ホッジ理論で次元評価したら失敗した件について

京都大学数理解析研究所　佐久川憲児

1　導入

本原稿は第２６回整数論サマースクール「多重ゼータ値」における同名講演の報告です.

1.1　計画

本サマースクールにおける大きな目標のひとつは, 多重ゼータ値のはる $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の次元評価の概要の解説です (Deligne-Goncharov–Terasoma の定理). ここでは, 直前の山本さんの講演までに明らかとなった情報とホッジ理論（これは良く知られている！）の結果を用いて次元評価を試みます. より具体的には, 以下のような戦略によって次元の評価を試みます:

Step 1 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ を混合ホッジ・テイト構造の圏から構成する.
Step 2 多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z}$ のホッジ理論的持ち上げである $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}$ を $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^{\vee}$ の部分空間[*1]として定義する.
Step 3 $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ の次元の評価をする（試みる）.

さて, 実際にこの方法によって次元評価を試みてみると, Step 1,2 は割合自然な方法によって目的は達成されますが, Step 3 がとんでもなく難しい (失敗する。。) ことになります. どういうことかというと, 混合ホッジ・テイト構造の圏があまりにも**「大きすぎる」**[*2]ので空間の次元が全く評価できないのです. この問題は次の萩原さんの稿により解消されることになります.

1.2　いいわけ

本稿は実話 (佐久川の) に基づいたものであり, 専門家 (佐久川) や関係者 (佐久川) の証言をもとに構成されています[*3]. このような失敗談をサマースクールでお話するのは少し問題があると思われるかたも多々いらっしゃると思いますので, ここではなぜこのような話をしようと考えたかを書きたいと思います.

一つ目の理由は, いきなりモチーフの話をすると話が (一見) 飛びすぎてしまうので, 軟着陸させる為にこの話をした, というものです. 実際に以下を見ていただければわかるように, 証明の途中までは全く同様にうまくいっており, しかも我々がこれから構成する多重ゼータの持ち上げは悪くない[*4]ものであるので, 紹介する価値はあるかと考えたわけです.

もう一つ, 実際にはこちらの方が圧倒的に大きな理由なのですが, モチーフを使わないようなアプローチも**あり得る**ということを伝えたかった, ということがあります. 講演中はあまり伝わらなかったと思いますので, 以下で講演者が当時どういったことを考えていたのかを書き記したいと思

[*1] 明らかではないが, 実際には**部分 $\mathbf{Q}$ 代数**の構造を持つ.
[*2] 勿論この時点ではこの言説は意味不明である. 第五章を見よ.
[*3] 勿論脚色されています. この方針では無理なことは最初からわかっていましたし, 実際にはより一般の周期について考察していました.
[*4] というよりモチーフ的多重ゼータ値と等価となります.

います．多重ゼータ値の理論は, 代数多様体の混合テイトモチーフの圏が存在するという**「奇跡」**に相当依っている部分があります[*5]．より具体的に言うと，（モチーフ的）多重ゼータ値のはる空間の構造を計算するためには, 現状では代数体の代数的 K 群の計算が少なくともテンソル $\mathbf{Q}$ すれば完全になされているという奇跡を利用するほかない, ということです．従って多重ゼータ値でできたような話を一般化しようと思うと (例えば楕円曲線でやる), 直ちにこの**「奇跡」**が起こらない, あるいは自ら起こさなくてはならない, という困難さに直面します[*6]．一方で最初から混合ホッジ構造の中だけで考えることにして, その「小さな部分圏」[*7]の中に最初から現れる対象を決めてしまう, という立場もあります．今回の我々の立場は陰にそのようなものであることは注意すべきでしょう．この立場だと「奇跡」を仮定する必要も無く, 途中までは話がうまくいくのですが, 実際には圏の構造を計算することが一般的には極めて困難[*8]なのです．ここで思い出してほしいのですが, この業界では伝統的に以下の問題が考察されてきました:

問題：多重ゼータ値のはる空間の次元を予想次元まで落とすような, 具体的な関係式を見つけよ．

ここまでの話を振り返れば, この問題は数論幾何的にも非常に興味深い問題であることが理解されるかと思います．言い換えれば, 「代数的 K 群の計算をしないで, $\mathbf{Z}$ 上の混合テイトモチーフの圏を構成せよ」という問題とも思えるのです．なので, もしこの問題が肯定的に解決されるならば, より高次元多様体から定まるモチーフの圏も奇跡抜きに構成できる可能性が生まれる[*9]... ような気がします．

このような立場・方法のさらなる発展形として, 近年「Nori の混合モチーフ」と呼ばれる, Voevodosky 等のモチーフとは異なるタイプのモチーフの研究が活発化しています．これに関しましては, 最近 Huber と Müller-Stach による教科書 [6] が出版されましたので, 興味がある読者は参照されると得るところ大かと思われます．

謝辞 このような講演をするようそそのかしてくださった愛知県立大学の田坂浩二氏に感謝申し上げます．また, 本稿の初稿を注意深く読んでくださり, 様々な誤植や間違いを指摘してくださった福岡工業大学の三柴善範氏に深く感謝申し上げます．

2 Q 混合ホッジ・テイト構造

定義 2.1. k を体とする．

(1) V を有限次元 k ベクトル空間とする．V の**上昇フィルター**とは, 部分空間の列

$$0 \subset \cdots \subset W_n V \subset W_{n+1} V \subset \cdots \subset V \tag{1}$$

であって, 十分大きな n では $W_n V = V$ となり, 十分小さな n では $W_n V = 0$ となるもののこととする．添え字が偶数でのみジャンプするとき, 即ち任意の m に対し $W_{2m} V = W_{2m+1} V$ であるとき, このフィルター付きベクトル空間は偶数で添え字付けら

[*5] 実際には奇跡ではなく恐らく必然ですが, 我々にそれを確かめるすべは今のところない (証明のアイデアもない!).
[*6] 代数的 K 群に関する, Beilinson-Soulé の消滅予想を解く, という極めて困難な仕事を実行しなくてはなりません...
[*7] 予想としてはモチーフの圏.
[*8] 具体的には例えば拡大群の計算が実行できない.
[*9] その結果これまで手がでなかった予想群に対する新しいアプローチが発生するかもしれません.

れている, ということにする.

(2) E, R を $\mathbf{R}$ の部分体とする. R 上の E 混合ホッジ・テイト構造とは,

– 偶数で添え字付けられた上昇フィルター付き E ベクトル空間 $H_{\mathrm{B}} = (H_{\mathrm{B}}, W_{\bullet}H_{\mathrm{B}})$,
– 二回合成すると恒等写像となる E 線型写像 $c = c_H \colon H_{\mathrm{B}} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{B}}$ (対合と呼ぶ),
– 次数付き R ベクトル空間 $H_{\mathrm{dR}} = \oplus_{j \in \mathbf{Z}} H_{\mathrm{dR},j}$,
– 比較同型と呼ばれる $\mathbf{C}$ ベクトル空間の同型

$$\mathrm{comp}^H_{\mathrm{B,dR}} \colon H_{\mathrm{dR}} \otimes_R \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{B}} \otimes_E \mathbf{C}$$

であって, 以下の条件 (a), (b) を満たす組 $H := (H_{\mathrm{B}}, c, H_{\mathrm{dR}}, \mathrm{comp}^H_{\mathrm{B,dR}})$ のことである.

(a) $\mathrm{comp}^H_{\mathrm{B,dR}}$ は任意の整数 i に対して同型

$$\bigoplus_{j \geq -i} H_{\mathrm{dR},j} \otimes_R \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} W_{2i} H_{\mathrm{B}} \otimes_E \mathbf{C}$$

を誘導する.

(b) $c_{\mathrm{B}}, c_{\mathrm{dR}}$ をそれぞれ, $\mathbf{C}$ の複素共役が引き起こす $H_{\mathrm{B}} \otimes_E \mathbf{C}$, $H_{\mathrm{dR}} \otimes_R \mathbf{C}$ 上の $\mathbf{R}$ 線型写像とする. このとき, 同型 $\mathrm{comp}^H_{\mathrm{B,dR}}$ による同一視のもとで, $(c \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{C}}) \circ c_{\mathrm{B}} = c_{\mathrm{dR}}$ が成立する.

R 上の E 混合ホッジ・テイト構造の間の射 $H \to H'$ とは二つの線型写像 $H_{\mathrm{B}} \to H'_{\mathrm{B}}$, $H_{\mathrm{dR}} \to H'_{\mathrm{dR}}$ の組であって, 各々の比較同型, 重さフィルトレーション, 対合, 次数と両立するものをさすことにする. R 上の E 混合ホッジ・テイト構造のなす圏を $\mathrm{MHT}_E(R)$ で表す*10. $E = R = \mathbf{Q}$ の時は単に $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ と書き, この対象を $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造と呼ぶことにする.

注意 2.2. $\mathrm{MHT}_E(R)$ は $E \cap R$ 線型アーベル圏となる.

