を考える。  
 射影子はそれぞれ以下のような形で与えられる。

$$\text{固有値 } m^b/d^{a+b} \text{ に対する固有空間 } S_0 = \{k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R}\} \text{ への射影子 } P_0 = E - P_1 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } 1 \text{ に対する固有空間 } S_1 = \{l \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \mid l \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}\} \text{ への射影子 } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^n = (m^b/d^{a+b})^n P_0^n + \sum_{k=1}^{n-1} n C_k ((m^b/d^{a+b})^k) P_0^k P_1^{n-k} + P_1^n$$

$$= ((m^b/d^{a+b})^n P_0 + P_1)$$

- 無限軌道の剰余列が循環節に入る直前の数に対して、  
 循環節を n 回経過した数の付値に関する評価より、  
 十分大きな n について、行き先が整数に収まらないことを示す。  
 これにより仮定が否定されて、定理を得る。

$$C^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (m^b/d^{a+b})^n P_0^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (m^b/d^{a+b})^n \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (m^b/d^{a+b})^n \begin{pmatrix} yq \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-yq \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \text{ となることに反する}$$

$\text{ord}_p((m^b/d^{a+b})^n(yq) + (x-yq)) \leq \min(\text{ord}_p(yq) - \text{ord}_p(d)(a+b)n, \text{ord}_p(x-yq))$   
 $x, y, q, a, b$  固定のもとで n を十分大きく取ると、右辺は負数となる

#### 参考文献

[Col] Lothar Collatz(1986) "On the Motivation and Origin of the  $(3n+1)$ -Problem", in "The Ultimate Challenge The  $3x+1$  Problem", 241-247. Amer. Math. Soc. (2010).  
 [Hep] E. Heppner "Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse Algorithmus", Archiv. Math 31(1978), 317-320.  
 [Lag] J. C. Lagarias "The set of rational cycles for the  $3x+1$  problem", Acta Arith. 56(1990), 33-53.

[Mol] H. Moller "Über Hasses Verflüchtigung des Syracuse-Algorithmus (akutatisches Problem)", Acta Arith. 34(1978), No 3, 219-226.  
 [Roo] E. Roosendaal "On the  $3x+1$  problem" <http://www.eric.nl/wondrous/> (Web Contents)  
 [Sil] T. O. Silva "Computational verification of the  $3x+1$  conjecture" <http://sweet.ua.pt/tos/3x+1.html> (Web Contents)

# A relation for multi-poly-Bernoulli polynomials

Masato Uchimagi (内間木 将斗 Mathematical Institute, Tohoku University)

10<sup>th</sup> September, 2018

## Definitions

Def. (Imatomi-Kaneko-Takeda, [2])

For any tuple of integers  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ , we define IKT-type multi-poly-Bernoulli numbers  $\{B_n^{(\mathbf{k})}\}_{n \geq 0}$ ,  $\{C_n^{(\mathbf{k})}\}_{n \geq 0}$  by the following generating series:

$$\sum_{n \geq 0} B_n^{(\mathbf{k})} \frac{t^n}{n!} := \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}}, \quad \sum_{n \geq 0} C_n^{(\mathbf{k})} \frac{t^n}{n!} := \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{-t})}{e^t - 1},$$

where  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$  is the multiple polylogarithm given by the formal power series:

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_r^{k_r}}.$$

Def. (Imatomi, [1])

For any tuple of integers  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r$ , we define IKT-type multi-poly-Bernoulli polynomial  $\{B_n^{(\mathbf{k})}(x)\}_{n \geq 0}$  by the following generating series:

$$\sum_{n \geq 0} B_n^{(\mathbf{k})}(x) \frac{t^n}{n!} := \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{-t})}{e^t - 1} e^{xt}.$$

Namely, we have  $B_n^{(\mathbf{k})}(1) = B_n^{(\mathbf{k})}$  and  $B_n^{(\mathbf{k})}(0) = C_n^{(\mathbf{k})}$ .

Rem. When  $\mathbf{k} = (1)$ , we obtain  $\text{Li}_1(z) = -\log(1 - z)$ , so that

$$\text{Li}_1(1 - e^{-t}) = t.$$

Thus, IKT-type multi-poly-Bernoulli numbers for  $\mathbf{k} = (1)$  coincides with classical Bernoulli numbers.

When  $\mathbf{k} = (0)$ , we obtain  $\text{Li}_0(z) = z/(1 - z)$ , so that

$$\text{Li}_0(1 - e^{-t}) = e^t(1 - e^{-t}).$$

Thus, we can calculate IKT-type multi-poly-Bernoulli numbers for  $\mathbf{k} = (0)$ , they are as follows:

$$B_n^{(0)} = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad C_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

## Previous Research

In 2014, Imatomi-Kaneko-Takeda proved the following result.

Thm. (Imatomi-Kaneko-Takeda, [2, Proposition 2.])

For any tuple of integers  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$  and any non-negative integer  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , we have

$$B_n^{(\mathbf{k})} = \frac{1}{n+1} \left( B_n^{(\mathbf{k}_-)} - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m-1} B_m^{(\mathbf{k})} \right),$$

$$C_n^{(\mathbf{k})} = \frac{(-1)^n}{n+1} \left( \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} C_m^{(\mathbf{k}_-)} - \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \binom{n}{m-1} C_m^{(\mathbf{k})} \right)$$

where  $\mathbf{k}_- = (k_1, k_2, \dots, k_{r-1}, k_r - 1)$ .

## References

- [1] K. Imatomi, *Multiple zeta values and multi-poly-Bernoulli numbers*, 2014. Doctoral thesis, Kyushu University. <https://doi.org/10.15017/1441041>  
 [2] K. Imatomi, M. Kaneko, E. Takeda, *Multi-Poly-Bernoulli Numbers and Finite Multiple Zeta Values*, J. Integer Seq., **17** (2014), no. 4, Article 14.4.5, 12.  
 [3] N. Kawasaki, Ohno Seminar at 22<sup>nd</sup> January, 2018.

## Main Theorem

Thm. (U.)

For any tuple of integers  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$  and non-negative integer  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , we have

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} B_m^{(\mathbf{k})}(x) = \sum_{m=0}^n x^{n-m} B_m^{(\mathbf{k}_-)}(x).$$

We state two corollaries preceding the theorem before we show sketch of the proof.

Cor. (Recurrence relations for multi-poly-Bernoulli numbers)

For any tuple of integers  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$  and non-negative integer  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , we have

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} B_m^{(\mathbf{k})} = \sum_{m=0}^n B_m^{(\mathbf{k}_-)},$$

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} C_m^{(\mathbf{k})} = C_n^{(\mathbf{k}_-)}.$$

It was obtained by substituting  $x = 1$  and  $x = 0$  in our main theorem. Moreover, equation regarding C-type has already obtained by Kawasaki [3].

Rem. The corollary equivalent to the result proved by Imatomi-Kaneko-Takeda. In this sense, our main theorem can imply previous result.

Rem. By substituting  $\mathbf{k} = (1)$ , we obtain the well-known result as follows: for any non-negative  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , we have

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} B_m = n + 1,$$

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} C_m = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

## Sketch of proof of main theorem.

We show the following lemma by direct calculation.

Lem.

