BROWN の定理の証明の概略

広瀬稔 (MINORU HIROSE)

Contents

Introduction

多重ゼータ値 (Multiple Zeta Values) は次の無限級数で定義される実数である.

$$\zeta(k_1,\dots,k_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \qquad (k_1,\dots,k_{r-1}\in\mathbb{Z}_{>0}, k_r\in\mathbb{Z}_{>1}).$$

ここで $k_1+\cdots+k_r$ のことを重さ (weight), r のことを深さ (depth) という.

本稿の目的は Hoffman([7, Conjecture C, p493]) により予想され, Brown([1]) により証明された次の定理について解説することである.

定理 1. 重さ k の全て多重ゼータ値は

$$\{\zeta(k_1,\dots,k_r) \mid k_1,\dots,k_r\in\{2,3\},\ k_1+\cdots+k_r=k\}$$

の $\mathbb{Q}$-線形和として表される。

この定理の証明の鍵は次の 3 つである

(1) $\mathbb{Z}$ 上の混合テイトモチーフの理論（とモチビックな反復積分の理論）からの帰結.
(2) Zagier の恒等式

Date: January 16, 2019.

(3) 初等的な議論

本稿では，1,2 について証明抜きで紹介し，3 の部分について解説する．

注意 1. $k_1,\dots,k_r \in \{2,3\}$ となる整数の組 $(k_1,\dots,k_r)$ を Hoffman index と呼ぶ．また Hoffman index 中の 3 の個数 $\#\{i \mid k_i = 3\}$ を Hoffman index のレベルと呼ぶ．

注意 2. 重さ k の多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k \subset \mathbb{Q}$ とし，整数 $\{d_k\}$ を $\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$ で定めると，$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ となることが Zagier([9, Section9, p509]) により予想されている．このうち上限 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \le d_k$ は Brown 以前から Goncharov や寺杣らにより証明されていた．さて d_k は重さ k の Hoffman index の個数に一致する．よって次元予想 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ が正しければ，定理 1 は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ の生成元というだけでなく，基底も与えていることになる．

1. 混合テイトモチーフの理論から導かれる事実の紹介

本稿では混合テイトモチーフの周期の理論から導かれる次の事実を仮定する。

(1) 余積構造付き次数付可換環 $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ の存在.
(2) $\mathcal{H}$ の具体的な構造定理.
(3) 周期写像 $\mathrm{per} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ の存在.
(4) モチビックな反復積分（多重ゼータ値）とその性質.
(5) モチビックな反復積分の余積の計算. (Goncharov-Brown の余積公式)

本節では，これらの詳しい内容について解説する．

1.1. $\mathcal{H}$ について.

定理 2. $\mathbb{Z}$ 上の混合モチーフの周期の理論から，次を満たす三つ組 $(\mathcal{H}, \zeta^{\mathfrak{m}}(2), \Delta)$ が得られる．

(1) $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ は次数付き可換環.
(2) $\zeta^{\mathfrak{m}}(2)$ は $\mathcal{H}_2$ の元.
(3) Δ は準同型 $\mathcal{H} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}$. ここで $\mathcal{A} := \mathcal{H}/(\zeta^{\mathfrak{m}}(2))$ と置いた.[1]

注意 3. 当然ながら，定理 2 は，それ単独では意味のない命題であり，後続の命題（定理 3，4，5 等と組み合わせて始めて意味を持つ.）

注意 4. より一般的な観点からは，$\mathcal{H}$ は次のように理解される．まず，代数体 $K \subset \mathbb{C}$ および K の有限素点の集合 S に対して，混合テイトモチーフの周期の理論から，$\mathcal{O}_{K,S}$ 上の混合テイトモチーフの effective periods のなす環が構成できる．これを $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$ と書いたとしよう．$\mathcal{O}_{K,S}$ の複素共役が自分自身に一致するとき，$\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$ にも複素共役写像 $J : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \to \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$ が作用する．定理 2 における $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$ の J 不変部分である．

1.2. $\mathcal{H}$ の構造定理.

定義 1. 可換環 $\mathcal{U}'$ を次で定める．まず底空間は

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \mathbb{Q}\langle f_{2i+1} \mid i \ge 1 \rangle = \mathbb{Q}\langle f_3, f_5, f_7, \dots \rangle \\ &= \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}f_3 \oplus \mathbb{Q}f_5 \oplus \mathbb{Q}f_3f_3 \oplus \mathbb{Q}f_7 \oplus \mathbb{Q}f_3f_5 \oplus \mathbb{Q}f_5f_3 \oplus \cdots \end{aligned}$$

とする．積はシャッフル積[2]で定める

[1] Δ は Hopf 代数の余積と似た数多くの性質を満たす．例えば $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ である．また Δ が誘導する写像 $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ によって $\mathcal{A}$ は Hopf 代数になる．また $\mathcal{H}$ は $\mathcal{A}$ の comodule となる．これらの事実は $\mathcal{H}$ の具体的な構造定理からも従う．

[2] シャッフル積とは，$x \sqcup 1 = 1 \sqcup x = x$ と $f_a x \sqcup f_b y = f_a(x \sqcup f_b y) + f_b(f_a x \sqcup y)$ (ただし $x, y \in \mathcal{U}'$, $a, b \in \{3, 5, 7, \dots\}$) で帰納的に定まる双線形な二項演算である．

定義 2. 可換環 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[f_2]$$

で定める．

以下 $\mathcal{U}$ の元 $f_{i_1} \cdots f_{i_n} \otimes f_2^m$ を単に $f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_2^m$ と書く．

定義 3. 準同型

$$\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U}$$

を

$$\Delta(f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_2^m) = \sum_{k=0}^{n} f_{i_1} \cdots f_{i_k} \otimes f_{i_{k+1}} \cdots f_{i_n} f_2^m$$

で定める．

定義 4. $\deg(f_i) = i$ とすることにより $\mathcal{U}$ を次数付き環とみなす．つまり

$$\mathcal{U}_k = \bigoplus_{\substack{d \geq 0 \\ m \geq 0 \\ i_1, \ldots, i_d \in \{3,5,7,\ldots\} \\ i_1 + \cdots + i_d + 2m = k}} \mathbb{Q} f_{i_1} \cdots f_{i_d} f_2^m.$$

定理 3. 付加構造付き次数付き環 $(\mathcal{H}, \zeta^{\mathfrak{m}}(2), \Delta)$ と $(\mathcal{U}, f_2, \Delta)$ の間には（非標準的）な同型[3]ϕ が存在する．

1.3. 周期写像.