講演の際は, この対象を複素共役付きの混合ホッジ・テイト構造と呼んでいたが, ここでは Fontaine–Perrin-Riou に従ってこのように呼ぶことにする. E, R と二つ $\mathbf{C}$ の部分体が出てくるが, この二つの果たしている役割は全く違う事に注意しておく. どういうことかというと, E はホッジ構造の「係数体」であり, 一方 R はホッジ構造の「定義体」である, ということである. *11 以下いくつか例を見てみる.

例 2.3.

(1) n を整数としたとき $\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}, \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}}$ を

$$\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}} := \mathbf{Q}(2\pi\sqrt{-1})^n \ (\subset \mathbf{C}),\ \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}} := \mathbf{Q}$$

により定める. さて $\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}$ 上のフィルトレーションを

$$0 = W_{-2n-2}\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}} \subset W_{-2n}\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}} = \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}$$

*10 通常のホッジ構造の定義については, 例えば [9] を参照されたい.

*11 個人的意見であるが, 筆者は定義体に関しては「〜上の」という言葉を使うべきであると考えているし, 係数体に対しては「〜線型」又は何もつけない方がまぎれが無いと思っている. 例えば虚二次体 K の整数環で虚数乗法をもつ, 代数体 F 上定義された楕円曲線 X から定まるモチーフ $h^1(X)$ は「F 上の K 線型モチーフ」と呼ぶほうが明らかに紛れが少ない. これを虚二次体上のモチーフというのは間違いの原因になるように思う.

で, 対合 c を複素共役から誘導されるものとし, $1 \in \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}} = \mathbf{Q}$ の次数は n であると定める. 更に, 比較同型は複素数体の積写像から誘導される同型

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{B,d}R}^{\mathbf{Q}(n)} \colon \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C} \xleftarrow{\sim} \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

を取る. この時, これらの組は $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造を定め, これを $\mathbf{Q}(n)$ と書くことにする. $n=0$ の時は特別に n を省略して書くのが普通である. 即ち, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0)$.

(2) 山本氏の講演に於いて出てきた三つ組みが $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造の一部となることを見よう. $X = \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}} \setminus \{0,1\} = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ とし, 非負整数 N を固定する. まず ${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi(X(\mathbf{C}); \mathbf{1}, \mathbf{0})]/J^{N+1}, \mathbf{Q})$ に上昇フィルトレーションを

$$W_{2j}({}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N}) := {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},j} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi(X(\mathbf{C}); \mathbf{1}, \mathbf{0})]/J^{j+1}, \mathbf{Q}),\ 0 \le j \le N$$

で定め, 更に対合 c を $X(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$ 上の複素共役から誘導される線型写像としてとる. また, ${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N} := L_N {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$ 上に次数付きベクトル空間の構造を, 次数 l 部分が

$${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N,l} := \bigoplus_{\alpha_i \in \{0,1\}} \mathbf{Q}\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\cdots\omega_{\alpha_l}$$

となるように定める. 山本氏の講演では比較同型と呼ばれる同型写像

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{dR,B}}^{{}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0},N}} := \mathrm{comp}_{\mathrm{dR,B}} \colon A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

がシャッフル正規化された逐次積分を用いて構成されていたことを思い出そう. このとき, これらのなす組

$${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0},N} := \left(\ {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N}, c,\ {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N}, \mathrm{comp}_{\mathrm{B,dR}}\right)$$

は $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造を定める. 更に N について帰納系をなしており, その帰納極限を

$${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}} := {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0}} := \varinjlim_{N} {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0},N}$$

と書くことにする.

(3) E, R を定義 2.1 と同様にとる. X を R 上の滑らかで有理的な[*12]代数多様体とする. このとき, 任意の非負整数 i に対して組

$$h^i(X/R; E) := \left(H^i_{\mathrm{B}}(X; E), H^i_{\mathrm{dR}}(X/R), R, \mathrm{comp}_{\mathrm{B,dR}}^{h^i(X/R;E)}\right)$$

を考えることにする. ただし, $H^i_{\mathrm{B}}(X; E)$ は位相多様体 $X(\mathbf{C})$ 上の定数層 E の i 次コホモロジー, $H^i_{\mathrm{dR}}(X/R)$ は R 上の代数多様体 X の代数的ド・ラームコホモロジー

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/R) := H^i\left(X, \Omega^{\bullet}_{X/R}\right)$$

であり, $\mathrm{comp}_{\mathrm{B,dR}}^{h^i(X/R;E)}$ はベッチ・コホモロジーとド・ラームコホモロジーの比較同型

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/R) \otimes_R \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{B}}(X; E) \otimes_E \mathbf{C}$$

[*12] この仮定はホッジ構造を混合テイト的にするためだけに使われています.

のこととする. このとき標準的方法で上のベクトル空間に重さフィルトレーションを定めることができ, また $H^i_{\mathrm{dR}}(X/R)$ にホッジフィルトレーションを定めることができる ([9, Theorem 4.2]). また R が複素共役で固定されるので, 複素共役 $c\colon \mathbf{C} \cong \mathbf{C}$ は位相多様体 $X(\mathbf{C})$ の自己同相写像を定め, 従ってコホモロジー $H^i_{\mathrm{B}}(X;E)$ への E 自己同型を定める. 明らかにこれは対合である. すると, 組 $h^i(X/R;E)$ は R 上の E 混合ホッジ・テイト構造を定める. 例えば,

$$h^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q};\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}(-1)$$

が成り立っている.

後の計算で使うので, 一次の拡大群だけ計算しておこう*13. H を $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造としたとき, 拡大群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, H)$ とは, $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ における拡大

$$0 \to H \to H' \to \mathbf{Q} \to 0$$

の同値類がなす群のことであった. 簡単のため真ん中の H'だ けでこの拡大を表すことにすると, 二つの拡大 H' と H'' が同値であるとは, 次の可換図式が存在するときに言うのであった:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "="] & H' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H \arrow[r] & H'' \arrow[r] & \mathbf{Q} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

任意の部分集合 $V \subset H_{\mathrm{B},\mathbf{C}} := H_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ に対し, V^+ で V に含まれかつ $(c \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{C}}) \circ c_{\mathrm{B}}$ で固定される元のなす V の部分集合を表すことにする:

$$V^+ := \{v \in V \mid (c \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{C}}) \circ c_{\mathrm{B}} v = v\}.$$

例えば, 定義から

$$\mathrm{comp}^H_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(H_{\mathrm{dR}})^+ = \mathrm{comp}^H_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(H_{\mathrm{dR}})$$

が成立している.

補題 2.4. H を $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造としたとき, $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の同型

$$\phi\colon \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, H) \xrightarrow{\sim} W_0 H^+_{\mathrm{B},\mathbf{C}} / \left(\mathrm{comp}^H_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(H_{\mathrm{dR},0}) + W_0 H^+_{\mathrm{B}}\right)$$

が存在する.

Proof. 証明は極めて標準的であるが (例えば [9, Theorem 3.31] 参照), 適当な文献を発見できなかったので, ここでは証明を与えたいと思う.

まず, $\mathbf{Q}$ の H による拡大

$$H' = (0 \to H \to H' \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbf{Q} \to 0)$$

が与えられたとき, 以下の二つの情報を選ぶ:

*13 この結果は最後の章まで使わないので, 忙しい人は読み飛ばしても結構です.

- 重さフィルトレーションと c の双方と両立するような pr_{B} の切断

$$s\colon \mathbf{Q}_{\mathrm{B}} \hookrightarrow H'_{\mathrm{B}}.$$

- 次数と両立するような $\mathrm{pr}_{\mathrm{dR}}$ の切断

$$e\colon \mathbf{Q}_{\mathrm{dR}} \hookrightarrow H'_{\mathrm{dR}}.$$

ここで $\phi(H', s, e) \in H_{\mathrm{B},\mathbf{C}}$ を以下の等式で定義する:

$$\phi(H', s, e) := \mathrm{comp}^{H'}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(e(1)) - s(1).$$

$\phi(H', s, e)$ が実際 $H_{\mathrm{B},\mathbf{C}}$ に含まれることは

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{B}} \circ \mathrm{comp}^{H'}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(e(1)) = \mathrm{comp}^{\mathbf{Q}}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{dR}}(e(1)) = 1$$

によりわかる. また, s と e の取り方から

$$\phi(H', s, e) \in W_0 H^{+}_{\mathrm{B},\mathbf{C}}$$

も容易にわかる. ここで, s, e の取り方にどのくらいの自由度があるかを考えよう. まず s であるが, 任意の $W_0 H^{+}_{\mathrm{B}}$ の元 v をとると,

$$s_v\colon \mathbf{Q}_{\mathrm{B}} \to H'_{\mathrm{B}};\quad 1 \mapsto s(1) + v$$

も再び s と同様の条件を満たし, また条件を満たすような切断はこのかたちのものしかないということがわかる. 次に e の取り方であるが, これも同様に任意の $w \in H_{\mathrm{dR},0}$ に対して e_w を

$$e_w\colon \mathbf{Q}_{\mathrm{dR}} \to H'_{\mathrm{dR}};\quad 1 \mapsto e(1) + w$$

で定めるとこれは e と同様の条件を満たし, 更に条件を満たす切断はこのかたちのものしかない. このような取り換えによって $\phi(H', s, e)$ がどのように変動するかは簡単に計算できて, 具体的には

$$\begin{aligned}\phi(H', s_v, e) &= \phi(H', s, e) - v,\\ \phi(H', s, e_w) &= \phi(H', s, e) + \mathrm{comp}^{H}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(w)\end{aligned}$$

が成立することが確かめられる. さて H'' を H' と同値であるような拡大として, $\alpha\colon H' \xrightarrow{\sim} H''$ を拡大の同値を与える $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造の同型とする. すると, 定義に従って計算すると

$$\phi(H', s, e) = \phi(H'', \alpha_{\mathrm{B}} \circ s, \alpha_{\mathrm{dR}} \circ e)$$

が成り立つことがわかる. そこで ϕ を

$$\phi([H']) := \phi(H', s, e) \mod \left(\mathrm{comp}^{H}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}(H_{\mathrm{dR},0}) + W_0 H^{+}_{\mathrm{B}}\right)$$

と定義すれば, これは拡大の同型類にしか依存しないので, 確かに補題に現れるような準同型を定めていることがわかる.