For any tuple of integers  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r$ , we have

$$\left( \frac{d}{dt} - x \right) \left[ \text{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{-t}) e^{xt} \right] = \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}_-}(1 - e^{-t})}{e^t - 1} e^{xt}.$$

By comparing coefficient of  $t^n$  in the preceding lemma, we obtain

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} B_m^{(\mathbf{k})}(x) - x \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_m^{(\mathbf{k})}(x) = B_n^{(\mathbf{k}_-)}(x).$$

Then, the proof ends by using telescoping sum.  $\square$

# Confluence relations for multiple zeta values

Nobuo Sato (joint work with Minoru Hirose) e-mail : saton@ncts.ntu.edu.tw

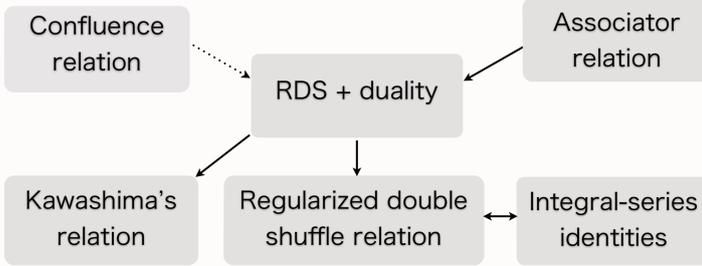
National Center for Theoretical Sciences, Mathematics Division, Taiwan.

## 1. Introduction

Multiple Zeta Values (MZV):

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_d^{k_d}} \quad (k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1, k_d > 1)$$

MZVs satisfy many  $\mathbb{Q}$ -algebraic/linear relations, and several classes of “big” (=conjecturally exhausting all the) relations among MZVs have been discovered till now.



We define a new class of “big” relation which we named *Confluence relation*. A confluence relation is defined as a suitable limit as  $z \rightarrow 1$  of a *standard relation* among iterated integral on  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ .

### Algebraic settings for iterated integrals

Let  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  and define  $\mathcal{A}_z := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1, e_z \rangle$  and a sequence  $\mathcal{A}_z \supset \mathcal{A}_z^1 \supset \mathcal{A}_z^0 \supset \mathcal{A}_z^{-1} \supset \mathcal{A}_z^{-2}$  by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z^1 &:= \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{a \in \{1, z\}} e_a \mathcal{A}_z, \\ \mathcal{A}_z^0 &:= \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}e_z \oplus \bigoplus_{\substack{a \in \{1, z\} \\ b \in \{0, z\}}} e_a \mathcal{A}_z e_b, \\ \mathcal{A}_z^{-1} &:= \mathcal{A}_z^{-2} \mathbb{Q}\langle e_z \rangle \\ \mathcal{A}_z^{-2} &:= \mathbb{Q} \oplus e_1 \mathcal{A}_z e_0 \oplus e_z \mathcal{A}_z e_0. \end{aligned}$$

We also define  $\mathcal{A} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  and  $\mathcal{A}^i := \mathcal{A}_z^i \cap \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  for  $i \in \{1, 0, -1, -2\}$ . Note that  $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-2}$ .

**Definition.** (1) The shuffle product  $\sqcup : \mathcal{A}_z \times \mathcal{A}_z \rightarrow \mathcal{A}_z$  is a bilinear map defined by  $w \sqcup 1 = 1 \sqcup w = w$  for  $w \in \mathcal{A}_z$  and

$$e_a u \sqcup e_b v = e_a (u \sqcup e_b v) + e_b (e_a u \sqcup v) \quad (u, v \in \mathcal{A}_z).$$

(2) Similarly, we define the stuffle product ( $\mathcal{A}$ -module structure on  $\mathcal{A}_z$ )  $*$  :  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}_z \rightarrow \mathcal{A}_z$  as a bilinear map such that  $u * 1 = u$ ,  $1 * v = v$  for  $u \in \mathcal{A}$ ,  $v \in \mathcal{A}_z$  and that

$$e_a u * e_b v = e_{ab}(u * e_b v + e_a u * v - e_0(u * v)) \quad (u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}_z).$$

Note that, for  $? \in \{\emptyset, 1, 0, -1, -2\}$ ,  $\mathcal{A}_z^?$  and  $\mathcal{A}^?$  form commutative rings by the shuffle product.

Define a  $\mathbb{Q}$ -linear map  $L : \mathcal{A}_z^0 \rightarrow \mathbb{C}$  by the *iterated integral*

$$L(e_{a_1} \dots e_{a_n}) := \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < 1} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \dots \frac{dt_n}{t_n - a_n}.$$

The image  $L(w)$  of  $w \in \mathcal{A}^0$  is an MZV, since

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) = (-1)^d L(e_1 e_0^{k_1-1} \dots e_1 e_0^{k_d-1}).$$

Generally,  $L(w)$  is regarded as a holomorphic function on  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .

**Definition.** For  $\alpha, \beta \in \{0, 1, z\}$ , we define a linear operator  $\partial_{\alpha, \beta}$  on  $\mathcal{A}_z$  by

$$\partial_{\alpha, \beta}(e_{a_1} \dots e_{a_n}) := \sum_{i=1}^n (\delta_{\{a_i, a_{i+1}\}, \{\alpha, \beta\}} - \delta_{\{a_{i-1}, a_i\}, \{\alpha, \beta\}}) e_{a_1} \dots \widehat{e_{a_i}} \dots e_{a_n}$$

where  $a_0 := 0$ ,  $a_{n+1} := 1$  and  $\delta_{S, T}$  denotes the Kronecker delta for two sets  $S$  and  $T$ .

**Lemma** (Hirose-Iwaki-S.-Tasaka, 2017). For  $w \in \mathcal{A}_z^0$ ,

$$\frac{d}{dz} L(w) = \frac{1}{z} L(\partial_{z, 0} w) + \frac{1}{z-1} L(\partial_{z, 1} w).$$

We also define  $\text{Const} \in \text{Hom}(\mathcal{A}_z, \mathcal{A})$  by

$$\text{Const}(e_{a_1} \dots e_{a_n}) := \begin{cases} e_{a_1} \dots e_{a_n} & \text{if } a_i \in \{0, 1\} \text{ for all } i, \\ 0 & \text{if } a_i = z \text{ for some } i. \end{cases}$$

Then  $\lim_{z \rightarrow \infty} L(w) = L(\text{Const}(w))$  for  $w \in \mathcal{A}_z^0$ .

## 2. Main result

### Standard relation

**Theorem 1** (Standard relation, Hirose-S., 2017). We define  $\mathcal{I}_{\text{ST}}$  by

$$\mathcal{I}_{\text{ST}} := \{w \in \mathcal{A}_z^0 \mid \text{Const}(\partial_{z, \alpha_1} \dots \partial_{z, \alpha_r} w) = 0 \text{ for } r \geq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \{0, 1\}\}.$$

Then,  $\mathcal{I}_{\text{ST}} \subset \ker L$ .

Furthermore, we have more explicit form of standard relations. Define

$$\varphi_\circ(w) := \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ b_1, \dots, b_r \in \{0, z\}}} \text{Const}(\partial_{1, b_1} \dots \partial_{1, b_r} w) \circ e_{b_1} \dots e_{b_r} \quad (\circ \in \{\sqcup, *\}).$$

Then,

$$\mathcal{I}_{\text{ST}} = \{w - \varphi_\sqcup(w) \mid w \in \mathcal{A}_z^0\} = \{w - \varphi_*(w) \mid w \in \mathcal{A}_z^0\}.$$

### Confluence relation

Roughly speaking, a confluence relation is the “limit as  $z \rightarrow 1$ ” of a standard relation.

For  $w \in \mathcal{A}_z^{-2}$ ,

$$\lim_{z \rightarrow 1} L(w) = L(\lambda'(w)) \quad (\text{where } \lambda'(w) := w|_{e_z \rightarrow e_1})$$

and thus we define the confluence relation of  $w \in \mathcal{A}_z^{-2} \cap \ker L$  as  $\lambda'(w) \in \mathcal{A}^0 \cap \ker L$ . However,  $|_{e_z \rightarrow e_1}$  does not preserve  $\ker L$  in general. Instead, we construct a nice extension of  $\lambda' : \mathcal{A}_z^{-2} \rightarrow \mathcal{A}^{-2} = \mathcal{A}^0$  to  $\lambda : \mathcal{A}_z^0 \rightarrow \mathcal{A}^{-2} = \mathcal{A}^0$  which preserves  $\ker L$ .