定理 4. 標準的な環準同型写像

$$\mathrm{per} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

が存在する．(周期写像と呼ばれる．単射と予想されている．)

注意 5. より一般に $\mathrm{per} : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \to \mathbb{C}$ が定義可能である．ここで $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$ は注意 4 と同様.

1.4. モチビックな反復積分.

0 以上の整数 k と $a_0, \ldots, a_{k+1} \in \{0,1\}$ に対してモチビックな反復積分 (motivic integral)

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \ldots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_k \tag{1.1}$$

が定義される．また $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ に対して

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\Bbbk) = (-1)^r I^{\mathfrak{m}}(0; 10^{k_1-1} \cdots 10^{k_r-1}; 1)$$

と置く．$I^{\mathfrak{m}}$ が満たす代表的な性質を挙げる

1. $k \geq 1$ かつ $a_0 = a_{k+1}$ なら $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \ldots, a_k; a_{k+1}) = 0$.
2. $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1) = 1$.
3. $I^{\mathfrak{m}}(0; 0; 1) = 0$.

---

[3]同型の正確な意味は次の通り.

- $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{U}$ は次数付き環の環準同型
- $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2)) = f_2$
- 次の図式は可換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \arrow[d, "\phi \otimes \phi"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

(4) $I^{\mathfrak{m}}(a_0;\alpha;b)$ は shuffle 関係式

$$I^{\mathfrak{m}}(a;\alpha;b)\cdot I^{\mathfrak{m}}(a;\beta;b)=I^{\mathfrak{m}}(a;\alpha \sqcup\!\sqcup \beta;b)$$

を満たす.

(5) $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})=(-1)^k I^{\mathfrak{m}}(a_{k+1};a_k,\dots,a_1;a_0)$

(6) $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})=I^{\mathfrak{m}}(1-a_0;1-a_1,\dots,1-a_k;1-a_{k+1})$

(7) $\mathrm{per}(\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_r))=\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(k_1,\dots,k_r)$.

定義 5 (モチビック多重ゼータ値). 性質 (7) より $\mathrm{per}(\zeta^{\mathfrak{m}}(\Bbbk))=\zeta(\Bbbk)$ である.

注意 6. モチビックな反復積分はより一般的な文脈で定義される. まず, 通常の反復積分の定義を述べよう. $a_0,\dots,a_{k+1}\in\mathbb{C}$ として, $a_0\neq a_1$, $a_k\neq a_{k+1}$ を仮定する. また, $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ をパスであって, $(\gamma(0),\gamma(1))=(a_0,a_{k+1})$ かつ任意の $0<t<1$ に対して $\gamma(t)\notin\{a_1,\dots,a_k\}$ が成立するとする. このとき反復積分 $I_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})\in\mathbb{C}$ が

$$I_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\prod_{j=1}^{k}\frac{d\gamma(t_j)}{\gamma(t_j)-a_j}$$

によって定義される.

さて, $a_0,\dots,a_{k+1}\in K$ の場合は, S を十分大きく取ればモチビックな反復積分

$$I^{\mathfrak{m}}_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})\in\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$$

も定義可能である. (どのような S を取ればいいかについてもある程度正確に記述することができる ([6, Theorem 1.3]))

また, 条件 $(\gamma(0),\gamma(1))=(a_0,a_{k+1})$ が満たされない場合は, 接基点 (tangential base point) の理論が必要になる. 具体的には単に $a_0\in\mathbb{C}$ と $a_{k+1}\in\mathbb{C}$ を考える代わりに接基点 $a_0,a_{k+1}\in\{(p,v)\mid p\in\mathbb{C}, v\in T_p\mathbb{C}=\mathbb{C}\}$ を考える必要がある.

(1.1) における $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})$ は γ を最もシンプルなパスとし, 接基点を $(0,1)$ と $(1,-1)$ にすることにより得られる.

演習 1. 性質 (3) と (4) から

$$\sum_{i=0}^{k} I^{\mathfrak{m}}(0;a_1,\dots,a_i,0,a_{i+1},\dots,a_k;1)=0$$

が従う. これを用いて次を示せ

$$I^{\mathfrak{m}}(0;\overbrace{0,\dots,0}^{a},1,\overbrace{0,\dots,0}^{b};1)=(-1)^{a+1}\binom{a+b}{a}\zeta^{\mathfrak{m}}(a+b+1)$$

1.5. **motivic coaction formula for iterated integral.** $\pi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}/\zeta^{\mathfrak{m}}(2)=\mathcal{A}$ を自然な射影とする. 次の公式については [6, Theorem 1.2] や [1, Theorem 2.4] を参照.