ϕ が全単射であることを示す．単射性は明らかなので，全射性を示そう．$v \in W_0 H^+_{\mathrm{B},\mathbf{C}}$ を一つとり，

$$H'_{\mathrm{B}} := \mathbf{Q}e_{\mathrm{B}} \bigoplus H_{\mathrm{B}}, \quad H'_{\mathrm{dR}} := \mathbf{Q}e_{\mathrm{dR}} \bigoplus H_{\mathrm{dR}},$$
$$\mathrm{comp}^{H'}_{\mathrm{B,dR}} \colon H'_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H'_{\mathrm{B},\mathbf{C}}; \quad (e_{\mathrm{dR}}, w) \mapsto (e_{\mathrm{B}}, v + \mathrm{comp}^{H}_{\mathrm{B,dR}}(w)) \tag{2}$$

を考える．ここで，$\mathbf{Q}e_{\mathrm{B}}$，$\mathbf{Q}e_{\mathrm{dR}}$ は形式的な基底 e_{B}，e_{dR} で生成される一次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間である．H'_{B} 上に対合 $c_{H'}$ を $(\mathrm{id}_{\mathbf{Q}e_{\mathrm{B}}}, c_H)$ で定めれば，これらの組は明らかな方法で拡大

$$0 \to H \to H'' \to \mathbf{Q} \to 0$$

を与えることがわかり，更にその拡大群の中で定める類の ϕ での像は v の像と一致することが構成から直ちにわかる．従って ϕ は全射で主張は示された． □

3 $\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$

定義 3.1. (1) $\bullet$ をシンボル B 又は dR とする．このとき，$\mathbf{Q}$ 線型アーベル圏の間の函手

$$\omega_\bullet \colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbf{Q}}$$

を $\omega_\bullet(H) := H_\bullet$ で定める．

(2) $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ で，$\mathbf{Q}$ 線型自然変換 $\omega_{\mathrm{dR}} \to \omega_{\mathrm{B}}$ の集合を表すことにする． 即ち，$\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ の元 α とは $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の対象で添え字付けられた，$\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の射と両立する線型写像

$$\alpha^H \colon \omega_{\mathrm{dR}}(H) := H_{\mathrm{dR}} \to \omega_{\mathrm{B}}(H) := H_{\mathrm{B}}$$

の集合 $\{\alpha^H\}_{H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}})}$ のことである．

(3) $\boldsymbol{k}$ をインデックスとしたとき，$\mathbf{Q}$ 線型写像

$$\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}) \colon \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}) \to \mathbf{Q}$$

を

$$\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})(\alpha) := (-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})} \langle \alpha^{{}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}}(\omega(\boldsymbol{k})), \mathrm{dch} \rangle \tag{3}$$

で定める[*14]．ここで，$\omega(\boldsymbol{k}) \in {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$ はインデックス $\boldsymbol{k}$ に対応する微分形式，dch は 0 から 1 までのまっすぐな道とし (山本氏の講演参照)，$\langle\ ,\ \rangle$ は自然なペアリング

$${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0}} \times \left({}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0}}\right)^\vee \to \mathbf{Q}$$

である．$\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$ で生成される $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee$ の $\mathbf{Q}$ 部分空間を $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}$ で表すことにする:

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{H}} := \sum_{\boldsymbol{k}:\text{indices}} \mathbf{Q}\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}) \subset \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee.$$

[*14] ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}$ はホッジ・テイト構造ではない (その順極限) が，以下の双対の定義により代入可能であることがわかる．

注意 3.2. 上の双対 $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{B}})^\vee$ は以下のようにして定義する. $\mathcal{C}_\lambda$ を $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の, 対象が有限個であるような忠実充満部分圏の族であって, $2\text{-colim}_\lambda\mathcal{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ を満たすものとし, $\omega_\bullet^\lambda$ で $\omega_\bullet$ の $\mathcal{C}_\lambda$ への制限をあらわすことにする. このとき

$$\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{B}})^\vee := \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}^\lambda,\omega_{\mathrm{B}}^\lambda)^\vee$$

で双対を定義する. 但し, 右辺に現れる双対は, 有限次元ベクトル空間の通常の双対である.

$\omega_{\mathrm{dR},k}\colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$ を ω_{dR} と次数 k 部分を取り出す函手の合成とする[*15]. すると, 定義から自然な直和分解

$$\omega_{\mathrm{dR}} = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \omega_{\mathrm{dR},k}$$

が存在し, これから再び自然な直和分解

$$\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{B}})^\vee = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{B}})_k^\vee = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR},k},\omega_{\mathrm{B}})^\vee \tag{4}$$

を得る. この直和分解は $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}$ の直和分解

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{H}} = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{Z}_{\mathrm{H},k} = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}_{\geq 0}} \sum_{\boldsymbol{k}:\mathrm{indices},\mathrm{wt}=k} \mathbf{Q}\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$$

を誘導することが定義から容易に確かめられる.

さて, 任意の可換環 R と $\bullet = \mathrm{B}$ 又は dR に対して, 函手 $\omega_{\bullet,R}$ を $\omega_\bullet$ の R 線型拡張とする:

$$\omega_{\bullet,R}\colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Mod}_R; \quad H \mapsto H_\bullet \otimes_{\mathbf{Q}} R.$$

また, $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR},R},\omega_{\mathrm{B},R})$ を上と同様に $\omega_{\mathrm{dR},R}$ と $\omega_{\mathrm{B},R}$ の間の R 線型な自然変換のなす集合とする. すると, 定義より $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の各対象 H に備え付けられている比較写像 $\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}^H$ のなす集合

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}} := \{\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}^H\}_{H\in\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}$$

は $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR},\mathbf{C}},\omega_{\mathrm{B},\mathbf{C}})$ の元を定めている. さて, $\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}}$ から定まる代入写像 comp^* を

$$\mathrm{comp}^*\colon \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{B}})^\vee \to \mathbf{C}; \quad F \mapsto F(\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\mathrm{dR}})$$

で定める.

命題 3.3. 任意のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{comp}^*(\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\boldsymbol{k}).$$

但し右辺はシャッフル正規化多重ゼータ値とする.

Proof. 山本氏の原稿の例 3.3 と構成から明らか. □

[*15] これはファイバー函手ではない.

言い換えると, 我々は次の可換図式を得たことになる:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{H}^1 \arrow[rr, "\zeta^{\mathrm{H}}"] \arrow[dr, "\zeta_{Ш}"'] & & \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^{\vee} =: \mathcal{O}(P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}}) \arrow[dl, "\mathrm{comp}^*"] \\ & \mathbf{R}. & \end{tikzcd} \tag{5}$$

$\mathfrak{H}^1$ はいわゆる Hoffman 代数 $\mathfrak{H}$ のインデックスたちに対応する部分代数としており, 唐突に現れた $P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}}$ については後で解説するが一言でいえばド・ラーム側からベッチ側への「道のホモトピー類」のなす空間である. 今 $\mathfrak{H} = {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$ と見做している. この図式から, ζ^{H} はシャッフル正規化多重ゼータ値のホッジ理論的持ち上げと呼ぶにふさわしいものであることが了解されるかと思う.

注意 3.4. 定義から $\mathfrak{H}^1$ 上でしか ζ^{H} は定義されていないが, 定義式 (3) の右辺には明らかにインデックスに対応する微分形式 $\omega(\boldsymbol{k})$ 以外の任意の ${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}} = \mathfrak{H}$ の元も**代入可能**なので, 上の図式は

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}} = \mathfrak{H} \arrow[rr, "\zeta^{\mathrm{H}}"] \arrow[dr, "\zeta_{Ш}"'] & & \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^{\vee} =: \mathcal{O}(P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}}) \arrow[dl, "\mathrm{comp}^*"] \\ & \mathbf{R} & \end{tikzcd} \tag{6}$$

まで拡張できる. 記号の濫用ではあるが, 現れる写像は全て同じ記号であらわすことにする.