**Recipe for  $\lambda$ :**

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}_z^0 & \xrightarrow{N} & \mathcal{A}_z^{-1} & \xrightarrow{=} & \mathcal{A}_z^{-1} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{A}_z^{-2} \xrightarrow{\lambda'} \mathcal{A}^0 \\ \simeq \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \simeq \\ \mathcal{A}_z^{-2} \otimes (\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Z}\langle e_1, e_z \rangle) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau_z} & \mathcal{A}_z^{-2} \otimes (\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Z}\langle e_0, e_z \rangle) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Z}\langle e_z \rangle & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Z} \end{array}$$

1: On the left square, we define a hom  $N : \mathcal{A}_z^0 \rightarrow \mathcal{A}_z^{-1}$  by the composition

$$\mathcal{A}_z^0 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes (\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Z}\langle e_1, e_z \rangle) \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau_z} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes (\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Z}\langle e_0, e_z \rangle) \rightarrow \mathcal{A}_z^{-1}$$

where  $\tau_z$  is an anti-automorphism  $(\mathcal{A}_z, \cdot) \rightarrow (\mathcal{A}_z, \cdot)$  defined by

$$\tau_z(e_0) = e_z - e_1, \quad \tau_z(e_1) = e_z - e_0, \quad \tau_z(e_z) = e_z.$$

2: On the right square, we define a hom  $\mathcal{A}_z^{-1} \rightarrow \mathcal{A}_z^{-2}$  by the composition

$$\mathcal{A}_z^{-1} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Z}\langle e_z \rangle \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{Const}} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Z} = \mathcal{A}_z^{-2}$$

Finally we define  $\lambda : \mathcal{A}_z^0 \rightarrow \mathcal{A}^0$  by composing  $\mathcal{A}_z^0 \xrightarrow{N} \mathcal{A}_z^{-1} \rightarrow \mathcal{A}_z^{-2} \xrightarrow{\lambda'} \mathcal{A}^0$ , and thus obtain the following theorem.

**Theorem 2** (Confluence relation, Hirose-S., 2017). We define

$$\mathcal{I}_{\text{CF}} := \lambda(\mathcal{I}_{\text{ST}})$$

Then,  $\mathcal{I}_{\text{CF}} \subset \mathcal{A}^0 \cap \ker L$ . We call an element of  $\mathcal{I}_{\text{CF}}$  a *confluence relation*.

**Conjecture** (Hirose-S., 2017). Any linear relation is a confluence relation, i.e.,  $\mathcal{A}^0 \cap \ker L = \mathcal{I}_{\text{CF}}$ .

As a theoretical support for our conjecture, we proved the following theorem.

**Theorem 3** (Hirose-S., 2017). *Regularized double shuffle and duality relations are confluence relations.*

## 3. Recent breaking news

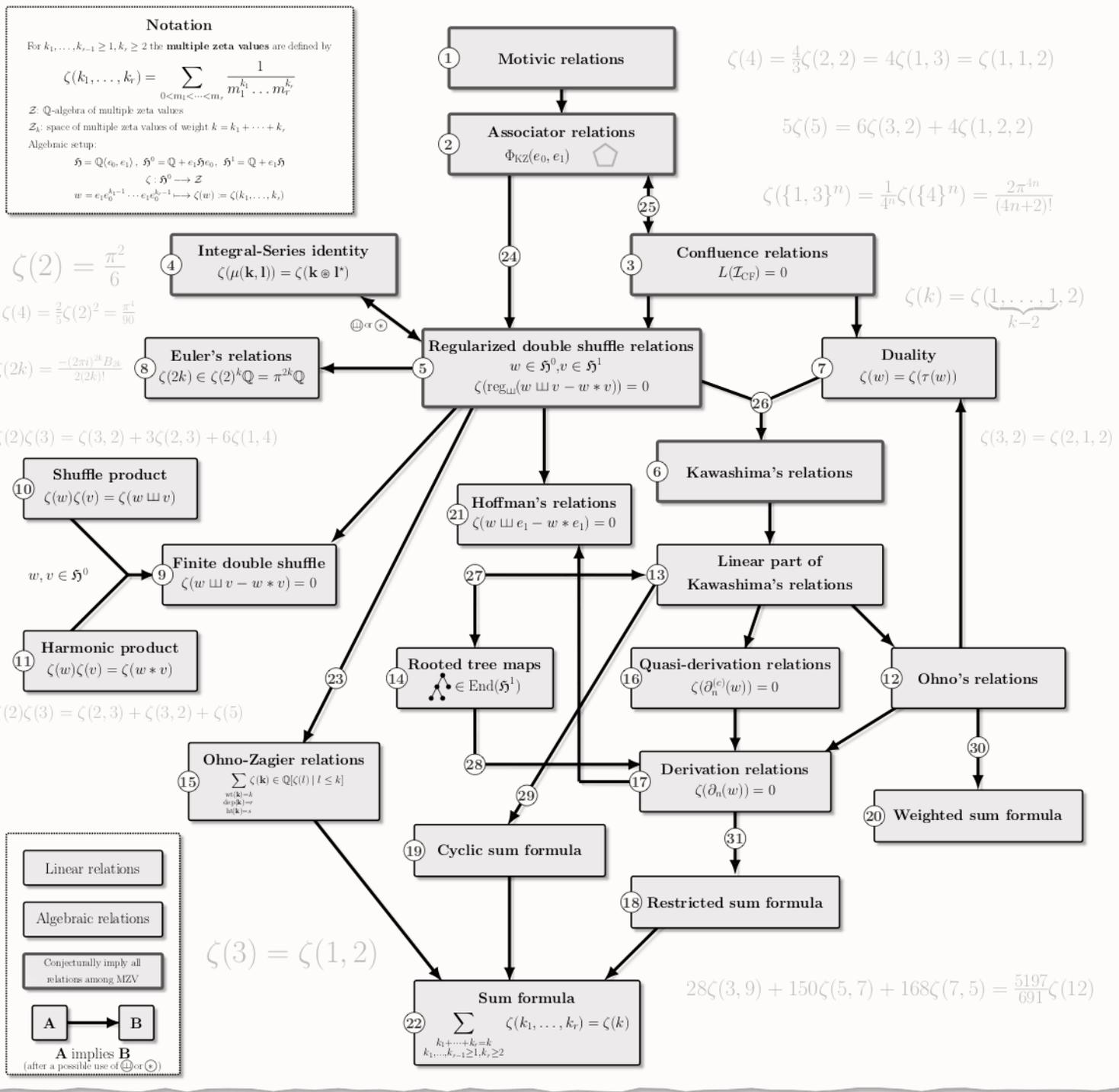
Very recently, the following striking result has been announced:

Let  $\mathfrak{f}_2$  be the free Lie algebra generated by two indeterminates  $f_0, f_1$ ,  $U\mathfrak{f}_2 = \mathbb{Q}\langle f_0, f_1 \rangle$  its universal enveloping algebra. Denote by  $\widehat{\mathfrak{f}}_2$  and  $\widehat{U\mathfrak{f}}_2$  their completion by degrees. Define the standard pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \otimes U\mathfrak{f}_2 \rightarrow \mathbb{Q}$  defined by

$$e_{a_1} \dots e_{a_n} \otimes f_{b_1} \dots f_{b_m} = \begin{cases} 1 & n = m, a_i = b_i \text{ for } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Theorem 4** (Furusko, 2018). Assume that  $\varphi \in \widehat{U\mathfrak{f}}_2$  is commutator group-like, i.e.,  $\varphi \in \exp[\widehat{\mathfrak{f}}_2, \widehat{\mathfrak{f}}_2]$ . Then,  $\varphi$  satisfies pentagon equation if and only if  $\langle w, \varphi \rangle = 0$  for  $w \in \mathcal{I}_{\text{CF}}$ .

