

多重ゼータ値のモジュラー現象

田坂 浩二 (愛知県立大学 情報科学部)

本稿で解説する多重ゼータ値のモジュラー現象とは、多重ゼータ値代数の深さフィルトレーション (depth filtration)

$$\mathfrak{D}^0 \mathcal{Z} = \mathbb{Q} \subset \mathfrak{D}^1 \mathcal{Z} \subset \cdots \subset \mathfrak{D}^r \mathcal{Z} = \langle \zeta(\mathbf{k}) \mid \text{dep}(\mathbf{k}) \leq r \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \cdots \subset \mathcal{Z}.$$

の構造に $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式が関わっている現象をさす。これは最初、Zagier 氏の 1990 年代前半の論文 [28, 29] において、モジュラー形式の周期理論との関連において指摘された。ほぼ同時期^{*1}に、Ihara-Takao [8] も関連する現象を見出している。後に、Broadhurst 氏と Kreimer 氏は 1997 年の論文 [2] において、空間 $\mathfrak{D}^r \mathcal{Z}_k$ の次元予想を提唱し、モジュラー形式の空間の次元との関係を示唆している。この予想の大部分は未解決である。

本稿では、これらモジュラー現象の解説および未解決問題の整理を試みる。まずは、モジュラー形式の周期理論の基本定理ともいえる Eichler-Shimura-Manin 対応を復習し、Gangl-Kaneko-Zagier [6] により得られた 2 重ゼータ値の線形関係式とモジュラー形式の周期多項式 $P_f(X, Y)$ との対応およびその双対側である Ihara-Takao [8] の関係式を紹介する。その後、Broadhurst-Kreimer 予想とその展望を述べる。

周期多項式の理論の復習

本稿で扱うモジュラー形式 (modular form) の記号を整理しておく。重さ k のモジュラー形式からなる $\mathbb{C}$ 線形空間を $M_k = M_k(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ とする: $f \in M_k$ は複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数で、Fourier 展開

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_f(n) q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau}, a_f(n) \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H})$$

^{*1} [8, p.258] では、1995 年の松本眞氏の論文でアナウンスしたとある。

をもち、反転に関する関数等式 $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$ を満たす ([22, Chapter VII, Section 1])。モジュラー形式の典型例として、Eisenstein 級数 $G_k(\tau)$ がある：偶数 $k \geq 4$ に対し、

$$G_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

ただし、 $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ である ([22, Chapter VII, Proposition 8])。線形空間 M_k の部分空間 S_k を Fourier 展開において $a_f(0) = 0$ となるモジュラー形式全体とし、この元を尖点形式 (cusp form) とよぶ。 $M_k = \{0\}$ (k : 奇数, 負の整数) であり、 $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$ ($k \geq 4$: 偶数) となる ([22, Chapter VII, Section 3])。また、次元は以下のように書ける：

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k = \left[\frac{k-4}{4} \right] - \left[\frac{k-2}{6} \right] \quad (k \geq 4 : \text{偶数}).$$

さて、周期多項式 (period polynomial) を導入しよう。日本語で読める文献として、Zagier 氏による九州大学での集中講義の講義録 [27] をあげておく。尖点形式 $f \in S_k$ に付随する周期多項式 $P_f(X, Y)$ を以下で定める：

$$P_f(X, Y) = \int_0^{i\infty} f(\tau)(X - Y\tau)^{k-2} d\tau.$$

これは $\mathbb{C}$ 係数 $k-2$ 次斉次多項式である。実際、多項式 $P_f(X, Y)$ の $X^{r-1}Y^{s-1}$ ($r+s=k, r, s \geq 1$) の係数は

$$L_f^*(s) = \int_0^\infty f(it)t^{s-1} dt$$

の定数倍であるが、 $a_f(0) = 0$ より積分は収束する。 $\text{Re}(s) > \frac{k-1}{2}$ のとき、 $L_f^*(s)$ に Fourier 展開を代入、和と積分を交換して項別積分し、ガンマ関数の積分表示 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ を使うと

$$L_f^*(s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{n>0} \frac{a_f(n)}{n^s}$$

という級数展開を得る。 $L_f^*(s)$ は $s \in \mathbb{C}$ の正則関数で、完備 Hecke L 関数などと呼ばれる。

モジュラー形式の保型性は値 $L_f^*(s)$ たちの関係式を導く。例えば、 f の反転に関する関数等式を定義に代入すると $L_f^*(s)$ ($s \in \mathbb{C}$) の関数等式

$$L_f^*(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} L_f^*(k-s)$$

が得られる。特に、 $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ に制限することにより、 $P_f(X, Y) + P_f(-Y, X) = 0$ とかけることがわかる。Eichler-Shimura-Manin 対応は、 $P_f(X, Y)$ が満たす関係式により特徴付けられる多項式の空間 $W_k^\pm$ と尖点形式の空間 S_k との間に単射 (同型写像) があるという主張である。以下、Kohnen-Zagier [12] の方針に沿って、Eichler-Shimura-Manin 対応を述べよう。

k を偶数とする。 $\mathbb{Q}[x, y]$ の $k-2$ 次斉次多項式からなる部分空間を V_k と表す。 $Q(X, Y) \in V_k$ への $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ の作用を以下で定め、これを群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})]$ に拡張しておく：

$$(Q|\gamma)(X, Y) = Q(aX + bY, cX + dY), \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}).$$