定理 5 (Goncharov の余積公式). $\Delta(I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1}))$ は

$$\sum_{s=1}^{k+1}\sum_{\substack{i_0<i_1<\cdots<i_s\\ i_0=0,i_s=k+1}}\pi\Big(\prod_{p=0}^{s-1}I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p};a_{i_p+1},\dots,a_{i_{p+1}-1};a_{i_{p+1}})\Big)\otimes I^{\mathfrak{m}}(a_{i_0};a_{i_1},\dots,a_{i_{s-1}};a_{i_s})$$

と等しい．[4]

例 1.

$$\begin{aligned}\Delta(I(a;b,c;d)) &= I(a,b,c,d)\otimes I(a,d)\\ &\quad +I(a,b)I(b,c,d)\otimes I(a,b,d)\\ &\quad +I(a,b,c)I(c,d)\otimes I(a,c,d)\\ &\quad +I(a,b)I(b,c)I(c,d)\otimes I(a,b,c,d).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{H}$ のフィルトレーション

定義 6. $\mathcal{U}$ 上のフィルトレーション $\{0\}=F_{-1}\mathcal{U}\subset F_0\mathcal{U}\subset F_1\mathcal{U}\subset\cdots\subset\mathcal{U}$ を

$$F_d\mathcal{U}=\bigoplus_{e=0}^{d}\bigoplus_{\substack{i_1,\dots,i_e\\ \in\{3,5,7,\dots\}}}\bigoplus_{s=0}^{\infty}\mathbb{Q}f_{i_1}\cdots f_{i_e}f_2^s$$

で定める．また，$F_d\mathcal{H}=\phi^{-1}(\mathcal{F}_d\mathcal{U})$ と置く．

演習 2. $F_d\mathcal{H}$ が ϕ の選び方に依存しないことを示せ．

また $\mathrm{gr}_d\mathcal{U}=F_d\mathcal{U}/F_{d-1}\mathcal{U}$, $\mathrm{gr}_d\mathcal{H}=F_d\mathcal{H}/F_{d-1}\mathcal{H}$ と置く．

命題 1. $x\in\mathcal{H}_k$ で $\Delta(x)-1\otimes x-x\otimes 1=0$ となるとき，

$$x\in\begin{cases}F_0\mathcal{H} & k:\mathrm{even}\\ F_1\mathcal{H} & k:\mathrm{odd}\end{cases}$$

定義 7. $\tilde{\Delta}(x)=\Delta(x)-1\otimes x$.

命題 2. $x\in\mathcal{H}$ が $\tilde{\Delta}(x)\in\mathcal{A}\otimes F_d\mathcal{H}$ を満たすとき $x\in F_{d+1}\mathcal{H}$.

演習 3. 命題 1, 2 を証明せよ．

命題 1,2 と Goncharov の余積公式を組み合わせることで，色々なことが証明可能である．

命題 3. $k\in\mathbb{N}$ に対して $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2k))\in\mathbb{Q}^{\times}f_2^k, \phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2k+1))\in\mathbb{Q}^{\times}f_{2k+1}$.

命題 4. 任意の $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{N}$ に対して $\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_r)\in F_r\mathcal{H}$.

命題 5. $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^n))\in\mathbb{Q}^{\times}f_2^n$.

---

[4] この公式で，積となる部分が $\otimes$ の左側に来ることは，次のようにして覚えることができる．Goncharov の余積公式はより一般の反復積分

$$I^{\mathfrak{m}}_{\gamma}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})\quad(a_0,\dots,a_{k+1}\in\bar{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C},\ \gamma\text{は } a_0 \text{ から } a_{k+1} \text{ へのパス})$$

にも一般化され $\Delta I_{\gamma}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})$ は

$$\sum_{\substack{i_0<i_1<\cdots<i_s\\ i_0=0,i_s=k+1}}\pi\Big(\prod_{p=0}^{s-1}I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p};a_{i_p+1},\dots,a_{i_{p+1}-1};a_{i_{p+1}})\Big)\otimes I^{\mathfrak{m}}_{\gamma}(a_0;a_{i_1},\dots,a_{i_{s-1}};a_{k+1})$$

となる．ここで，$\otimes$ の左側の積に現れる $I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p};a_{i_p+1},\dots,a_{i_{p+1}-1};a_{i_{p+1}})$ は，始点が a_{i_p} で終点が $a_{i_{p+1}}$ となるため γ から標準的に定めることが出来ない．よって $\otimes$ の左側の積は well-defined にならないように見えるが，実は反復積分は modulo $2\pi\sqrt{-1}$ でみると，パスのとり方に依らないことが証明できる．よって適切な quotient をとることで式が well-defined になるのである．

命題 6. $k \geq 0$ と $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{0,1\}$ に対して $d \geq 0$ を

$$d = \#\{0 \leq i \leq k \mid a_i = a_{i+1}\}$$

で定める．このとき

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in F_d\mathcal{H}$$

が成立する．

雰囲気を掴むために，命題 5 を証明する．

Proof. n に関する帰納法で証明する．$(-1)^n\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^n) = I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}; 1)$ と置く．帰納法の仮定および reversal formula より任意の $0 < k < n$ および任意の $0 < m$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi(I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2k}; 1)) &= 0 \\
\pi(I^{\mathfrak{m}}(1; \overbrace{0, 1, \dots, 0, 1}^{2k}; 0)) &= 0 \\
I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1, 0, \dots 1, 0, 1}^{2m-1}; 0) &= 0 \\
I^{\mathfrak{m}}(1; \overbrace{0, 1, \dots 0, 1, 0}^{2m-1}; 1) &= 0
\end{aligned}$$

となる．$\Delta I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}; 1)$ を Goncharov の余積公式 (定理 5) を用いて計算しよう．ここで公式内の $\pi(I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}))$ に着目する．$(a_{i_p}, a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}, a_{i_{p+1}})$ は $(0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}, 1)$ の長さ $i_{p+1} - i_p + 1$ の部分列である．よって $\pi(I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}))$ は $i_{p+1} - i_p + 1 = 2$ となる場合，または $i_{p+1} - i_p + 1 = 2n + 2$ となる場合以外は 0 となる．よって $x_n = I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2n}; 1)$ と置くと

$$\Delta(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n$$

となる．よって命題 1 より $\phi(x_n) \in \mathbb{Q}f_2^n$ である．最後に $x_n \neq 0$ を証明しよう．これは $\mathrm{per}((-1)^n x_n) = \zeta(\{2\}^n) > 0$ から従う． □