4 淡中圏

以下アファイン群スキームの基礎知識は仮定する. 詳細は例えば [11] を参照されたい. [3] も参考となるかと思われる. $\mathcal{T}$ を $\mathbf{Q}$ 線型アーベル圏としたとき, $\mathcal{T}$ の**結合的, 単位的かつ可換なテンソル構造**とは, $\mathbf{Q}$ 双線型函手

$$\otimes\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

と単位的対象 $\mathbf{1}$ の組 $(\otimes, \mathbf{1})$ であって「結合法則」を満足し $\mathbf{1}$ が $\otimes$ の「単位元」となり, 更に「可換」となるときに言った. 正確な定義は [3] を参照されたい. 本稿に於いて現れるテンソル構造は全て「結合的」, 「単位的」かつ「可換」であるので, 以下この三つの言葉は全て省略してしまうことにしよう. $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ を $\mathbf{Q}$ 線型テンソリアルアーベル圏と呼ぶ. 更に記号を軽くするために後ろの $\otimes$ と $\mathbf{1}$ は省略してしまうことにする.

$\mathcal{T}$ を $\mathbf{Q}$ 線型テンソリアルアーベル圏で, 任意の二つの対象 X, Y に対し $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ が有限次元 $\mathcal{K}$ ベクトル空間となるようなものとする. V, W を $\mathcal{T}$ の対象とする. このとき, 函手

$$\mathcal{T} \to \mathrm{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbf{Q}}; \quad V' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(V' \otimes V, W) \tag{7}$$

が表現可能であるとき, (7) を表現する対象を V と W の**内部準同型**とよび, $\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$ と書く. $W = \mathbf{1}$ のときには慣例に従って $V^{\vee} := \underline{\mathrm{Hom}}(V, \mathbf{1})$ と書き, V の双対と呼ぶことにする.

定義 4.1. $\mathbf{Q}$ **線型ニュートラル淡中圏**とは, $\mathbf{Q}$ 線型テンソリアルアーベル圏であって以下の条件を満たすもののことをいう:

Ref 任意の対象 V, W に対して, 内部準同型 $\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$ は存在し, 自然な射

$$V \to (V^\vee)^\vee$$

は同型.

Rig 任意の対象 V, W に対し, 自然な射

$$V^\vee \otimes W \to \underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$$

は同型であり, 更に双対を取る操作とテンソル積は函手的に可換である:

$$(V \otimes W)^\vee \cong V^\vee \otimes W^\vee.$$

Fib 自然な射 $\mathbf{Q} \to \mathrm{End}(\mathbf{1})$ は同型であり, 完全でテンソル構造を両立させる $\mathbf{Q}$ 線型函手

$$\omega \colon \mathcal{T} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$$

が存在する. このような函手のことを**ファイバー函手**と呼ぶ.

例 4.2. (1) $\mathrm{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$ を有限次元次数付き $\mathbf{Q}$ ベクトル空間とすると, これは $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏となる. 次数を忘れる函手はファイバー函手となっている.

(2) 前前節に於いて現れた $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏であり, 二つの函手

$$\omega_{\mathrm{dR}},\ \omega_{\mathrm{B}} \colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$$

はそのファイバー函手となっている.

定理 4.3 (淡中圏論の基本定理)**.** $\mathcal{T}$ を $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏とし, ω, ω' を $\mathcal{T}$ のファイバー函手とする.

(1) 函手 $P_{\omega',\omega} \colon \mathrm{Alg}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Set}$ を

$$P_{\omega',\omega}(R) := \{\alpha \in \mathrm{Hom}_R(\omega_R, \omega'_R) \mid \alpha\text{はテンソル構造と両立する}\}$$

で定めると, これは $\mathbf{Q}$ 上のアファインスキームとなる. 特に $\omega = \omega'$ の時には $P_{\omega,\omega}(R) = \mathrm{Aut}^{\otimes}_{\mathcal{T}}(\omega)(R)$ に自然な群構造が入るので, $G_\omega := P_{\omega,\omega}$ は $\mathbf{Q}$ 上のアファイン群スキームとなる. 更に, 自然な同型

$$\mathcal{O}(P_{\omega',\omega}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\omega, \omega')^\vee \tag{8}$$

が存在する.

(2) ファイバー函手 ω は圏同値

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(G_\omega); \quad V \mapsto \omega(V)$$

を誘導する. G_ω はしばしば $\pi_1(\mathcal{T}, \omega)$ と書かれ, **ω を基点とする $\mathcal{T}$ の淡中基本群**と呼ばれる.

(3) G をアファイン群スキームとする. $\mathcal{T} = \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(G)$ で ω が忘却函手であるとき, G と $\pi_1(\mathcal{T}, \omega)$ は自然に同型となる.

例 4.4. $\mathcal{T} = \mathrm{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$, $\omega = \omega_f :=$ 忘却函手であるとき,

$$\pi_1(\mathrm{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}, \omega_f) = \mathbf{G}_m$$

となる. 上の定理から, 有限次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間に次数を付けることと $\mathbf{G}_m$ の作用を考える事は同値となることがわかる. 具体的な対応については萩原氏の報告集も参照されたい.

アファインスキーム $P_{\omega',\omega}$ が $\mathbf{Q}$ 有理点 t をもつならば, アファインスキームの同型

$$G_\omega \xrightarrow{\sim} P_{\omega',\omega}; \quad \sigma \mapsto t \circ \sigma \tag{9}$$

が存在する.

例 4.5. $\mathcal{T}$ として $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ を, ω, ω' として $\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}$ をとろう. また, $\mathbf{Q}$ 上のアファイン (resp. 群) スキーム $P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}}$ (resp. $G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}}$) を

$$P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}} := P_{\omega_{\mathrm{B}},\omega_{\mathrm{dR}}}, \quad G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} := G_{\omega_{\mathrm{dR}}}$$

で定義する. すると, 定理 4.3 (1) より, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^{\vee} \cong \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}})$$

が存在する. 実は $P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}}$ には $\mathbf{Q}$ 有理点が稠密に存在し, 適当にそのなかのどれかを選べば関数環の次数を保つ同型

$$G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} \xrightarrow{\sim} P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}} \tag{10}$$

が存在することがわかる. 従って上の二つの事実を合わせると, $\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}})_k^{\vee}$ の次元を評価することと $\mathcal{O}(G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})_k$ の次元を評価することは同値であることがわかる[*16].

観察 4.6. $\mathcal{O}(G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})_k$ が仮に次元が小さい $\mathbf{Q}$ ベクトル空間であれば, その部分空間である $\mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$ も次元が小さい $\mathbf{Q}$ ベクトル空間である.

5 $\mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$ の評価への挑戦

まず冪単代数群 U が与えられているとする.

補題 5.1. 次の自然な同型が存在する:

$$\mathcal{O}(U) \cong \widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Lie}(U))^*.$$

但し $\widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Lie}(U))$ は $\mathrm{Lie}(U)$ の完備普遍包絡環とし, $*$ は位相双対を意味する (付録 A 参照).

この補題より, U の関数環を調べることと $\mathrm{Lie}(U)$ を調べることは同値である. さて, G を $\mathbf{Q}$ 上のアファイン群スキームであって半直積

$$G = U \rtimes \mathbf{G}_m \tag{11}$$

で書けているものとする.

[*16] 次数については (4) を参照.

補題 5.2. 任意の非負整数 i に対して次の $\mathbf{G}_m$ 加群としての自然な同型が存在する:

$$H^i(\mathrm{Lie}(U)) := H^i(\mathrm{Lie}(U), \mathbf{Q}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(G)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n). \tag{12}$$

ここで, $\mathbf{Q}(n)$ に G は自然な全射 $G \twoheadrightarrow \mathbf{G}_m$ を経由して作用しているとする.

Proof. 明らかに同型

$$H^0(\mathbf{G}_m, H^i(\mathrm{Lie}(U)) \otimes \mathbf{Q}(n)) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(G)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$$

を任意の整数 n に示せば十分である. まず, U が冪単であることから自然な $\mathbf{Q}$ 線型圏アーベル圏の同値

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathrm{Lie}(U)) \cong \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(U)$$

があることに注意する. ここで $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathrm{Lie}(U))$ は有限次元 $\mathrm{Lie}(U)$ 加群のなす圏とする. 詳細は付録 A, B を参照していただきたい. これから, 自然な同型

$$H^0(\mathbf{G}_m, H^i(\mathrm{Lie}(U)) \otimes \mathbf{Q}(n)) \cong H^0(\mathbf{G}_m, H^i(U) \otimes \mathbf{Q}(n))$$

が導かれる. 但し, $H^i(U)$ は U の自明表現 $\mathbf{Q}$ から定まる標準複体 $\mathcal{C}^\bullet(U, \mathbf{Q})$ (定義は [5, (3.2)] 参照) の i 番目のコホモロジーとして定義されるベクトル空間であり, 自然な同型

$$H^i(U) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(U)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$$

が存在する. さて, ここで Grothedieck スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{G}_m, H^q(U) \otimes \mathbf{Q}(n)) \Rightarrow H^{p+q}(G, \mathbf{Q}(n))$$

を考える. $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{G}_m)$ が反単純なアーベル圏, 即ち任意の対象が単純対象の直和に分解する, という圏であるので $\mathbf{G}_m$ の高次のコホモロジーは消えていることに注意すると, 上のスペクトル系列は E_2 で退化し, 更に同型

$$H^0(\mathbf{G}_m, H^q(U) \otimes \mathbf{Q}(n)) \cong H^q(G, \mathbf{Q}(n))$$

を得る. 右辺は $\mathbf{Q}$ 線型アーベル圏 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(G)$ における拡大群を計算するので, 欲しい同型が得られた. □

さて, $i = 1, 2$ の時にリー代数のコホモロジー $H^i(\mathrm{Lie}(U))$ の意味を思い出す. まず $i = 1$ の時, 自然な全射

$$\mathrm{Lie}(U) \twoheadrightarrow H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee \tag{13}$$

が存在する. 更に, (13) は次のような性質を持っている:

(**Gen**) $\{l_i\}_i \subset \mathrm{Lie}(U)$ を (13) での像が一次独立でベクトル空間 $H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee$ を生成しているのであれば, $\{l_i\}$ は $\mathrm{Lie}(U)$ を生成する.