$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ の元 $S, T, \varepsilon, \delta$ を

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$ である。作用は例えば、 $(Q|\varepsilon)(X, Y) = Q(Y, X)$ 、 $(Q|\delta)(X, Y) = Q(-X, Y)$ となる。 V_k の部分空間 W_k を

$$W_k := \{Q \in V_k \text{ s.t. } Q|(1+S) = Q|(1+TS+(TS)^2) = 0\}$$

と定める。すると、 $S = \varepsilon\delta = \delta\varepsilon$ 、 $\varepsilon(TS)\varepsilon = (TS)^2$ より、 $Q \in W_k$ に対し、 $Q|\varepsilon = -Q|\delta \in W_k$ が確かめられる。したがって、空間 W_k は δ による固有値 ± 1 の固有空間 $W_k^\pm$ に分解される：

$$W_k = W_k^+ \oplus W_k^-.$$

すなわち, $Q \in W_k^\pm$ に対し, $Q|_\delta = \pm Q$ である。 k が偶数なので, $Q|_\delta = Q$ は Q が $x^{2i}y^{k-2i}$ たちの線形和 (偶多項式) となることを意味する。同様に $Q|_\delta = -Q$ の場合は, 奇多項式となる。 $W_{12}^\pm$ の基底は各々次で与えられる:

$$\begin{aligned} W_{12}^+ &\ni X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2, \quad X^{10} - Y^{10}, \\ W_{12}^- &\ni 4X^9Y - 25X^7Y^3 + 42X^5Y^5 - 25X^3Y^7 + 4XY^9. \end{aligned} \quad (1)$$

尖点形式 $f \in S_k$ に対し, 偶および奇周期多項式を

$$\begin{aligned} P_f^+(X, Y) &= \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq 1: \text{odd}}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \binom{k-2}{s-1} L_f^*(s) X^{r-1} Y^{s-1}, \\ P_f^-(X, Y) &= \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq 1: \text{even}}} (-1)^{\frac{s}{2}} \binom{k-2}{s-1} L_f^*(s) X^{r-1} Y^{s-1} \end{aligned}$$

とおく。 $P_f = iP_f^+ + P_f^-$ である。例えば, $\Delta(\tau) = q \prod_{n>0} (1 - q^n)^{24} = q - 24q^2 + \cdots \in S_{12}$ に対し,

$$\begin{aligned} c^{-1}P_\Delta^+(X, Y) \\ = \frac{36}{691}(X^{10} - Y^{10}) + X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2 \end{aligned} \quad (2)$$

となるが, これは (1) より W_{12}^+ の元であることがわかる。ただし, c は $P_\Delta^+(X, Y)$ の X^2Y^8 の係数で, 非零である (それは, $L_\Delta^*(9)$ がオイラー積表示を持つことから明らかである)。一般に, $P_f \in W_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ である。これは, $P_f|_\gamma = \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(\tau)(X - Y\tau)^{k-2} d\tau$ ($\forall \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$) を使うと容易に確かめられる。従って,

$$P_f^+(X, Y) \in W_k^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \quad P_f^-(X, Y) \in W_k^- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \quad (3)$$

がわかる。式 (3) により, S_k から $W_k^\pm \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ への線形写像が定義できる。これが単射 (同型写像) であるというのが Eichler-Shimura-Manin 対応である:

定理 1. (Eichler-Shimura-Manin 対応) 正の偶数 k に対し, 線形写像

$$r^- : S_k \rightarrow W_k^- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \quad f \mapsto P_f^-(X, Y)$$

は同型写像となり,

$$r^+ : S_k \rightarrow W_k^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, f \mapsto P_f^+(X, Y)$$

は余次元 1 の単射となる.

定理 1 の全射性 (および余次元 1 となること) は, 次元公式

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_k^- = \dim_{\mathbb{C}} S_k, \dim_{\mathbb{Q}} W_k^+ = \dim_{\mathbb{C}} M_k \quad (4)$$

(これは不変式の計算である) と単射性から従う。単射性は $L_f^*(s)$ ($s = 1, 2, \dots, k-1$) たちが 0 ならば $f = 0$ となることを意味する。証明は [13, Chapter V, VI] を参照されたい。

注意 1. Kohnen-Zagier [12, Section 1.2] により, $P_{R_n}^+(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$ となる (すなわち, $s \in \{1, 3, \dots, k-1\}$ での値 $L_{R_n}^*(s)$ が有理数になる) ような S_k の具体的な生成系 $\{R_n \in S_k \mid 0 < n < k-2 : \text{even}\}$ が知られている。 $P_f^-(X, Y)$ についても同様。