注意 7. $\mathcal{U}$ 上のフィルトレーション $\tilde{F}$ を

$$\tilde{F}_d\mathcal{U} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{e \leq d \ (s=0 \text{ の場合}) \\ e \leq d-1 \ (s>0 \text{ の場合})}} \bigoplus_{\substack{i_1, \dots, i_e \\ \in \{3,5,7,\dots\}}} f_{i_1} \cdots f_{i_e} f_2^s$$

で定め，$\tilde{F}_d\mathcal{H} = \phi^{-1}(\tilde{F}_d\mathcal{U})$ とおく．このとき

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) \in \tilde{F}_d\mathcal{H}$$

となる.（これは命題 4 の精密化である）

演習 4. $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_d \mathcal{H}_k$ と置くとき，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d = \frac{1}{1 - x^2 - x^3 y}$$

を証明せよ．この母関数表示から $D_{k,d}$ は重さ k，レベル d の Hoffman index の個数

$$\#\{\Bbbk=(k_1,\dots,k_r)\in\{2,3\}^r \mid \mathrm{wt}(\Bbbk)=k,\ \#\{i\mid k_i=3\}=d\}$$

に等しいことが分かる．

3. Charlton の Block notation

本節では Charlton のブロック記法 (Block notation, [2]) を用いて Brown の証明を解説する．Charlton のブロック記法は Brown の証明よりも後に導入された概念であるが，Hoffman index のような対象を扱うのに便利である．ブロック記法を扱う際は反復積分記号

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$$

をセミコロンを使わず

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0,a_1,\dots a_n,a_{n+1})$$

と書いたほうが分かりやすいので，以後はセミコロンを使わないこの表記法を採用する．

0 と 1 を交互に並べて得られる空でない有限 01 列をブロックと呼ぶ．次はブロックの例である．

$$\begin{aligned} 010101 &\quad (\text{長さ }6,\ \text{先頭文字 }0,\ \text{末尾文字 }1)\\ 101 &\quad (\text{長さ }3,\ \text{先頭文字 }1,\ \text{末尾文字 }1)\\ 0 &\quad (\text{長さ }1,\ \text{先頭文字 }0,\ \text{末尾文字 }0). \end{aligned}$$

定義 8. $d\ge 0$ と $k_0,\dots,k_d\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対して 0 から始まる 01 列 $B(k_0,\dots,k_d)$ を

$$B(k_0,\dots,k_d)=W_0\cdots W_d$$

で定める．ただし，$W_0,\dots,W_d$ は次で特徴づけられる唯一の 01 列である．

- $W_0,\dots,W_d$ は長さ $k_0,\dots,k_d$ のブロック
  - W_0 の先頭文字は 0．また $i=1,\dots,d$ に対して W_i の先頭文字は W_{i-1} の末尾文字に等しい．

例えば

$$B(3,4,5)=\overbrace{010}^{3}\overbrace{0101}^{4}\overbrace{10101}^{5}$$

である．0 から始まる任意の 01 列は，$B(k_0,\dots,k_d)$ の形で一意的に表すことが可能である．

定義 9. 反復積分記号 $I^{\mathfrak{m}}()$ に $B(k_0,\dots,k_d)$ を入れたものを $I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d)$ で表す．例えば

$$I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(3,4,5)=I(0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,1).$$

(反復積分の端点も 01 列の一部と見なすことに注意．よって $I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d)$ の重さは $k_0+\cdots+k_d-2$ である)．

また $I_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d):=\mathrm{per}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d))$ と置く．

演習 5. 次を確認せよ．

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^{k_0},3,\{2\}^{k_2},3,\dots,\{2\}^{k_{d-1}},3,\{2\}^{k_d})=\pm I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(2k_0+3,\dots,2k_{d-1}+3,2k_d+2).$$

4. Brown の定理の証明

重さ N，レベル $d \geq 0$ の Hoffman index と対応する，ブロック記法の index の集合を

$$\mathrm{BH}_{N,d} = \{(k_0,\dots,k_d) \mid k_0,\dots,k_{d-1} \in 1+2\mathbb{Z}_{>0},\ k_d \in 2\mathbb{Z}_{>0},\ k_0+\cdots+k_d = N-2\}$$

と置く．

本節では次の定理を証明する．

定理 6. $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\{\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_r) \mid k_i \in \{2,3\}, \#\{j \mid k_j = 3\} \leq d\}$$

は $F_d\mathcal{H}$ の $\mathbb{Q}$-ベクトル空間としての基底となる．

これは次と同値である．

定理 7. $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\{I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\Bbbk) \in \mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N \mid \Bbbk \in \mathrm{BH}_{N,d}\}$$

は $\mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N$ の元として $\mathbb{Q}$ 上一次独立である．

定義 10. $N \geq 0$ と $d \geq 1$ に対して，同型写像

$$\partial_{N,d} : \mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N \to \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:\text{奇数}}} \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r}$$

を次で定める．まず $\tilde{\Delta}(F_d\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \otimes F_{d-1}\mathcal{H}$ より $\tilde{\Delta}$ は写像 $\tilde{\Delta} : \mathrm{gr}_d\mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}$ を誘導する．このとき $\tilde{\Delta}(\mathrm{gr}_d\mathcal{H}) = F_1\mathcal{H} \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}$ が分かる．特に weight N の部分を見ると

$$\tilde{\Delta}(\mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N) = \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:\text{奇数}}} F_1\mathcal{H}_r \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r}$$

である．$\partial_{N,d}$ は合成写像

$$\mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N \xrightarrow[\simeq]{\tilde{\Delta}} \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:\text{奇数}}} F_1\mathcal{H}_r \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r} \xrightarrow[\simeq]{(r-1)2^{2-r}\zeta^{\mathfrak{m}}(r)\otimes x \mapsto x} \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:\text{奇数}}} \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r}$$