In other words, *confluence relation is equivalent to associator relations.*



## Conjectured dimensions and number of linearly independent relations

**32 Conjecture (Zagier)**

The generating series of the dimension of  $\mathcal{Z}_k$  is given by

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k X^k = \frac{1}{1 - X^2 - X^3}$$

In particular for  $k \geq 3$  we have  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{k-2} + \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{k-3}$ .

weight $k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
# of generators	1	0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
# of relations	0	0	0	1	3	6	14	29	60	123	249	503	1012	2032	4075
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21

Number of generators, conjectured number of linearly independent relations and conjectured dimension of  $\mathcal{Z}_k$

## References

<sup>①</sup> H. Bachmann, T. Tanaka, *Rooted tree maps and the derivation relation for multiple zeta values*, to appear in Int. J. Number Theory.  
<sup>②</sup> H. Bachmann, T. Tanaka, *Rooted tree maps and the Kawashima relations for multiple zeta values*, preprint, arXiv:1801.05381.  
<sup>③</sup> F. Brown, *Mixed Tate Motives over Spec(Z)*, Annals of Math., **175**, no. 1 (2012), 949–976.  
<sup>④</sup> V. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal(Q/Q)*, Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 4, 829–860.  
<sup>⑤</sup> M. Eie, W. Liaw, Y. Ong, *A restricted sum formula for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 908–921.  
<sup>⑥</sup> M. Eie, W. Liaw, Y. Ong, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **9** (2013), no. 5, 1185–1198.  
<sup>⑦</sup> L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Comment. Acad. Sci. Petropolit., **7** (1740), 123–134.  
<sup>⑧</sup> H. Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **39**(4) (2003), 695–720.  
<sup>⑨</sup> H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 341–360.  
<sup>⑩</sup> H. Furusho, *The pentagon equation and the confluence relations*, preprint, arXiv:1809.00789.  
<sup>⑪</sup> A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic Number Theory **247** (1997), 95–101.  
<sup>⑫</sup> M. Hirose, N. Sato, *Iterated integrals on  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$  and a class of relations among multiple zeta values*, preprint, arXiv:1801.03807.  
<sup>⑬</sup> M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992) 275–290.  
<sup>⑭</sup> M. Hoffman, Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra **262** (2003), 332–347.  
<sup>⑮</sup> K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.  
<sup>⑯</sup> S. Kakuta, *Certain weighted sum formulas for multiple zeta values with some parameters*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **66** (2017), no. 1–2, 1–13.  
<sup>⑰</sup> M. Kaneko, S. Yamamoto, *A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations*, Selecta Math. **24** (2018), 2499–2521.  
<sup>⑱</sup> G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), no. 4, 755–788.  
<sup>⑲</sup> Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.  
<sup>⑳</sup> Y. Ohno, D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math. (N.S.) **12** (4) (2001), 483–487.  
<sup>㉑</sup> G. Racinet, *Doublets mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **95** (2002), 185–231.  
<sup>㉒</sup> T. Tanaka, *Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values*, preprint, arXiv:1303.0398.  
<sup>㉓</sup> T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), no. 9, 2021–2034.  
<sup>㉔</sup> T. Tanaka, *Rooted tree maps*, preprint, arXiv:1712.01029.  
<sup>㉕</sup> T. Tanaka, N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra **323** (2010), no. 3, 766–778.  
<sup>㉖</sup> Z. Li, *Regularized double shuffle and Ohno-Zagier relations of multiple zeta values*, J. Number Theory **133** (2013), no. 2, 596–610.  
<sup>㉗</sup> D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.

## 多重ゼータ値公式集

### CONTENTS

はじめに	2
定義	2
1. Checker board style Schur MZVs	3
2. Explicit evaluation formulas: $\{2\}^n, \{1, 3\}^n, \{3\}^n$ types	4
3. The block shuffle identity	5
4. The cyclic sum formula	6
5. The derivation relation	6
6. The duality formula	6
7. The duality-like formula	6
8. The Kaneko-Sakata sum formula	7
9. The Kawashima relation (linear part)	7
10. The Ohno-Zagier relation	7
11. The Ohno relation	8
12. The restricted sum formula	9
13. The two-one formula	9
14. The weighted sum formula	10
References	10

## はじめに

本稿は多重ゼータ値についての公式を纏めたものです。

まず重要な注意として、本稿は多重ゼータ値についての重要な公式を網羅したものではありません。本稿に載せていない重要な公式も多数存在します。また重要な公式から優先的に選択して載せるといった趣旨のものでもありません。

また公式を論文等に引用する際は、必ず原典を参照するようにしてください。

またこの公式集では歴史的経緯に触れないので引用の際にはご配慮ください。

また本稿では興味を持ってもらうことを最優先としており、正確な定義を述べていない箇所が多々存在しますので、必要に応じ適宜参考文献を参照してください。

## 定義

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \zeta(e_1 e_0^{k_1-1} \dots e_1 e_0^{k_r-1}) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} n_1^{-k_1} \dots n_r^{-k_r}$$

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_r) := \zeta^*(e_1 e_0^{k_1-1} \dots e_1 e_0^{k_r-1}) := \sum_{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r} n_1^{-k_1} \dots n_r^{-k_r}$$

$$\zeta_N(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r \leq N} n_1^{-k_1} \dots n_r^{-k_r}$$

$$\zeta_N^*(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} n_1^{-k_1} \dots n_r^{-k_r}$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r) := (\zeta_{p-1}(k_1, \dots, k_r) \pmod p)_p \in \left( \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) / \left( \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right)$$

- $\mathbb{k}^\dagger$ :  $\mathbb{k}$  の双対インデックス .
- $\mathbb{k}^\vee$ :  $\mathbb{k}$  の Hoffman 双対インデックス .
- $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して

$$\text{dep}(\mathbb{k}) := r$$

$$\text{wt}(\mathbb{k}) := k_1 + \dots + k_r$$

$$\text{ht}(\mathbb{k}) := \#\{i \mid k_i > 1\}$$

- $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と  $\mathbb{k}' = (k'_1, \dots, k'_r)$  に対して

$$\mathbb{k} + \mathbb{k}' = (k_1 + k'_1, \dots, k_r + k'_r).$$

- $I(010^{k_1-1} \dots 10^{k_r-1}1) = (-1)^r \zeta(k_1, \dots, k_r)$ .
- $\mathbb{k} \bar{*} \mathbb{k}'$ : 多重ゼータスター値に対応する調和積 . 例えば  $(k) \bar{*} (l) = (k, l) + (l, k) - (k+l)$ .  $\zeta^*(\mathbb{k} \bar{*} \mathbb{k}') = \zeta^*(\mathbb{k}) \zeta^*(\mathbb{k}')$  が成立する .
- $C_n$ : 巡回置換  $(1, \dots, n-1, n) \mapsto (2, \dots, n, 1)$  で生成される位数  $n$  の置換群 .
- $\{a, b, \dots\}^n$ :  $(a, b, \dots)$  を  $n$  個並べて得られるインデックス .