即ち, $H^1(\mathrm{Lie}(U))$ は $\mathrm{Lie}(U)$ の極小生成系のはるベクトル空間の双対と同一視できる. 次に $i = 2$ の時を考えよう. $H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee$ の基底 $\{l_i\}_i$ を一つ固定し, それらで生成される自由リー代数を $\mathfrak{f}$ と書くことにする. 性質 (Gen) から, 自然な全射

$$\mathfrak{f} \twoheadrightarrow \mathrm{Lie}(U) \tag{14}$$

が存在するが, この核を $\mathfrak{r}$ とかくことにしよう[*17]. すると自然な同型

$$(\mathfrak{r}/[\mathfrak{f},\mathfrak{r}])^{\vee} \cong H^2(\mathrm{Lie}(U)) \tag{15}$$

が存在することが示せる. (15) の左辺の双対の中身は $\mathrm{Lie}(U)$ の**本質的な関係式のなす空間**とみなせることに注意すれば, $H^2(\mathrm{Lie}(U))$ は $\mathrm{Lie}(U)$ **の本質的な関係式の双対空間**と同一視できることがわかる. この事実の証明を知りたい読者は付録 A を参照されたい (定理付録 A.19).

さて, もともとの状況に戻ることにする. U_{dR} を $G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}}$ の副冪単根基としたとき, 自然な同一視

$$G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}} = U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}} \rtimes \mathbf{G}_m \tag{16}$$

が存在することが知られている. $\mathbf{Q}(1)$ を含む $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の忠実充満部分**淡中圏**の族 $\mathcal{C}_i$ であって,

$$2\text{-colom}_i\mathcal{C}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$$

を満たし, 更にその淡中基本群が代数群となるようなものを取ることにする[*18]. $\mathbf{Q}(1)$ が $\mathcal{C}_i$ の対象であるから, ある冪単代数群 U_i があって

$$\pi_1(\mathcal{C}_i) = U_i \rtimes \mathbf{G}_m$$

と書け, 自然な同型

$$U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i U_i, \quad \mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathrm{Lie}(U_i) \tag{17}$$

が成立することは容易に確かめられる. リー代数 $\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})$ の位相はこの同型によって右辺に離散位相の逆極限位相を入れたものと一致していることに注意しておく. 従って, $\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})$ の極小位相的生成系は

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})) &:= \varinjlim_i H^1(\mathrm{Lie}(U_i)) \\ &\cong \varinjlim_i \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_i}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \\ &\cong \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \end{aligned} \tag{18}$$

の位相的双対と同一視でき, それらの間の関係式の位相双対は

$$\begin{aligned} H^2(\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})) &:= \varinjlim_i H^2(\mathrm{Lie}(U_i)) \\ &\cong \varinjlim_i \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}_i}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \\ &\cong \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{Q}(-n) \end{aligned} \tag{19}$$

と同一視できる. 但し, これら二つの $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の位相は各々の二行目に現れる順極限によって定義している[*19]. 以上から, $\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})$ の構造を決定するためには $\mathbf{Q}$ 混合ホッジ・テイト構造の圏における拡大群を計算すればよいことがわかる. 実際に計算してみると以下のようになる:

[*17] つまりこれは生成元たちの間の関係式のなす空間である.

[*18] このような族は存在する. 証明は難しくないので演習問題とする.

[*19] 極限の中に現れる各直和成分は $\mathbf{Q}$ ベクトル空間として全て有限次元であることは明らか.

補題 5.3. (1) 任意の整数 n に対し, $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$ は消滅する.

(2) 任意の**非正**整数 n に対し, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$ は消滅する.

(3) 任意の 1 以上の整数 n に対し, 以下の自然な同型が存在する:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \xleftarrow{\sim} \left(\mathbf{C}/(2\pi\sqrt{-1})^n\mathbf{Q}\right)^+ . \tag{20}$$

Proof. 主張の (2) と (3) は補題 2.4 の直接の帰結である. 同じ補題より, 任意の $\mathbf{Q}$ ホッジ・テイト構造の全射 $H_1 \twoheadrightarrow H_2$ は拡大群の間の全射

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, H_1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, H_2)$$

を誘導することがわかる. 実際 + を取る操作は明らかに全射を保つからである. (1) の主張はこの事実と [9, Lemma A.33] から直ちにわかる (系付録 A.14 の証明も参照されたい). □

系 5.4. $\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})$ は $\mathbf{Q}$ 上非可算生成自由リー代数の副冪零完備化と同型である. 更に, 任意の正整数 k に対して $\mathcal{O}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})_k$ は非可算次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間である. 特に

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_{\mathrm{H},k} \leq \aleph.$$

従って, 残念ながらこの方法では $\mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$ が有限次元であることさえ帰結されない[*20]!

6 まとめ, なぜ混合テイトモチーフなのか

(現実) 「**大きな**」圏=拡大群の次元が大きな淡中圏 $\Rightarrow \mathcal{O}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})_k$ が巨大 ⇒MZVs は評価できない.

$$\updownarrow$$

(理想) 「**小さな**」圏=拡大群の次元が小さな淡中圏 ⇒ "$\mathcal{O}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})_k$" が小さい ⇒MZVs が評価できるかも?

適切な $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の小さな部分圏を見つければ, 「同様な方法」で多重ゼータ値を持ち上げることにより次元評価ができる[*21]. この目的に適しているのが**混合テイトモチーフの圏**である (萩原氏の講演参照).

注意 6.1. $\mathcal{Z}_{\mathrm{mot},k}$ を重さ k のモチーフ的多重ゼータ値の空間とすると, 自然な同型

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{mot},k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$$

が存在する. 実は我々の構成した持ち上げ自体は非常に**良い**ものなのである. この事実は混合テイトモチーフの圏からのホッジ実現函手が忠実充満であり, 更にその本質的像は部分対象を取る操作に対し閉じているという事実 ([2, Proposition 2.14]) から従う.

付録 A リー代数コホモロジー

この章では本文中で証明無しで使われたリー代数の結果を証明する. 記述を簡素にするために, 以下では導来圏に関する基本事項を仮定しておく. それらに関する参考書として [8] を挙げておく.

[*20] 重さ k の指数は有限個しかないのだから, 有限次元であることは明らかなのである.

[*21] 実際にはより難しい. $\mathbf{G}_m$ の部分が実はかなり悪さをするので, 「部分コンパクト化」することによりその悪い部分を消しておく必要がある.

以下 k は標数 0 の体とする．**リー k 代数**とは, k ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ と, 反射律とヤコビ律を満たすようなリー括弧積と呼ばれる k 双線型写像

$$[\ ,\ ] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

の組 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ のことであった．通常の記法に従って, 括弧積の方は省略して書くことにしよう．

定義 付録 A.1. $\mathfrak{g}$ 加群とは, k ベクトル空間 V と V への $\mathfrak{g}$ の作用, 即ちリー代数の射

$$a \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(V)$$

の組 (V, a) のことである．但し, $\mathrm{End}_k(V)$ 上のリー括弧積は

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \mathrm{End}_k(V)$$

で定めている．簡単のため, a は省略することにする．V_1, V_2 を $\mathfrak{g}$ 加群としたとき, V_1 から V_2 への $\mathfrak{g}$ 加群としての射とは, k 線型写像

$$V_1 \to V_2$$

であって $\mathfrak{g}$ の作用と可換となっているもののことをさす．$\mathfrak{g}$ 加群 V が有限次元であるとは, k 上有限次元であるときに言う．$\mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ 加群の圏を, $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathfrak{g})$ で有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群の圏を表すことにする．

簡単な例を見てみよう．

例 付録 A.2. (1) k と零射

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(k) = k$$

の組のことを自明な $\mathfrak{g}$ 加群と呼び, k とかく．

(2) $\mathfrak{g}$ に $\mathfrak{g}$ の作用をアジョイント作用で定義する:

$$\mathrm{Ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathfrak{g}); \quad X \mapsto [X, -].$$

これは $\mathfrak{g}$ 加群 $(\mathfrak{g}, \mathrm{Ad})$ を定める．

もう一つ重要な概念を定義しよう．

定義 付録 A.3. $\mathfrak{g}$ 加群 V が**代数的である**とは, V が有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群の順極限として書けるときにいう．言い換えれば, V が代数的であるとは, 条件

$$\dim_k \langle v \rangle_{\mathfrak{g}} < +\infty,\ \forall v \in V$$

が成立するときに言う．ここで, $\langle v \rangle_{\mathfrak{g}}$ は v を含む最小の部分 $\mathfrak{g}$ 加群のこととする．$\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})$ で代数的な $\mathfrak{g}$ 加群のなす圏をあらわすことにする．

定義から k 線型アーベル圏の “包含関係”

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$$

があることがわかる．

注意 付録 A.4. (1) $\mathfrak{g}$ が 0 でない限り $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathfrak{g})$ は十分豊富に単射的対象をもたない．一方で $\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}), \mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$ はいわゆる Grothendieck のアーベル圏 ([8, Definition 8.3.24]) とよばれるものになることが確かめられるので, 十分豊富に単射的対象を持つことが分かる ([8, Theorem 9.6.2]).