で定義される．

定理 7 は，d に関する帰納法で証明する．$d=0$ の場合は簡単なので $d \geq 1$ としよう．定理を示すには

$$\{\partial_{N,d}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\Bbbk)) \mid \Bbbk \in \mathrm{BH}_{N,d}\}$$

が一次独立であることを示せばよい．命題 5 に注意しながら Goncharov の余積公式 (定理 5) を用いると

$$\tilde{\Delta}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots,k_d)) = \sum_{s=0}^{d-1} \sum_{\substack{1<r\leq k_s+k_{s+1}-2 \\ r:\text{奇数}}} \xi^r_{k_s,k_{s+1}} \otimes I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots,k_{s-1},k_s+k_{s+1}-r,k_{s+2},\dots,k_d)$$

ただし

$$\xi^r_{x,y} := \sum_{\substack{0<x'\leq a \\ 0<y'\leq b \\ x'+y'=r+2}} \pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x',y'))$$

となる．ここで，$\pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(a,b))$ の値を教えてくれるのが Zagier による次の公式である．[5]

定理 8 ([10, Theorem 1])**.** 1 以上の奇数 x と 2 以上の偶数 y に対して

$$I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x,y) \quad = \quad 2 \sum_{\substack{1<m<x+y \\ m\equiv 1 \pmod 2}} \left(\binom{m-1}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^m}\right)\binom{m-1}{y-1} \right) I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta^{\mathfrak{m}}(m).$$

特に $\pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x,y)) \in \mathcal{A}$ は次に等しい:

$$2\left(\binom{x+y-3}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^{x+y-2}}\right)\binom{x+y-3}{y-1} \right)\zeta^{\mathfrak{m}}(x+y-2).$$

演習 6. 定理 8 の $x=1$ の場合は，$x \geq 3$ の場合に帰着されることを示せ．

注意 8. 実際に Zagier が証明したのは（モチビック版ではなく）実数に対する等式

$$I_{\mathrm{bl}}(x,y) = 2 \sum_{\substack{1<m<x+y \\ m\equiv 1 \pmod 2}} \left(\binom{m-1}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^m}\right)\binom{m-1}{y-1} \right) I_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta(m)$$

である．この等式からモチビック版が導かれることは [1, Theorem 4.3] の証明を参照せよ．

Zagier の恒等式から次が従う．

$$\xi^r_{x,y} = 2\zeta^{\mathfrak{m}}(r) \times \left(\begin{cases} \binom{r-1}{x-1} & x:\mathrm{odd} \\ \left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{x-1} & x:\mathrm{even} \end{cases} - \begin{cases} \binom{r-1}{y-1} & y:\mathrm{odd} \\ \left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{y-1} & y:\mathrm{even} \end{cases} \right) \tag{4.1}$$

演習 7. Zagier の恒等式を用いて，(4.1) を証明せよ．

この式を具体的に行列表示したものを

$$\partial_{N,d}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\Bbbk)) = \sum_{\Bbbk'} M_{\Bbbk,\Bbbk'} I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\Bbbk')$$

とする．ただし，$\Bbbk$ は $\mathrm{BH}_{N,d}$ の元を動き，$\Bbbk'$ は $\bigcup_{\substack{1<r\leq N \\ r:\text{奇数}}} \mathrm{BH}_{N-r,d-1}$ の元を動く．

あとは $M := (M_{\Bbbk,\Bbbk'})_{\Bbbk,\Bbbk'}$ が可逆行列であることを示せば定理 7 の証明が完了する．これは次の事実から従う．

(1) M は全ての成分が $\mathbb{Z}_{(2)} := \{a/b \mid b:\mathrm{odd}\}$ に属する．
(2) M は（行と列を適切に並べたら）

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \pmod{2\mathbb{Z}_{(2)}}.$$

特に $\det M \equiv 1 \pmod{2\mathbb{Z}_{(2)}}$.

演習 8. (1),(2) が成立していることを確認せよ．

---

[5] Zagier の原論文で述べられている形とは少し違うが，同値性は (主張の証明よりも) 簡単に示せる．

5. Brown の定理の系

定理 6 および命題 4，6 の系として次が得られる．

定理 9. *$k, d \geq 0$ とする．以下はいずれも重さ k，レベル d 以下の Hoffman basis*

$$\{\zeta(k_1,\ldots,k_r) \mid k_1,\ldots,k_r \in \{2,3\},\ k_1+\cdots+k_r = k,\ \#\{j \mid n_j = 3\} \leq d\}$$

の $\mathbb{Q}$-線形和となる．

(1) $\zeta(k_1,\ldots,k_e) \times \pi^{2s}$．ただし，$k_1+\cdots+k_e+2s = k$, $e \leq d$.
(2) $I_{\mathrm{bl}}(k_0,\ldots,k_e)$．ただし，$k_0+\cdots+k_e = k-2$, $e \leq d$.
(3) $\prod_{j=1}^{m} I_{\mathrm{bl}}(k_0^{(j)},\ldots,k_{e_j}^{(j)})$．ただし $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{e_j} k_i^{(j)} = k-2m$, $\sum_{j=1}^{m} e_j \leq d$.