1. CHECKER BOARD STYLE SCHUR MZVs

定義. [1] を参照. 例としては

$$\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline \end{array}\right) = \sum_{\substack{m_a, m_b, \dots, m_f \in \mathbb{Z}_{>0} \\ m_a \leq m_b \leq m_c \\ m_d \leq m_e \leq m_f}} \frac{1}{m_a^a \cdot m_b^b \cdot m_c^c \cdot m_d^d \cdot m_e^e \cdot m_f^f}.$$

定理 ([1]).

$$\begin{aligned} \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ & & 3 \\ & 1 & \cdot \\ & 3 & \cdot \\ 1 & & \cdot \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{2}{4^n} \zeta(4n+1), \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 & 3 \\ & & 3 & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{1}{4^n} \zeta(4n+3), \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ & & 3 \\ & 1 & \cdot \\ & 3 & \cdot \\ 1 & & \cdot \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{1}{4^n} \zeta^*(\{4\}^n), \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 & 3 \\ & & 3 & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\right) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \zeta^*(\{4\}^k) \zeta(\{4\}^{n-k}), \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \\ \hline \end{array}\right) &= -2 \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \zeta(4k+1) \zeta(\{1, 3\}^{n-k}), \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 \\ & & & & 3 \\ & & & & \cdot \\ & & & & 1 \\ & & & & 3 \\ 1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\right) &= -2 \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \zeta(4k+1) \zeta^*(\{1, 3\}^{n-k}). \end{aligned}$$

定理 ([1]).

$$\begin{aligned} \zeta\left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{1}{4^{0 \cdot 1}} |\zeta(3)|, \quad \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & \cdot \\ 3 & & \cdot \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{4^{1 \cdot 2}} \begin{vmatrix} \zeta(3) & \zeta(7) \\ \zeta(7) & \zeta(11) \end{vmatrix}, \quad \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & \cdot \\ 3 & 1 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{4^{2 \cdot 3}} \begin{vmatrix} \zeta(3) & \zeta(7) & \zeta(11) \\ \zeta(7) & \zeta(11) & \zeta(15) \\ \zeta(11) & \zeta(15) & \zeta(19) \end{vmatrix}, \dots \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ 3 & \cdot \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{1}{4^{1 \cdot 1}} |\zeta(7)|, \quad \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot & \cdot \\ 3 & & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{4^{2 \cdot 2}} \begin{vmatrix} \zeta(7) & \zeta(11) \\ \zeta(11) & \zeta(15) \end{vmatrix}, \quad \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & \cdot \\ 1 & 3 & 1 & 3 & \cdot & \cdot \\ 3 & 1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{4^{3 \cdot 3}} \begin{vmatrix} \zeta(7) & \zeta(11) & \zeta(15) \\ \zeta(11) & \zeta(15) & \zeta(19) \\ \zeta(15) & \zeta(19) & \zeta(23) \end{vmatrix}, \dots \end{aligned}$$

2. EXPLICIT EVALUATION FORMULAS:  $\{2\}^n, \{1, 3\}^n, \{3\}^n$  TYPES

定理 ([3] for 1st formulas, [20] for 2nd, [4] for 3rd and 5th, [1] for 4th, [31] for 6th).  $n \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned}\zeta(\{1, 3\}^n) &= \frac{1}{2n+1} \zeta(\{2\}^{2n}) = \frac{2\pi^{4n}}{(2n+2)!} \\ \zeta^*(\{1, 3\}^n) &= \sum_{i=0}^n \zeta(\{1, 3\}^i) \zeta^*(\{4\}^{n-i}) \\ \zeta(3, \{1, 3\}^n) &= \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \zeta(4k+3) \zeta(\{1, 3\}^{n-k}) \\ \zeta^*(3, \{1, 3\}^n) &= \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \zeta(4k+3) \zeta^*(\{1, 3\}^{n-k}) \\ \zeta(2, \{1, 3\}^n) &= 4^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \zeta(\{4\}^{n-k}) \left\{ (4k+1)\zeta(4k+2) - 4 \sum_{j=1}^k \zeta(4j-1)\zeta(4k-4j+3) \right\} \\ \zeta^*(2, \{1, 3\}^n) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^n \zeta^*(\{1, 3\}^i) \zeta^*(\{2\}^{2n-2i+1}).\end{aligned}$$

例.

$$\begin{aligned}\zeta(1, 3) &= \frac{1}{3} \zeta(2, 2), \quad \zeta(1, 3, 1, 3) = \frac{1}{5} \zeta(2, 2, 2, 2), \quad \zeta(1, 3, 1, 3, 1, 3) = \frac{1}{7} \zeta(2, 2, 2, 2, 2, 2), \dots \\ \zeta^*(1, 3) &= \zeta(1, 3) + \zeta(4), \quad \zeta^*(1, 3, 1, 3) = \zeta(1, 3, 1, 3) + \zeta(1, 3)\zeta^*(4) + \zeta^*(4, 4), \dots \\ \zeta(3, 1, 3) &= \zeta(3)\zeta(3, 1) - \frac{1}{4}\zeta(7), \quad \zeta(3, 1, 3, 1, 3) = \zeta(3)\zeta(3, 1, 3, 1) - \frac{1}{4}\zeta(7)\zeta(3, 1) + \frac{1}{16}\zeta(11), \dots \\ \zeta^*(3, 1, 3) &= \zeta(3)\zeta^*(3, 1) - \frac{1}{4}\zeta(7), \quad \zeta^*(3, 1, 3, 1, 3) = \zeta(3)\zeta^*(3, 1, 3, 1) - \frac{1}{4}\zeta(7)\zeta^*(3, 1) + \frac{1}{16}\zeta(11), \dots\end{aligned}$$

定理 ([30]; conjectured in [2]).  $n \geq 0$  に対して

$$\zeta(\{3\}^n) = 8^n \zeta(\{1, \bar{2}\}^n)$$

例.

$$\begin{aligned}\zeta(3) &= 8 \sum_{0 < a < b} \frac{(-1)^b}{ab^2} \\ \zeta(3, 3) &= 64 \sum_{0 < a < b < c < d} \frac{(-1)^{b+d}}{ab^2cd^2} \\ \zeta(3, 3, 3) &= 512 \sum_{0 < a < b < c < d < e < f} \frac{(-1)^{b+d+f}}{ab^2cd^2ef^2}.\end{aligned}$$

定理 ([29]).  $a, b, n \geq 0$  に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{2a+1, 2b+1\}^{n+1}) = 0.$$

## 3. THE BLOCK SHUFFLE IDENTITY

定義.  $I_{\text{bl}}$  の定義については [11] もしくは, サマースクール 4 日目「Brown の定理の証明の概略」のレジュメを参照. 例としては

$$\begin{aligned} I_{\text{bl}}(5, 6, 7) &= I(\overbrace{01010}^5 \overbrace{010101}^6 \overbrace{1010101}^7) \\ &= (-1)^8 \zeta(e_1 e_0 e_1 e_0 e_0 e_1 e_0 e_1 e_0 e_1 e_0 e_1 e_0 e_1 e_0) \\ &= (-1)^8 \zeta(2, 3, 2, 2, 1, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

定義.  $\mathbb{k} \widetilde{\sqcup} \mathbb{k}'$  を

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_l) \widetilde{\sqcup} (b_1, \dots, b_m) &:= \sum_{n=0}^{l+m} (-1)^{(l+m-n)/2} \sum_{n=0}^{l+m} (-1)^{(l+m-n)/2} \\ &\times \sum_{\substack{f: \{1, \dots, l\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \\ g: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \\ f, g: \text{increasing} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \#f^{-1}(i) - \#g^{-1}(i) = \pm 1}} \left( \sum_{j \in f^{-1}(1)} a_j + \sum_{j \in f^{-1}(1)} b_j, \dots, \sum_{j \in f^{-1}(n)} a_j + \sum_{j \in f^{-1}(n)} b_j \right) \end{aligned}$$

で定める. 例えば

$$\begin{aligned} (a) \widetilde{\sqcup} (b) &= (a, b) + (b, a) \\ (a_1, a_2) \widetilde{\sqcup} (b) &= (a_1, a_2, b) + (a_1, b, a_2) + (b, a_1, a_2) - (a_1 + a_2 + b). \end{aligned}$$