(2) $\mathfrak{g}$ が有限生成であるならば, 任意の $\mathfrak{g}$ 加群は代数的である．即ち

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(\mathfrak{g}).$$

一般にはこの二つは圏同値にならない.

V_1, V_2 を $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$ の対象としたとき, $V_1 \otimes_k V_2$ に $\mathfrak{g}$ の作用を

$$X(v_1 \otimes v_2) := Xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Xv_2$$

で定義する．また, k ベクトル空間としての準同型がなす空間 $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$ に $\mathfrak{g}$ の作用を

$$Xf\colon V_1 \to V_2; \quad v \mapsto Xf(v) - f(Xv)$$

で定める．この $\mathfrak{g}$ 加群のことを, 内部準同型と呼ぶことにする．$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fg}}(\mathfrak{g})$ は明らかに上で定めたテンソルと内部準同型に対して閉じている．一方で $\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})$ はテンソルで閉じるが, 内部準同型では一般には閉じないことに注意しよう．しかし, V_1 が有限次元であれば $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$ は再び代数的となる.

リー代数コホモロジーを定義しよう．函手

$$H^0(\mathfrak{g}, -)\colon \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Vec}_k$$

を

$$H^0(\mathfrak{g}, V) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}(k, V)$$

で定義する．$H^0(\mathfrak{g}, -)$ は左完全函手であることが確かめられる.

定義 付録 A.5. i を非負整数とする．このとき函手

$$H^i(\mathfrak{g}, -)\colon \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Vec}_k$$

を $H^0(\mathfrak{g}, -)$ の i 次右導来函手として定める.

リー代数コホモロジーのより具体的な表示を与えよう．$\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\,(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g})$$

で定義する．ここで $T(\mathfrak{g})$ は k ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ から定まるテンソル代数

$$T(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overbrace{\mathfrak{g} \bigotimes_k \cdots \bigotimes_k \mathfrak{g}}^{n}$$

とし, $(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g})$ は $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ 達で生成される $T(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとする．自明ではないが $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ とみなせ, リー代数準同型 $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(V)$ は k 代数の準同型 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V)$ へ一意的に延長される．この対応により, 我々は函手

$$\mathrm{Mod}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \tag{21}$$

を得るが, これは圏同値を与えている. 実際, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 加群 V が与えられたとしたとき, $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の各元の V への作用を定義すると, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の定義からこれは $\mathfrak{g}$ の作用を定義しており, この自然な対応が擬逆函手を与える. 例えば左からの積により $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を自分自身の左加群とみなしたとき, 対応する $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ への作用は単に左からの掛け算

$$X \cdot \xi := X\xi, \quad X \in \mathfrak{g},\ \xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

により与えられている. さて, (21) によって $\mathrm{Mod}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ にも自然なテンソル構造を入れることが出来るが, それは具体的に表記すると以下のようになっている. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の余積 $\Delta\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ を

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

を満たすただ一つの k 代数の準同型として定義する. V_1, V_2 を $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 加群としたとき, そのテンソル $V_1 \otimes_k V_2$ 上に $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の作用を

$$\xi(v_1 \otimes v_2) := \Delta(\xi)(v_1 \otimes v_2), \quad \forall \xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

で定義する. Δ の定義からこれが well-defined であることと (21) と両立的であることがわかる. また, オーギュメンテーション写像と呼ばれる環準同型 aug を

$$\mathrm{aug}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to k; \quad \mathfrak{g} \ni X \mapsto 0$$

を満たすように定める. すると組 $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \Delta, \mathrm{aug})$ はホップ k 代数となることが容易に確かめられる. これから, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の k 双対

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\vee} := \mathrm{Hom}_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), k)$$

には自然にホップ k 代数の構造が入る. しかも, Δ の定義からこの積構造は**可換**である.

代数的な $\mathfrak{g}$ 加群を扱う際には, この普遍包絡環を完備化する必要がある.

定義 付録 A.6. $\mathfrak{g}$ の完備普遍包絡環 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ は以下の射影極限で定義される位相 k 代数のことである:

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) := \varprojlim_{I} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I.$$

ここで I は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の余次元有限両側イデアルを走り, $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ には各有限次元商には離散位相を入れてその射影極限位相が入っているとみなして位相環だと思うことにする.

定義から, $\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})$ は $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ が連続に作用する離散位相付き k ベクトル空間の圏と同値となっている. 特に, 任意の有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群 V が与えられたとき, 作用 $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(V)$ は自然な連続環準同型

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V) \tag{22}$$

に伸びる. 但し $\mathrm{End}_k(V)$ には離散位相を入れている. 以下では任意の有限次元ベクトル空間に対して「その位相」と言うときは, 離散位相をさすことにしよう. 以前定義した Δ, aug はこの完備化された普遍包絡環に自然に伸びることに注意しておこう.

$$\Delta\colon \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \hat{\otimes}_k \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{aug}\colon \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to k.$$

但し $\hat{\otimes}$ は完備テンソル積のこととする:

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})\hat{\otimes}_k\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) := \varprojlim_{I,I':\text{余次元有限両側イデアル}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'.$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の場合と同じ様に, $(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), \Delta, \mathrm{aug})$ は位相ホップ k 代数となることが確かめられる. $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ の連続双対 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ を

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^* := \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), k)$$

で定義することにする[22]と, $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ が可換ホップ k 代数の構造を持つことは明らかであろう. また位相の定義により $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ は代数的な $\mathfrak{g}$ 加群となっている.

補題 付録 A.7. V を一次元 $\mathfrak{g}$ 加群とし, $\nu\colon \mathfrak{g} \to k = \mathrm{End}_k(V)$ を与えられた作用とする. これから誘導される連続準同型 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to k$ も同様の記号 ν で表すことにしよう. このとき, $\nu \in \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ は可換環 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ の単元である.

Proof. $-\nu\colon \mathfrak{g} \to k = \mathrm{End}(V)$ を ν に -1 を掛けて得られるリー代数射とする. 一般にはリー代数の射の -1 倍はリー代数の射ではないが, k がアーベルなリー代数であるのでこのような操作をしても差し支えないことに注意しよう. 前と同様に

$$-\nu\colon \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to k$$

で誘導される連続準同型を表すことにしよう. すると, $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ の積の定義から ν と $-\nu$ の積は零射

$$0\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\} \subset k = \mathrm{End}(V)$$

から誘導される連続環準同型であることがわかり, それはすなわちオーギュメンテーションである:

$$(\nu) \times (-\nu) = \mathrm{aug} \in \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*.$$

aug は環 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ の乗法に関する単位元であったので, 主張は示せた. □

補題 付録 A.8. 任意の代数的 $\mathfrak{g}$ 加群 V と正の整数 n に対して, $\mathfrak{g}$ 加群 $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes}n}, V)$ は単射的 $\mathfrak{g}$ 加群である.

Proof. 以下の証明は Fontaine による議論 ([4, Proposition 1.4.2]) を参考にした. n が 2 以上のとき, 自然なアジョイント射

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes}(n-1)}, V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes}n}, V)$$

は $\mathfrak{g}$ の作用と両立的であることが分かる. 従って $n=1$ の場合に主張を示せば十分である. ここで, 任意の有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群の順系 $\{V_j\}_{j\in J}$ の極限としてかける $\mathfrak{g}$ 加群 $V = \varinjlim_{j\in J} V_j$ と代数的 $\mathfrak{g}$ 加群の順系 $\{W_i\}_{i\in I}$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}\left(V, \varinjlim_{i\in I} W_i\right) \cong \varprojlim_{j\in J} \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}(V_j, W_i)$$

[22] 勿論 k には離散位相が入っていると考えている.