注意 9. (3) は (2) の一般化である．

6. Algebraic basis について

$\mathcal{H}$ の (linear ではなくて)algebraic な basis についても，Brown により結果が知られている．詳細については原論文を参照してほしい．

定理 10 ([1, Theorem 8.1])**.** 集合

$$\{\zeta^{\mathfrak{m}}(w) \mid w \text{ は } 2,3 \text{ の } \textit{Lyndon word}\}$$

は $\mathcal{H}$ の *polynomial basis* となる．

7. Hoffman star basis について

等号付き多重ゼータ値を

$$\zeta^{\star}(k_1,\ldots,k_r) := \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

で定義する．これが多重ゼータ値の線形和でかけることは，定義からすぐに分かる．Ihara-Kajikawa-Ohno-Okuda は次を予想した．

予想 1 ([8, Conjecture 1])**.** 全ての多重ゼータ値は

$$\{\zeta^{\star}(k_1,\ldots,k_r) \mid k_1,\ldots,k_r \in \{2,3\}\}$$

の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書ける．

この主張については（陽に述べている箇所は見つけられなかったが）以下で説明するように既に証明されているように思われる．Glanois は次を示した．

定理 11. [4, Theorem 4.2] 次は $\mathcal{H}$ の基底となる．

$$\{\zeta^{\sharp,\mathfrak{m}}(2a_0+1, 2a_1+3,\ldots,2a_{p-1}+3, \overline{2a_p+2}),\ a_i \geq 0\}.$$

周期写像 per を考えることにより，系として次が得られる

系 1. 全ての多重ゼータ値は,

$$\{\zeta^{\sharp}(2a_0+1, 2a_1+3,\ldots,2a_{p-1}+3, \overline{2a_p+2}),\ a_i \geq 0\}$$

の $\mathbb{Q}$-線形和となる．

一方，Zhao により次が知られている．

定理 12. [11]

$$\zeta^{\sharp}(2a_0+1, 2a_1+3,\ldots,2a_{p-1}+3, \overline{2a_p+2}) = \zeta^{\star}(\{2\}^{a_0}, 3, \{2\}^{a_1},\ldots,3,\{2\}^{a_p}).$$

系 1 と定理 12 から予想 1 が示される．

8. より一般の反復積分と混合テイトモチーフの周期について

$K \subset \mathbb{C}$ を代数体とし，S を K の有限素点の集合とする．このとき，1 節で述べたのと同様の定理が成り立つ．

(1) 代数体 $K \subset \mathbb{C}$ に対し，次数付き環 $\mathcal{H}(K) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i(K)$ が存在する．(K 上の混合テイトモチーフの周期の環)
(2) 次数付き環 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i(\mathcal{O}_{K,S})$ が存在する．($\mathcal{O}_{K,S}$ 上の混合テイトモチーフの周期の環)
(3) 環準同型 $\mathrm{per} : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \to \mathbb{C}$ が存在する．
(4) 特別な元 $\mu \in \mathcal{H}_1(\mathcal{O}_{K,S})$ であって $\mathrm{per}(\mu) = 2\pi\sqrt{-1}$ となるものが存在する．$\mathcal{A}(\mathcal{O}_{K,S}) = \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})/(\mu)$ と置く．
(5) 余積 $\Delta : \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}) \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_{K,S}) \otimes \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$ が存在する．
(6) 非標準的な同型

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{O}_{K,S}) \simeq \bigoplus_{\substack{0\le d \\ n_1+\cdots+n_d=n}} \bigotimes_{j=1}^{d} \left(K_{2n_j-1}(\mathcal{O}_{K,S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right)$$

が存在する．
(7) $n \geq 0$, $a_0, \ldots, a_{n+1} \in K$ に対して

$$I_{\gamma}^{\mathfrak{m}}(a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathcal{H}(K)$$

が定まり，$\mathrm{per}(I_{\gamma}^{\mathfrak{m}}(a_0, \ldots, a_{n+1})) = I_{\gamma}(a_0, \ldots, a_{n+1})$．$\{a_0, \ldots, a_{n+1}, \infty\} \subset X$ となるとき，これは $\mathbb{P}^1 \setminus X$ 上の反復積分と呼ばれる．
(8) 更に $a_i - a_j \in \mathcal{O}_{K,S}^{\times}$ が任意の $i \neq j$ に対して成立するとき

$$I(a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}).$$

(9) Goncharov-Brown の余積公式も成立する．

(7) は反復積分が混合テイトモチーフの周期となることを主張しているが，逆は非常に難しい問題である．

予想 2 (Goncharov, [5, Conjecture 0.17(a)])**.** $K \subset \mathbb{C}$ を代数体とする．$\mathcal{H}(K)$ の任意の元は，$\mathbb{P}^1 \setminus (K \cup \{\infty\})$ 上の反復積分の $\mathbb{Q}$-線形和だろう．

この予想は，$K = \mathbb{Q}$ の場合ですら未解決である．Brown の定理からは次が従う．

定理 13. $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$ の任意の元は $\mathbb{P}^1 \setminus (\{0, 1, \infty\})$ 上の反復積分の $\mathbb{Q}$-線形和である．

Brown の定理と同じタイプの定理としては次が知られている．

定理 14 (Deligne, [3])**.** $N \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$ とする．μ_N を 1 の N 乗根の集合とする．$\mathcal{H}(\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}])$ の任意の元は $\mathbb{P}^1 \setminus (\{0, \infty, \mu_N\})$ 上の反復積分の $\mathbb{Q}$-線形和である．

9. 演習問題の解答

命題.

$$I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{0, \ldots, 0}^{a}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{b}; 1) = (-1)^{a+1} \binom{a+b}{a} \zeta^{\mathfrak{m}}(a+b+1)$$

Proof. a に関する帰納法で証明する．$a=0$ の場合は明らかである．$\overbrace{0,\dots,0}^{a-1},1,\overbrace{0,\dots,0}^{b}$ との shuffle product より

$$\begin{aligned} aI^{\mathfrak{m}}(0;\overbrace{0,\dots,0}^{a},1,\overbrace{0,\dots,0}^{b};1) &= -(b+1)I^{\mathfrak{m}}(0;\overbrace{0,\dots,0}^{a-1},1,\overbrace{0,\dots,0}^{b+1};1) \\ &= (b+1)(-1)^{a+1}\binom{a+b}{a-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(a+b+1) \quad \text{(帰納法の仮定を用いた)} \\ &= a(-1)^{a+1}\binom{a+b}{a}\zeta^{\mathfrak{m}}(a+b+1). \end{aligned}$$

よって示された. □

演習. $F_d\mathcal{H}$ が ϕ の選び方に依存しないことを示せ.