定理 ([11]).  $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m \geq 1$  かつ  $a_1, a_l, b_1, b_m \geq 2$  となるとき,

$$I_{\text{bl}}((a_1, \dots, a_l) \widetilde{\sqcup} (b_1, \dots, b_m)) = 0.$$

例.

$$\begin{aligned} 0 &= I_{\text{bl}}((3) \widetilde{\sqcup} (4, 5)) \\ &= I_{\text{bl}}(3, 4, 5) + I_{\text{bl}}(4, 3, 5) + I_{\text{bl}}(4, 5, 3) - I_{\text{bl}}(12) \\ &= (-1)^5 \zeta(3, 2, 1, 2, 2) + (-1)^6 \zeta(2, 1, 2, 1, 2, 2) + (-1)^6 \zeta(2, 1, 2, 2, 1, 2) - (-1)^5 \zeta(2, 2, 2, 2, 2) \end{aligned}$$

系 (conjectured in [5]).  $a_1, \dots, a_n \geq 2$  に対して

$$I_{\text{bl}}(a_1, \dots, a_n) + I_{\text{bl}}(a_2, \dots, a_n, a_1) + \dots + I_{\text{bl}}(a_n, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{cases} I_{\text{bl}}(a_1 + \dots + a_n) & n : \text{odd} \\ 0 & n : \text{even} \end{cases}$$

系 (conjectured in [2]).  $m, n \geq 0$  に対して

$$\zeta(\{\{2\}^m, 1, \{2\}^m, 3\}^n, \{2\}^m) = \frac{1}{2n+1} \zeta(\{2\}^{2(m+1)n+m}).$$

系.  $\{2, 3\}$  のみを成分にもつインデックス  $\mathbb{k}$  と  $\mathbb{k}'$  について

$$\zeta(\mathbb{k}, \mathbb{k}^\dagger) = \zeta(\mathbb{k} \star \mathbb{k}').$$

ただし  $\mathbb{k} \star \mathbb{k}'$  は次で帰納的に定義される.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \star () &= () \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \\ (\mathbf{a}, 2) \star \mathbf{b} &= \mathbf{a} \star (\mathbf{b}, 2) = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}, 2) \\ (\mathbf{a}, 3) \star (\mathbf{b}, 3) &= (\mathbf{a} \star (\mathbf{b}, 3), 3) + ((\mathbf{a}, 3) \star \mathbf{b}, 3) + (\mathbf{a} \star \mathbf{b}, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

例.  $\mathbb{k} = (\{2\}^a, 3)$ ,  $\mathbb{k} = (\{2\}^b, 3)$  のとき次の 2 つは等しい.

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbb{k}, \mathbb{k}^\dagger) &:= \zeta(\{2\}^a, 3, 1, \{2\}^{2b+1}) \\ \zeta(\mathbb{k} \star \mathbb{k}') &:= \zeta(\{2\}^a, 3, \{2\}^b, 3) + \zeta(\{2\}^b, 3, \{2\}^a, 3) + \zeta(\{2\}^{a+b+3}). \end{aligned}$$

## 4. THE CYCLIC SUM FORMULA

定理 ([14]).  $(k_1, \dots, k_n) \neq (1, \dots, 1), n \geq 1$  に対して

$$\sum_{\sigma \in C_n} \zeta(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n-1)}, k_{\sigma(n)} + 1) = \sum_{\sigma \in C_n} \sum_{i=0}^{k_{\sigma(n)}-2} \zeta(i+1, k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n-1)}, k_{\sigma(n)} - i).$$

例.  $\mathbb{k} = (1, 2)$  として得られる式は

$$\zeta(1, 3) + \zeta(2, 2) = \zeta(1, 1, 2).$$

定理 ([23]).  $k_1, \dots, k_n, n \geq 1$  に対して,  $k := k_1 + \dots + k_n$  とおく. このとき,

$$\sum_{\sigma \in C_n} \sum_{i=0}^{k_{\sigma(n)}-2} \zeta^*(i+1, k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n-1)}, k_{\sigma(n)} - i) = k\zeta(k+1).$$

例.  $\mathbb{k} = (\{1\}^{m-2}, 2)^n$  として得られる式は

$$\zeta^*(1, \{1\}^{m-2}, 2)^n = m\zeta(mn+1).$$

## 5. THE DERIVATION RELATION

定理 ([15]).  $n \geq 1$  に対し, 線形写像  $\partial_n : \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle \rightarrow \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$  を  $\partial_n(uv) = \partial_n(u)v + u\partial_n(v)$ ,  $\partial_n(e_0) = e_1(e_0 + e_1)^{n-1}e_0$ ,  $\partial_n(e_1) = -e_1(e_0 + e_1)^{n-1}e_0$  で定める. このとき許容的なワード  $w$  に対して

$$\zeta(\partial_n(w)) = 0.$$

## 6. THE DUALITY FORMULA

定理. 許容的なインデックス  $\mathbb{k}$  に対して

$$\zeta(\mathbb{k}) = \zeta(\mathbb{k}^\dagger).$$

例.  $(e_{a_1} \cdots e_{a_r})^\dagger = e_{1-a_r} \cdots e_{1-a_1}$  に注意.

$$\zeta(2, 3, 1, 2) = \zeta(3, 1, 2, 2),$$

$$\zeta(\{1\}^{n-1}, k+1) = \zeta(\{1\}^{k-1}, n+1).$$

定理 ([13]). インデックス  $\mathbb{k}$  に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k}^\vee).$$

例.  $\mathbb{k} = (2, 3, 1, 2)$  に対して,  $(2, 3, 1, 2) = (1+1, 1+1+1, 1, 1+1)$  より,  $(2, 3, 1, 2)^\vee = (1, 1+1, 1, 1+1+1) = (1, 2, 1, 3, 1)$  なので

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(2, 3, 1, 2) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(1, 2, 1, 3, 1)$$

## 7. THE DUALITY-LIKE FORMULA

定理 ([16]).  $k, n \geq 1$  に対して

$$(-1)^k \zeta^*(\{1\}^n, k+1) - (-1)^n \zeta^*(\{1\}^k, n+1) \in \mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4), \zeta(5), \dots].$$

定理 ([19]).

$$\Phi^*(u, v, t) = \sum_{\mathbb{k} \neq \emptyset} \zeta^*(\mathbb{k}) u^{d'(\mathbb{k}) - \text{ht}(\mathbb{k})} v^{\text{dep}(\mathbb{k}) - \text{ht}(\mathbb{k})} t^{2\text{ht}(\mathbb{k}) - 2}$$

と置いたとき

$$\begin{aligned} u\Phi(-u, v, t) - v\Phi(-v, u, t) &= \frac{u-v}{ab} + A(u, v, a, b) \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \times \frac{\pi}{\sin \pi b} \times \frac{\Gamma(u+a)\Gamma(u+b)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \\ &\in \mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4), \zeta(5), \dots][[u, v, t]]. \end{aligned}$$

ここで  $a+b = -u+v$ ,  $ab = -uv - t^2$  であり,  $A(u, v, a, b)$  は次で定めた.

$$A(u, v, a, b) := \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\cos \pi u}{\sin \pi v} - \frac{\cos \pi v}{\sin \pi u} + \cos \pi(a-b)(\cot \pi u - \cot \pi v) \right).$$

## 8. THE KANEKO-SAKATA SUM FORMULA

定理 ([17]).  $k, r \geq 1$  に対して

$$\zeta(e_1^r e_0^k) = \zeta(\{1\}^{r-1}, k+1) = \sum_{j=1}^{\min(k,r)} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^j \\ \text{wt}(\mathbf{k})=k, \text{wt}(\mathbf{r})=r}} \zeta(\mathbf{k} + \mathbf{r}).$$