が成立していることに注意する．W_i が単射的であるならば j についての射影系 $\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}(V_j, W_i)$ は Mittag-Leffler 条件を満たしていることに注意すれば，函手 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}\left(-, \varinjlim_{i\in I} W_i\right)$ は完全函手であることがわかる．即ち，$\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})$ に於いては単射的対象は順極限で保たれることがわかる．従って最初から V は有限次元であると仮定してよい．

V^{f} で V から $\mathfrak{g}$ 作用を自明にして得られる $\mathfrak{g}$ 加群を表すことにする．さて，$v \in V$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)$ の元 f_v を $f_v(1) := v$ で定義する．すると，明らかに対応 $v \mapsto f_v$ は $\mathfrak{g}$ 加群の間の単射

$$V^{\mathrm{f}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V) \subset \mathrm{Hom}_{k}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)$$

を定める．この射を自然に伸ばして得られる $\mathfrak{g}$ 加群の射

$$V^{\mathrm{f}} \otimes \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^* \to \mathrm{Hom}_{k}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V); \quad v \otimes f \mapsto [u \mapsto f(u)uv] \tag{23}$$

を考えよう．これが同型である事が示せれば任意の $\mathfrak{g}$ 加群 W に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}(W, \mathrm{Hom}_{k}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), k) \otimes_k (W^{\vee} \otimes_k V)^{\mathrm{f}}$$

が成立するので，(23) の右辺は単射的対象であることがわかる．

以下 (23) の同型性を示そう．$\mathcal{R} := \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^*$ と置き，以下自然な同型

$$\mathcal{R} \otimes_k V = \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^* \otimes_k V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), V)$$

によりこれら二つの k ベクトル空間を同一視する．まず V が一次元である場合を考える．v を V の基底とし，射 (23) における $v \otimes 1$ の行き先を $\alpha \otimes v \in \mathcal{R} \otimes_k V$ と書く．$\mathcal{R} \otimes_k V$ は $1 \otimes v$ で生成される階数 1 の自由 $\mathcal{R}$ 加群なので，(23) が同型である必要十分条件は $\alpha \in \mathcal{R}^{\times}$ である．$\nu\colon \mathfrak{g} \to k = \mathrm{End}_k(V)$ を与えられた $\mathfrak{g}$ の表現とすれば，定義より $\alpha \in \mathcal{R} = \mathrm{Hom}_{k}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}), k)$ は ν より誘導された環準同型であることがわかる．即ち，

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(X\xi) = \nu(X)\alpha(\xi), \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall \xi \in \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}).$$

補題付録 A.7 によればそのような α は $\mathcal{R}$ の単元であるから，以上で V の次元が 1 の場合の証明は完了した．

次に一般次元の場合を考えよう．$v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とすると，任意の $F \in \mathcal{R} \otimes_k V$ は

$$F = \sum_i f_i v_i, \quad f_i \in \mathcal{R}$$

と一意的に書けることに注意しよう．そこで

$$f_{v_i} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} v_j, \quad f_{ij} \in \mathcal{R}$$

と表示したとき，行列式 $\det(f_{ij}) \in \mathcal{R}$ が単元であることを示せば良い．これは，$\mathfrak{g}$ 加群 $\det_k(V)$ を V の最高次外積として定義したとき，自然な射

$$\det_k(V)^{\mathrm{f}} \otimes_k \mathcal{R} \to \mathcal{R} \otimes_k \det_k(V)$$

が同型であることと同値である．この場合は既に示したので，以上で証明が完了した．　□

定義 付録 A.9. V を $\mathfrak{g}$ 加群としたとき, 任意の非負整数 n に対して k ベクトル空間 $\mathrm{C}^n(\mathfrak{g}, V)$ を

$$\mathrm{C}^n(\mathfrak{g}, V) := \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\hat{\otimes}(n+1)}, V)$$

で定める. また k 線型写像

$$d^n\colon \mathrm{C}^n(\mathfrak{g}, V) \to \mathrm{C}^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$$

を等式

$$d^n f(\xi_0 \otimes \xi_1 \cdots \otimes \xi_{n+1}) := \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \mathrm{aug}(\xi_j) f(\xi_0 \otimes \cdots \otimes \xi_{j-1} \otimes \xi_{j+1} \otimes \cdots)$$

で定める.

補題 付録 A.10. 任意の非負整数 n に対して d^n は $\mathfrak{g}$ 加群の射となる. 更に, $\mathfrak{g}$ 加群の射 $d^{-1}\colon V \to \mathrm{C}^0(\mathfrak{g}, V)$ を

$$d^{-1}(v)\colon \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to V; \quad \xi \mapsto \mathrm{aug}(\xi)v$$

で定めると, $\mathfrak{g}$ 加群の列

$$0 \to V \xrightarrow{d^{-1}} \mathrm{C}^0(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^0} \mathrm{C}^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^1} \cdots \to \mathrm{C}^n(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^n} \mathrm{C}^{n+1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

は完全列となる.

Proof. 証明は極めて標準的なので, 読者の演習問題とする. □

定義 付録 A.11. 代数的 $\mathfrak{g}$ 加群 V に対して, $\mathfrak{g}$ 加群のなす複体 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{g}, V) := (\mathrm{C}^n(\mathfrak{g}, V), d^n)_{n \geq 0}$ のことを V の標準分解と呼ぶ. 補題付録 A.8 と付録 A.10 より, これは $\mathfrak{g}$ 加群 V の単射分解を与えている.

以上の議論により, 自然な同型

$$H^i(\mathfrak{g}, V) \cong H^i\left(H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{g}, V))\right) \tag{24}$$

があることが分かる. 即ち, $Z^i(\mathfrak{g}, V)$, $B^i(\mathfrak{g}, V)$ を

$$\begin{aligned} Z^i(\mathfrak{g}, V) &:= H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{C}^i(\mathfrak{g}, V)) \bigcap \mathrm{Ker}(d^i), \\ B^i(\mathfrak{g}, V) &:= \begin{cases} d^{i-1} H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{C}^{i-1}(\mathfrak{g}, V)), & i > 0, \\ 0, & i = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

と置くと, 自然な同型

$$H^i(\mathfrak{g}, V) \cong Z^i(\mathfrak{g}, V)/B^i(\mathfrak{g}, V)$$

を得る.

定義から $H^0(\mathfrak{g}, -)$ は明らかになっているが, 1 次のコホモロジーまでは比較的易しく計算できる.

命題 付録 A.12. V を代数的 $\mathfrak{g}$ 加群としたとき, 以下の自然な同型が存在する:

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{g}, V) &\cong \{f\colon \mathfrak{g} \to V \mid \text{連続 } k \text{ 線型},\ f([X,Y]) = Xf(Y) - Yf(X),\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}, \\ B^1(\mathfrak{g}, V) &\cong \{f_v\colon \mathfrak{g} \to V;\ X \mapsto Xv \mid v \in V\}. \end{aligned} \tag{26}$$

ここで, $\mathfrak{g}$ の位相は $\mathfrak{g} \to \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ による相対位相を取る.

Proof. 命題の右辺に現れる k ベクトル空間をそれぞれ $\widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$, $\widetilde{B}^1(\mathfrak{g}, V)$ と表すことにする. $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ は n が 1 以上の項では完全列であるので, 定義から

$$Z^1(\mathfrak{g}, V) = H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Im}(d^0))$$

は明らかであろう. そこで $d^0(f) \in H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Im}(d^0))$ を取ると, $\mathfrak{g}$ の作用と d^0 の定義から, 以下の等式が成立することが分かる:

$$\begin{aligned} 0 = (Xd^0(f))(\xi \otimes \eta) &= X(d^0(f)(\xi \otimes \eta)) - d^0 f(X\xi \otimes \eta + \xi \otimes X\eta) \\ &= \mathrm{aug}(\xi)Xf(\eta) - \mathrm{aug}(\eta)Xf(\xi) + \mathrm{aug}(\eta)f(X\xi) - \mathrm{aug}(\xi)f(X\eta). \end{aligned} \tag{27}$$

ここで $\xi = Y \in \mathfrak{g}$, $\eta = 1$ と置くと,

$$d^0(f)(XY \otimes 1) = -f(XY) = -Xf(Y) = Xd^0(f)(Y \otimes 1) \tag{28}$$

を得る. そこで k 線型写像 $\alpha\colon Z^1(\mathfrak{g}, V) \to \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$ を

$$\alpha(g)\colon \mathfrak{g} \to V; \quad X \mapsto g(X \otimes 1)$$

で定めると, α は well-defined であることが, 等式 (28) からわかる. 逆に $f \in \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$ を取ったときに, k 線型写像 $\tilde{f}\colon \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \to V$ を

$$\tilde{f}(X\xi) = X\tilde{f}(\xi),\ \tilde{f}(X) = f(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall \xi \in \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$$

を満たすように定義することが可能であることが, $\widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$ の定義と帰納的議論からわかる. そこで β を

$$\beta\colon \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V) \to Z^1(\mathfrak{g}, V); \quad f \mapsto\ d^0(\tilde{f})$$

により定義するとこれが α の逆写像を与える. B 達に関する証明は易しいので省略する. □

V として自明な $\mathfrak{g}$ 加群を取ると, 右辺の表示はより易しく書ける.

系 付録 A.13. 以下の自然な同型が存在する:

$$H^1(\mathfrak{g}, k) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}, k) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\mathrm{ab}}, k).$$

ここで $\mathfrak{g}^{\mathrm{ab}}$ は $\mathfrak{g}$ のアーベル化 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のこととする. 特に, $\mathfrak{g}$ が k 上有限生成であれば双対空間 $H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee = \mathfrak{g}^{\mathrm{ab}}$ の任意の基底の持ち上げは $\mathfrak{g}$ の極小生成系となる.