Proof. $F_0\mathcal{H}=\ker(\mathcal{H}\to\mathcal{A})$ と $F_d\mathcal{H}=\tilde{\Delta}^{-1}(\mathcal{A}\otimes F_{d-1}\mathcal{H})$ から従う. □

演習. $\Delta(x)-1\otimes x-x\otimes 1=0$ となる任意の $x\in\mathcal{H}_k$ に対して,

$$x\in\begin{cases} F_0\mathcal{H} & k:\text{even} \\ F_1\mathcal{H} & k:\text{odd}. \end{cases}$$

また $x\in\mathcal{H}$ が $\tilde{\Delta}x:=\Delta(x)-1\otimes x\in\mathcal{A}\otimes F_d\mathcal{H}$ を満たすとき $x\in F_{d+1}\mathcal{H}$.

Proof. $\mathcal{U}$ について同様の主張を示せばよい．$\{f_{i_1}\cdots f_{i_m}f_2^s\}$ から生成される $\mathcal{U}$ の部分空間を $\mathcal{U}^{(m)}$ と置く．$\mathcal{U}=\oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{U}^{(m)}$ である．線形写像 $\lambda:\mathcal{U}'\otimes\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ を

$$\lambda(f_{i_1}\cdots f_{i_m}\otimes f_{j_1}\cdots f_{j_n}f_2^s)=\begin{cases} f_{i_1}f_{j_1}\cdots f_{j_n}f_2^s & m=1 \\ 0 & m\neq 1 \end{cases}$$

で定める．このとき $m\geq 1$ と $t\in\mathcal{U}^{(m)}$ に対して定義から $\lambda(\Delta(t))=t$ であり，$t\in\mathcal{U}^{(0)}$ に対して $\lambda(\Delta(t))=0$ である．

さて，$\Delta(x)-1\otimes x-x\otimes 1=0$ と仮定しよう．$x=x_0+x_1+x_{\geq 2}$，ただし $x_0\in\mathcal{U}^{(0)}$, $x_1\in\mathcal{U}^{(1)}$, $x_{\geq 2}\in\oplus_{m=2}^{\infty}\mathcal{U}^{(m)}$ と分解すると,

$$\begin{aligned} x_1+x_{\geq 2} &= \lambda(\Delta(x)) \\ &= \lambda(1\otimes x+x\otimes 1) \\ &= \lambda(x\otimes 1) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

となる．よって $x_{\geq 2}=0$ となり，前半の主張が示された．

次に $\Delta(x)-1\otimes x\in\mathcal{A}\otimes F_d\mathcal{H}$ と仮定する．$x\in\oplus_{m=1}^{\infty}\mathcal{U}^{(m)}$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$$\begin{aligned} x &= \lambda(\Delta(x)) \\ &= \lambda(\Delta(x)-1\otimes x) \end{aligned}$$

であるが，$\Delta(x)-1\otimes x\in\mathcal{A}\otimes F_d\mathcal{H}$ より

$$\lambda(\Delta(x)-1\otimes x)\in F_{d+1}\mathcal{H}$$

である．よって $x\in F_{d+1}\mathcal{H}$ が示された. □

演習. $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_d \mathcal{H}_k$ と置くとき,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d = \frac{1}{1-x^2-x^3y}$$

を証明せよ.

Proof. $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_d \mathcal{H}_k = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_d \mathcal{U}_k$ である．よって定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(x^3y + x^5y + x^7y + \cdots)^n x^{2s} \\ &= \frac{1}{1-\frac{x^3y}{1-x^2}} \times \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{1-x^2-x^3y}.\end{aligned}$$

□

演習.

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^{k_0}, 3, \{2\}^{k_1}, 3, \ldots, \{2\}^{k_{d-1}}, 3, \{2\}^{k_d}) = \pm I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(2k_0+3, \ldots, 2k_{d-1}+3, 2k_d+2).$$

Proof. 定義より

$$\begin{aligned}&(-1)^{k_0+\cdots+k_d+d}\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^{k_0}, 3, \{2\}^{k_1}, 3, \ldots, \{2\}^{k_{d-1}}, 3, \{2\}^{k_d}) \\ &= I^{\mathfrak{m}}(0, \overbrace{1, 0, \ldots 1, 0}^{2k_0}, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \ldots 1, 0}^{2k_1}, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \ldots 1, 0}^{2k_{d-1}}, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \ldots 1, 0}^{2k_d}, 1) \\ &= I^{\mathfrak{m}}(\overbrace{0, 1, 0, \ldots, 1, 0}^{2k_0+3}, \overbrace{0, 1, 0, \ldots, 1, 0}^{2k_{1+3}}, \ldots, \overbrace{0, 1, 0, \ldots, 1, 0}^{2k_{d-1}+3}, \overbrace{0, 1, \ldots, 0, 1}^{2k_d+2}) \\ &= I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(2k_0+3, \ldots, 2k_{d-1}+3, 2k_d+2).\end{aligned}$$

□

演習. 定理 8 の $x=1$ の場合は, $x \geq 3$ の場合に帰着されることを示せ.