定理 ([21]). インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^d$  と  $r \in \mathbb{Z}_{\geq d}$  に対して

$$\sum_{\substack{r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ r_1 + \dots + r_d = r}} \zeta(e_1^{r_1} e_0^{k_1} \dots e_1^{r_d} e_0^{k_d}) = \sum_j (-1)^{j-d} \sum_{\substack{\mathbf{k}' : \mathbf{k} \text{ の細分} \\ \text{dep}(\mathbf{k}')=j}} \sum_{\substack{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^j \\ \text{wt}(\mathbf{r}')=r}} \zeta(\mathbf{k}' + \mathbf{r}).$$

例.  $\mathbf{k} = (3), r = 4$  として

$$\zeta(e_1^4 e_0^3) = \zeta(7) - (\zeta(5, 2) + 2\zeta(4, 3) + 2\zeta(3, 4) + \zeta(2, 5)) + (\zeta(3, 2, 2) + \zeta(2, 3, 2) + \zeta(2, 2, 3)).$$

$\mathbf{k} = (1, 2), r = 4$  として

$$\zeta(e_1^3 e_0 e_1 e_0^2) + \zeta(e_1^2 e_0 e_1^2 e_0^2) + \zeta(e_1 e_0 e_1^3 e_0^2) = (\zeta(4, 3) + \zeta(3, 4) + \zeta(2, 5)) - (\zeta(3, 2, 2) + \zeta(2, 3, 2) + \zeta(2, 2, 3)).$$

## 9. THE KAWASHIMA RELATION (LINEAR PART)

定理 ([18]). インデックス  $\mathbb{k}, \mathbb{k}'$  に対して

$$\zeta^*((\mathbb{k} \bar{*} \mathbb{k}', 1)^\vee) = 0.$$

## 10. THE OHNO-ZAGIER RELATION

定理 ([24]). 空でない許容的なインデックス  $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対し,  $d'(\mathbb{k}) = \sum_{i=1}^r (k_i - 1)$  と置く. このとき

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{k} \neq \emptyset} \zeta(\mathbb{k}) X^{d'(\mathbb{k}) - \text{ht}(\mathbb{k})} Y^{\text{dep}(\mathbb{k}) - \text{ht}(\mathbb{k})} Z^{\text{ht}(\mathbb{k}) - 1} &= \frac{1}{XY - Z} \left( 1 - \frac{\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \right) \\ &= \frac{1}{XY - Z} \left( 1 - \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} (X^n + Y^n - \alpha^n - \beta^n) \right) \right). \end{aligned}$$

ここで  $\alpha + \beta = X + Y$ ,  $\alpha\beta = Z$  と置いた.

注意.  $u_1 \dots u_n = e_1 e_0^{k_1-1} \dots e_1 e_0^{k_r-1}$  (ただし  $u_1, \dots, u_n \in \{e_0, e_1\}$ ) としたとき

$$\begin{aligned} d'(\mathbb{k}) - \text{ht}(\mathbb{k}) &= \#\{i \mid u_i u_{i+1} = e_0 e_0\} \\ \text{dep}(\mathbb{k}) - \text{ht}(\mathbb{k}) &= \#\{i \mid u_i u_{i+1} = e_1 e_1\} \\ \text{ht}(\mathbb{k}) - 1 &= \#\{i \mid u_i u_{i+1} = e_0 e_1\} = \#\{i \mid u_i u_{i+1} = e_1 e_0\} - 1. \end{aligned}$$

例.

$$\begin{aligned} &\zeta(2) + \zeta(3)X + \zeta(1, 2)Y + \zeta(4)X + \zeta(1, 3)XY + \zeta(1, 1, 2)Y^2 + \zeta(2, 2)Z \\ &+ \zeta(5)X^3 + \zeta(1, 4)X^2Y + \zeta(1, 1, 3)XY^2 + \zeta(1, 1, 1, 2)Y^3 \\ &+ [\zeta(2, 3) + \zeta(3, 2)]XZ + [\zeta(1, 2, 2) + \zeta(2, 1, 2)]YZ + \dots \\ &= \frac{1}{XY - Z} \left( 1 - \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} (X^n + Y^n - \alpha^n - \beta^n) \right) \right) \\ &= \frac{1}{XY - Z} \left( 1 - \exp \left( \frac{\zeta(2)}{2} (-2XY + 2Z) + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

系.  $Z = 0$  として

$$\begin{aligned} \sum_{r,s \geq 1} \zeta(\{1\}^{r-1}, s+1) Y^r X^s &= \frac{1}{XY} \left( 1 - \frac{\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)} \right). \\ &= \frac{1}{XY} \left( 1 - \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n) \frac{X^n + Y^n - (X+Y)^n}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

### 11. THE OHNO RELATION

定理 ([22]). 任意の許容的インデックス  $\mathbb{k}$  と  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{a})=n \\ \text{dep}(\mathbf{a})=\text{dep}(\mathbb{k})}} \zeta(\mathbb{k} + \mathbf{a}) = \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{k})=n \\ \text{dep}(\mathbf{b})=\text{dep}(\mathbb{k}^\dagger)}} \zeta(\mathbb{k}^\dagger + \mathbf{b})$$

例.  $\mathbb{k} = (3)$  とすると  $\mathbb{k}^\dagger = (1, 2)$  より

$$\zeta(3+n) = \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1, n_2 \geq 0}} \zeta(1+n_1, 2+n_2).$$

$\mathbb{k} = (3, 2)$  とすると  $\mathbb{k}^\dagger = (2, 1, 2)$  より

$$\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1, n_2 \geq 0}} \zeta(3+n_1, 2+n_2) = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1, n_2, n_3 \geq 0}} \zeta(2+n_1, 1+n_2, 2+n_3).$$

注意.  $\mathbb{k} = (k)$  として sum formula,  $n = 0$  として duality formula.

定理 ([27], [9]). 任意のインデックス  $\mathbb{k}$  と  $n \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{a})=n \\ \text{dep}(\mathbf{a})=\text{dep}(\mathbb{k})}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k} + \mathbf{a}) &= \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{b})=n \\ \text{dep}(\mathbf{b})=\text{dep}(\mathbb{k}^\vee)}} \zeta_{\mathcal{A}}((\mathbb{k}^\vee + \mathbf{b})^\vee), \\ \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{a})=n \\ \text{dep}(\mathbf{a})=\text{dep}(\mathbb{k})}} \zeta^*(\mathbb{k} + \mathbf{a}) \prod_{j=1}^{\text{dep}(\mathbb{k})} \binom{k_j + a_j + \delta_{j,1} - 2}{a_j} &= \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{b})=n \\ \text{dep}(\mathbf{b})=\text{dep}(\mathbb{k}^\dagger)}} \zeta^*((\mathbb{k}^\dagger + \mathbf{b})^\dagger), \\ \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{a})=n \\ \text{dep}(\mathbf{a})=\text{dep}(\mathbb{k})}} \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k} + \mathbf{a}) \prod_{j=1}^{\text{dep}(\mathbb{k})} \binom{k_j + a_j + \delta_{j,1} + \delta_{j, \text{dep}(\mathbb{k})} - 2}{a_j} &= - \sum_{\substack{\text{wt}(\mathbf{b})=n \\ \text{dep}(\mathbf{b})=\text{dep}(\mathbb{k}^\vee)}} \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k}^\vee + \mathbf{b}). \end{aligned}$$



$r = 2$  として

$$\begin{aligned} H_N^*(1, \{2\}^a, 1, \{2\}^b) &= 4 \sum_{0 < n_1 < n_2 \leq N} \frac{N!N!}{(N+n_2)!(N-n_2)!} \times \frac{1}{n_1^{2a+1}n_2^{2b+1}} \\ &\quad - 2 \sum_{0 < n \leq N} \frac{N!N!}{(N+n)!(N-n)!} \times \frac{1}{n^{2a+2b+2}}. \end{aligned}$$

注意. The two-one formula の左辺は任意のインデックスに拡張することが可能である ([31]<sup>1</sup>). その場合, 右辺には交代的多重和が現れる.