Proof. これは命題付録 A.12 の右辺に自明な $\mathfrak{g}$ 加群 k を代入すれば直ちに得られる. □

系 付録 A.14. $\mathfrak{g}$ を k 上の自由リー代数とする. このとき, 任意の代数的 $\mathfrak{g}$ 加群の間の全射 $V \twoheadrightarrow V'$ は, 一次のコホモロジーの間の全射

$$H^1(\mathfrak{g}, V) \twoheadrightarrow H^1(\mathfrak{g}, V')$$

を誘導する．特に,

$$H^i(\mathfrak{g}, V) = 0, \quad \forall i \geq 2,\ \forall V \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}))$$

が成立する．

Proof. まず最初の主張を示す．$\{X_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{g}$ を自由リー代数 $\mathfrak{g}$ の自由生成系とする．このとき, 自然な同型

$$\Phi_V \colon \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\sim} V^{\oplus I}; \quad f \mapsto (f(X_i))_{i \in I}$$

が存在することに注意する．すると, 定義から次の図式が可換になっていることが直ちにわかる:

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathfrak{g}, V) \arrow[d] & \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V) \arrow[l, two heads] \arrow[r, "\Phi_V"] \arrow[d] & V^{\oplus I} \arrow[d, two heads] \\
H^1(\mathfrak{g}, V') & \widetilde{Z}^1(\mathfrak{g}, V') \arrow[l, two heads] \arrow[r, "\Phi_{V'}"] & V'^{\oplus I}.
\end{tikzcd}$$

$\Phi_V, \Phi_{V'}$ は同型であるので, 左端の縦の射もやはり全射であることがわかる．

二つ目の主張を示そう．任意の代数的 $\mathfrak{g}$ 加群 V は単射的な $\mathfrak{g}$ 加群 $\tilde{V}$ に埋め込むことができる事を思い出す:

$$V \hookrightarrow \tilde{V}$$

(例えば $\tilde{V}$ として $\mathrm{C}^0(\mathfrak{g}, V)$ を取ればよい)．すると $\tilde{V}$ が単射的であることから任意の正の整数 i に対して $H^i(\mathfrak{g}, \tilde{V}) = 0$ となるので, 全ての 1 以上の整数 i に対して単完全列

$$0 \to V \to \tilde{V} \to \tilde{V}/V \to 0$$

から導かれる連結準同型は同型

$$H^i(\mathfrak{g}, \tilde{V}/V) \xrightarrow{\cong} H^{i+1}(\mathfrak{g}, V) \tag{29}$$

を引き起こすことが直ちにわかる．一方で最初の主張によると $H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}) \twoheadrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}/V)$ なので, $H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}/V) = 0$ が $H^1(\mathfrak{g}, \tilde{V}) = 0$ より従う．従って $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$ が任意の代数的 $\mathfrak{g}$ 加群に対して示せた．一般の i に対しては (29) と帰納的な議論により容易に結論が導かれる． □

さて, リー代数の全射

$$\mathfrak{g}' \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$$

が与えられているとし, この核であるリーイデアルを $\mathfrak{r}$ と書くことにする．

補題 付録 A.15. 函手

$$H^0(\mathfrak{r}, -) \colon \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}') \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}); \quad V \mapsto H^0(\mathfrak{r}, V)$$

は単射的対象を保つ．

Proof. これは, 自然な引き戻し函手

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}'); \quad V \mapsto V$$

が $H^0(\mathfrak{r}, -)$ の左随伴函手であり, 更に完全函手であることから直ちに従う． □

任意の代数的 $\mathfrak{g}'$ 加群 V に対して, 明らかに

$$H^0(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{r}, V)) = H^0(\mathfrak{g}', V)$$

が成立するので, 補題付録 A.15 より Grothendieck のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, H^q(\mathfrak{r}, V)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{g}', V) \tag{30}$$

が存在する. このスペクトル系列と, スペクトル系列の一般論から完全列

$$0 \to H^1(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{r}, V)) \to H^1(\mathfrak{g}', V) \to H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, V)) \xrightarrow{d_{0,1}^2} H^2(\mathfrak{g}, H^0(\mathfrak{r}, V)) \tag{31}$$

を得る. 更にこのスペクトル系列で p, q が負の項は 0 なので, $d_{0,1}^2$ の余核が $E_\infty^{2,0}$ となることも直ちにわかる:

$$\mathrm{Cok}(d_{0,1}^2) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{2,0}. \tag{32}$$

命題 付録 A.16. $\{X_i\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の生成系で, $\mathfrak{g}^{\mathrm{ab}}$ での像が k 上一次独立となっているものとする. $\mathfrak{g}'$ を集合 I で生成される自由リー k 代数とし,

$$\pi\colon \mathfrak{g}' \twoheadrightarrow \mathfrak{g}; \quad i \mapsto X_i$$

を自然な全射とする. $\mathfrak{r} := \mathrm{Ker}(\pi)$ と置くと, スペクトル系列 (30) は自然な同型

$$d_{0,1}^2\colon H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{g}, k)$$

を引き起こす.

Proof. まず, $\mathfrak{g}'$ の定義から, 全射 π は同型

$$H^1(\mathfrak{g}, k) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{g}', k)$$

を引き起こすことに注意する. 従って, これと完全列 (31) から $d_{0,1}^2$ は単射であることがわかる:

$$d_{0,1}^2\colon H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \hookrightarrow H^2(\mathfrak{g}, k).$$

一方で系付録 A.14 より, 任意の $p + q \geq 2$ を満たす非負整数 p, q に対して $E_\infty^{p,q} = 0$ であることがわかる. $d_{0.1}^2$ の余核が $E_\infty^{2,0}$ であったから (式 (32) 参照), $d_{0,1}^2$ は全射であることもわかる. 以上で命題は証明された. □

次の補題は計算に於いて重要であるが, 証明は若干面倒であるので, ここでは省略したいと思う.

補題 付録 A.17. [7, Proposition 3.10, 5.7, 5.8] 自然な制限函手

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}') \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{r}); \quad V \mapsto V$$

は完全であり, 更に単射的対象を保つ.

さて, 命題付録 A.16 の左辺を計算しよう.

補題 付録 A.18. 記号は命題付録 A.16 と同様とする．このとき, 自然な同型

$$H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \cong (\mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}'])^\vee$$

が存在する．

Proof. 系付録 A.13 から, 以下の自然な同型が存在することは直ちにわかる:

$$H^0(\mathfrak{g}, H^1(\mathfrak{r}, k)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})}(k, \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}, k)) \cong \mathrm{Hom}_k(H_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}), k).$$

但し任意の $\mathfrak{g}$ 加群 V に対して $H_0(\mathfrak{g}, V)$ を V の最大 $\mathfrak{g}$ 自明商として定義している．即ち,

$$H_0(\mathfrak{g}, V) := V/\mathcal{U}(\mathfrak{g})V.$$

$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{r}$ への作用は各元のアジョイント作用と同一視できることが標準分解の定義と補題付録 A.17 から確認できるので, 自然な同一視

$$\{Xy \mid X \in \mathfrak{g},\ y \in \mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}\} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{g}', \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{r}]$$

を得る．従って主張は示せた． □

以上をまとめると, 結局我々は次の結果を得たことになる:

定理 付録 A.19. k を体とし, $\mathfrak{g}$ を有限生成リー k 代数とする．

(1) $H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の極小生成系と同一視できる．即ち, $\mathfrak{f} := \mathrm{Lie}(H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee)$ で k ベクトル空間 $H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee$ の基底で生成されるリー k 代数を表すことにすると, アーベル化が同型であるような自然な全射

$$\pi\colon \mathfrak{f} := \mathrm{Lie}(H^1(\mathfrak{g}, k)^\vee) \twoheadrightarrow \mathfrak{g} \tag{33}$$

が存在する．

(2) $\mathfrak{r} := \mathrm{Ker}(\pi)$ と置くと, 自然な同型

$$(\mathfrak{r}/[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}])^\vee \cong H^2(\mathfrak{g}, k)$$

が存在する．特に, $H^2(\mathfrak{g}, k) = 0$ であれば π は同型である．

参考文献

[1] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, Galois groups over **Q** (Berkeley, CA, 1987), 79–297, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **16**, Springer, New York, 1989.

[2] P. Deligne, A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **38** (2005), 1–56.

[3] P. Deligne, J. Milne, Tannakian categories, in Hodge Cycles, Motives and Shimura varieties, Lecture Notes in Math., **900**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[4] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), *Astérisque*, no. **223** (1994), 113–184.

[5] R. Hain, Deligne-Beilinson cohomology of affine group schemes, in *Hodge theory and L^2 methods* edited by Lizhen Ji and Steven Zucker, International Press, 377–418.

[6] A. Huber, S. Müller-Stach, Periods and Nori motives, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3** Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics.

[7] J. C. Jantzen, Representations of Algebraic Groups, Pure and Applied Mathematics, vol. **131**, Academic Press, 1987.

[8] M. Kashiwara, P. Schapira, Categories and sheaves, grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. **332**.

[9] C. Peters, J. Steenbrink, Mixed Hodge Structures, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **52** (2008).

[10] J. P. Serre, Lie algebras and Lie groups, 1964 lectures given at Harvard University, Second edition, *Lecture Notes in Mathematics*, **1500** Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[11] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Reprint of the 1998 second edition, in Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.