Proof. n を 3 以上の奇数とする. □

$\overbrace{(1, 0, \ldots 1, 0)}^{n-3}$ と (0) の shuffle 積より

$$0 = I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(1, n-1) + 2 \sum_{\substack{x+y=n \\ x:3\text{ 以上の奇数} \\ y:2\text{ 以上の偶数}}} I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x, y).$$

よって定理 8 の $x \geq 3$ での成立を仮定すると

$$
\begin{aligned}
I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(1,n-1) &= -4 \sum_{\substack{x+y=n \\ x:3\text{ 以上の奇数} \\ y:2\text{ 以上の偶数}}} \sum_{\substack{1<m<n \\ m:\text{奇数}}} \left(\binom{m-1}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^m}\right)\binom{m-1}{y-1} \right) I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta^{\mathfrak{m}}(m) \\
&= -4 \sum_{\substack{1<m<n \\ m:\text{奇数}}} \left((2^{m-2}-1) - \left(1-\frac{2}{2^m}\right) 2^{m-2} \right) I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta^{\mathfrak{m}}(m) \\
&= 2 \sum_{\substack{1<m<n \\ m:\text{奇数}}} I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta^{\mathfrak{m}}(m). \\
&= 2 \sum_{\substack{1<m<n \\ m:\text{奇数}}} \left(\binom{m-1}{1-1} - \left(1-\frac{2}{2^m}\right)\binom{m-1}{(n-1)-1} \right) I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(n-m)\zeta^{\mathfrak{m}}(m).
\end{aligned}
$$

よって示された.

演習. Zagier の恒等式を用いて，(4.1) を証明せよ.

Proof. $A_{x,y}$ と $B_{x,y}$ を

$$
\begin{aligned}
A_{x,y} &= \begin{cases} 2\binom{x+y-3}{x-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(x+y-2) & x:\mathrm{odd}, y:\mathrm{even} \\ -2\binom{x+y-3}{y-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(x+y-2) & x:\mathrm{even}, y:\mathrm{odd} \end{cases} \\
B_{x,y} &= \begin{cases} -2\left(1-\frac{2}{2^{x+y-2}}\right)\binom{x+y-3}{y-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(x+y-2) & x:\mathrm{odd}, y:\mathrm{even} \\ 2\left(1-\frac{2}{2^{x+y-2}}\right)\binom{x+y-3}{x-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(x+y-2) & x:\mathrm{even}, y:\mathrm{odd} \end{cases}
\end{aligned}
$$

で定める．定義より

$$
\begin{aligned}
A_{2n+1,2m+2} + A_{2n+2,2m+1} &= 0 \\
B_{2n+2,2m+3} + B_{2n+3,2m+2} &= 0
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
\xi^r_{x,y} &= \sum_{\substack{0<x'\le x\\ 0<y'\le y\\ x'+y'=r+2}} \pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x',y')).\\
&= \sum_{\substack{0<x'\le x\\ 0<y'\le y\\ x'+y'=r+2}} A_{x',y'}+B_{x',y'}\\
&= \sum_{\max(1,r+2-y)\le x'\le \min(x,r+2-1)} A_{x',r+2-x'}+B_{x',r+2-x'}\\
&= \begin{cases} A_{r+2-y,y} & y:\mathrm{odd}\\ 0 & y:\mathrm{even}\end{cases} + \begin{cases} A_{x,r+2-x} & x:\mathrm{odd}\\ 0 & x:\mathrm{even}\end{cases}\\
&+ \begin{cases} B_{r+2-y,y} & y:\mathrm{even}\\ 0 & y:\mathrm{odd}\end{cases} + \begin{cases} B_{x,r-x} & x:\mathrm{even}\\ 0 & x:\mathrm{odd}\end{cases}\\
&= \begin{cases} A_{x,r+2-x} & x:\mathrm{odd}\\ B_{x,r+2-x} & x:\mathrm{even}\end{cases} + \begin{cases} A_{r+2-y,y} & y:\mathrm{odd}\\ B_{r+2-y,y} & y:\mathrm{even}\end{cases}\\
&= \begin{cases} 2\binom{r-1}{x-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(r) & x:\mathrm{odd}\\ 2\left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{x-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(r) & x:\mathrm{even}\end{cases} + \begin{cases} -2\binom{r-1}{y-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(r) & y:\mathrm{odd}\\ -2\left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{y-1}\zeta^{\mathfrak{m}}(r) & y:\mathrm{even}\end{cases}\\
&= 2\zeta^{\mathfrak{m}}(r)\times\left(\begin{cases} \binom{r-1}{x-1} & x:\mathrm{odd}\\ \left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{x-1} & x:\mathrm{even}\end{cases} - \begin{cases} \binom{r-1}{y-1} & y:\mathrm{odd}\\ \left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{y-1} & y:\mathrm{even}\end{cases}\right)
\end{aligned}
$$

である．よって示された． □

References

[1] F. C. S. Brown, 'Mixed Tate motives over Z,' Annals of Math. 175 (2012), 949-976.

[2] S. Charlton, 'The alternating block decomposition of iterated integrals, and cyclic insertion on multiple zeta values,' preprint 1703.03784[NT].

[3] P. Deligne, 'Le groupe fondamental unipotent motivique de $\mathbb{G}_m - \mu_N$, pour N = 2, 3, 4, 6 ou 8', Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2010), 101–141.

[4] C. Glanois, 'Unramified Euler sums and Hoffman ★ basis,' preprint 1603.05178[NT].

[5] A. B. Goncharov, 'Polylogarithms in arithmetic and geometry,' In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), pages 374–387, Basel, 1995. Birkhäuser.

[6] A. B. Goncharov, 'Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry', Duke Math. J. 128 (2005), 209–284.

[7] M. E. Hoffman, 'The algebra of multiple harmonic series,' J. Algebra 194 (1997), 477-495.

[8] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno, and J. Okuda, 'Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values,' J. Algebra 332 (2011), 187-208.

[9] D. Zagier, 'Values of zeta functions and their applications,' in First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 497-512.

[10] D. Zagier, 'Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\dots,2,3,2,\dots,2)$,' Annals of Math. 175 (2012), 977-1000.

[11] J. Zhao, 'Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta (star) families,' J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 1669-1694; preprint 1303.2227[NT].

(広瀬稔 (Minoru Hirose)) Faculty of Mathematics, Kyushu University

E-mail address: `m-hirose@math.kyushu-u.ac.jp`