例.

$$\begin{aligned} \zeta^*(\{2\}^a) &= -2\zeta(\overline{2a}) \\ \zeta^*(\{2\}^a, 1, \{2\}^b) &= -4\zeta(\overline{2a}, 2b+1) - 2\zeta(\overline{2a+2b+1}) \\ \zeta^*(\{2\}^a, 1, \{2\}^b, 1, \{2\}^c) &= -8\zeta(\overline{2a}, 2b+1, 2c+1) - 4\zeta(\overline{2a+2b+2}, \overline{2c}) \\ &\quad - 4\zeta(\overline{2a+1}, \overline{2b+2c+1}) - 2\zeta(\overline{2a+2b+2c+2}) \\ \zeta^*(1, \{2\}^a, 3, \{2\}^b) &= 2\zeta(\overline{2a+2b+4}) + 4\zeta(\overline{2a+2}, \overline{2b+2}) \end{aligned}$$

#### 14. THE WEIGHTED SUM FORMULA

定理 ([25]).  $k \geq 3$  に対して

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 2}} 2^{k_2} \zeta(k_1, k_2) = (k+1)\zeta(k)$$

定理 ([26]).  $k, r \geq 1$  に対して

$$\sum_{\substack{k_1+\dots+k_{2r}=k \\ k_1, \dots, k_{2r} \geq 1}} \sum_{j=1}^r 2^{k_{2j}} \zeta(k_1, \dots, k_{2r-1}, k_{2r}+1) = \frac{1}{2}(k+2r)\zeta(k+1).$$

定理 ([10]). 任意の奇数  $d$  と  $1 \leq i \leq d$  に対して

$$\sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k \\ k_1, \dots, k_r \geq 1}} 2^{k_i} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r) = 0.$$

予想 ([10]). 任意の  $k, r \geq 1$  および  $a, b \in \mathbb{Q}$  に対して

$$\sum_{\substack{k_0+\dots+k_r=k \\ k_0, \dots, k_r \geq 1}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_0, \dots, k_r) (b^{k_0} - a^{k_0}) \prod_{i=1}^r (a+bi)^{k_i} = 0$$

特に  $(a, b) = (0, 1)$  と置けば

$$\sum_{\substack{k_0+\dots+k_r=k \\ k_0, \dots, k_r \geq 1}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_0, \dots, k_r) \prod_{i=1}^r i^{k_i} = 0.$$

#### REFERENCES

- [1] H. Bachmann and Y. Yamasaki, ‘Checkerboard style Schur multiple zeta values and odd single zeta values’, Math. Zeitschrift, 290 (3), 1173–1197.
- [2] D. J. Broadhurst, J. M. Borwein, and D. M. Bradley, ‘Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k’, Electronic J. Combinatorics 4(2) (1997), R5.
- [3] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, and P. Lisoněk, ‘Combinatorial aspects of multiple zeta values’, Electronic J. Combinatorics 5 (1998), R38 (12 pp).
- [4] D. Bowman and D. M. Bradley, ‘Resolution of some open problems concerning multiple zeta evaluations of arbitrary depth’, Compositio Math. 139 (2003), 85–100.

<sup>1</sup>arxiv に置いてあるバージョンは十分に一般的な形で主張が述べられていないことに注意.

- [5] S. Charlton, ‘The alternating block decomposition of iterated integrals, and cyclic insertion on multiple zeta values’, preprint 1703.03784[NT].
- [6] M. Eie, W-C. Liaw, and Y. L. Ong, ‘A restricted sum formula among multiple zeta values’, *J. Number Theory* 129 (2009), 908–921.
- [7] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, ‘Double zeta values and modular forms’, *Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa*, World Scientific, (2006), 71–106.
- [8] A. Granville, ‘A decomposition of Riemann’s zeta-function’, in *Analytic Number Theory*, Y. Motohashi (ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series 247, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 95–101.
- [9] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara, and S. Saito, ‘Ohno-type relations for classical and finite multiple zeta-star values’, preprint 1806.09299[NT].
- [10] H. Hirose, M. Murahara, and S. Saito, ‘Weighted sum formulas for multiple harmonic sums modulo primes’, preprint 1808.00844[NT].
- [11] M. Hirose and N.Sato, ‘Block shuffle identities for the multiple zeta values (tentative title)’, in preparation.
- [12] M. E. Hoffman, ‘Multiple harmonic series’, *Pacific J. Math.* 152 (1992), 275–290.
- [13] M. E. Hoffman, ‘Quasi-symmetric functions and mod  $p$  multiple harmonic sums’, *Kyushu J. Math.* 69 (2015), no. 2, 345–366.
- [14] M. E. Hoffman and Y. Ohno, ‘Relations of multiple zeta values and their algebraic expression’, *J. Algebra* 262 (2003), 332–347.
- [15] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, ‘Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values’, *Compositio Math.* 142 (2006), 307–338.
- [16] M. Kaneko and Y. Ohno, ‘On a kind of duality of multiple zeta-star values’, *Int. J. Number Theory* Vol.6-8 (2010), 1927–1932.
- [17] M. Kaneko and M. Sakata, ‘On multiple zeta values of extremal height’, *Bull. Aust. Math. Soc.* 93 (2016), 186–193.
- [18] G. Kawashima, ‘A class of relations among multiple zeta values’, *J. Number Theory* 129 (2009), 755–788.
- [19] Z. Li, ‘On a conjecture of Kaneko and Ohno’, *Pacific J. Math.* 257 (2012), 419–430.
- [20] S. Muneta, ‘On some explicit evaluations of multiple star-zeta values’, *J. Number Theory* 128 (2008), 2538–2548.
- [21] H. Murahara and M. Sakata, ‘On multiple zeta values and finite multiple zeta values of maximal height’, *Int. J. Number Theory* 14 (2018), 975–987.
- [22] Y. Ohno, ‘A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values’, *J. Number Theory* 74 (1999), 39–43.
- [23] Y. Ohno and N. Wakabayashi, ‘Cyclic sum of multiple zeta values’, *Acta Arithmetica* 123 (2006), 289–295.
- [24] Y. Ohno and D. Zagier, ‘Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height’, *Indag. Math. (N. S.)* 12 (2001), 483–487.
- [25] Y. Ohno and W. Zudilin, ‘Zeta stars’, *Commun. Number Theory Phys.* 2 (2008), 325–347; preprint MPIM2007-134.
- [26] Y. L. Ong, M. Eie, and W-C. Liaw, ‘On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values’, *Int. J. Number Theory* 9 (2013), 1185–1198.
- [27] K. Oyama, ‘Ohno-type relation for finite multiple zeta values’, *Kyushu Math. J.* (to appear); preprint 1506.00833[NT].
- [28] S. Saito and N. Wakabayashi, ‘Sum formula for finite multiple zeta values’, *J. Math. Soc. Japan* 67 (2015), 1069–1076.
- [29] J. Zhao, ‘Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums’, *Int. J. Number Theory* 4 (2008), 73–106
- [30] J. Zhao, ‘On a conjecture of Borwein, Bradley and Broadhurst’, *J. reine angew. Math.* 639 (2010), 223–233
- [31] J. Zhao, ‘Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta (star) families’, *J. Math. Soc. Japan* 68 (2016), 1669–1694.