簡単にわかるように, $X^{k-2} - Y^{k-2} \in W_k$ である。偶周期多項式の空間 W_k^+ は, $W_k^+ = W_k^{+,0} \oplus \mathbb{Q}(X^{k-2} - Y^{k-2})$ と分解される。ただし,

$$W_k^{+,0} = \{Q \in V_k \cap X^2 Y^2 \mathbb{Q}[X^2, Y^2] \text{ s.t. } Q|(1 - T + T\varepsilon) = 0\}$$

である ([6, Section 5])。次元公式 (4) より, $\dim_{\mathbb{Q}} W_k^{+,0} = \dim_{\mathbb{C}} S_k$ である例えば,

$$W_{12}^{+,0} = \mathbb{Q}((X^2 Y^8 - X^8 Y^2) - 3(X^4 Y^6 - X^6 Y^4)) \quad (5)$$

となる。以下, $W^{+,0} = \bigoplus_{k>0} W_k^{+,0}$ とおく。空間 $W^{+,0}$ の元を制限偶周期多項式 (restricted even period polynomial) とよぶ。これは, 後ほど Ihara-Takao の関係式を述べる際に現れる。

Gangl-Kaneko-Zagier の関係式

[28, Section 8] に示唆されるように, 尖点形式に対応して 2 重ゼータ値の線形関係式が得られる。このことから説明を始めよう。

Rankin [19]^{*2}による Petersson 内積に関する公式

$$(f, G_{2r}G_{k-2r}) = 2(-1)^r \pi^k \frac{L_f^*(k-1)L_f^*(k-2r)}{(2r-1)!(k-2r-1)!}$$

(ただし, $f \in S_k$ は正規 Hecke 固有形式) と定理 1 の帰結 (すべての $G_{2r}G_{k-2r}$ たちと直交する尖点形式は 0 しかない) として, 空間 M_k が Eisenstein 級数 G_k とその二つの積 $G_{2r}G_{k-2r}$ ($2 \leq r \leq [k/4]$) により生成されることがわかる。さて, 尖点形式 $f \in S_k$ を $f = \sum a_r G_{2r}G_{k-2r} + b_k G_k$ と表わそう。すると, 全ての尖点形式 $g \in S_k$ に対し $(g, \sum a_r G_{2r}G_{k-2r}) = 0$ なので, 係数 a_r は $L_g^*(k-2r)$ たちの (g の取り方によらない) 関係式の係数として得られるはずである。一方, Fourier 展開の定数項の比較より, 関係式 $0 = \sum a_r \zeta(2r)\zeta(k-2r) + b_k \zeta(k)$ が得られる。これを調和積またはシャッフル積で展開することで, $L_f^*(k-2r)$ たちの関係式の係数から 2 重ゼータ値の間の線形関係式が導かれる。

Gangl-Kaneko-Zagier は, これとは別の方法で, 尖点形式から得られる 2 重ゼータ値の線形関係式を具体的に与えている。彼らの結果は正規化複シャッフル関係式のみを満たす形式的な記号が張る線形空間における等式として述べられる。ここでは, 少し弱い主張となるが, 2 重ゼータ値に置き換えた主張を述べておこう。

定理 2. (Gangl-Kaneko-Zagier [6, Theorem 3]) $Q \in W_k^+$ に対し, $\{q_{r,s} \in \mathbb{Q} \mid r+s=k\}$ を次のように定める:

$$Q(X+Y, X) = \sum_{r+s=k} \binom{k-2}{r-1} q_{r,s} X^{r-1} Y^{s-1}.$$

このとき, $q_{r,s} = q_{s,r}$ (r, s : 偶数) であり,

$$3 \sum_{\substack{r+s=k \\ r \geq 1, s \geq 3: \text{odd}}} q_{r,s} \zeta(r, s) = \sum_{\substack{r+s=k \\ r, s \geq 2: \text{even}}} q_{r,s} \zeta(r, s) - \sum_{r+s=k} (-1)^{r-1} q_{r,s} \zeta(k)$$

が成り立つ。

^{*2} [12, Section 1.4] も参照

証明はさほど難しくないのだが，いろいろと道具を用意しなくてはならないので割愛する。

定理 2 の関係式は，調和積 $\zeta(r)\zeta(s) = \zeta(r, s) + \zeta(s, r) + \zeta(r + s)$ と Euler の公式 $\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$ を使って

$$\sum_{\substack{r+s=k \\ r \geq 1, s \geq 3: \text{odd}}} q_{r,s} \zeta(r, s) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}\zeta(k)}$$

と読み替えることもできる。ただし， B_k は Bernoulli 数である。例えば， $X^{10} - Y^{10} \in W_{12}^+$ から

$$\zeta(1, 11) + \zeta(3, 9) + \zeta(5, 7) + \zeta(7, 5) + \zeta(9, 3) = \frac{1}{4}\zeta(12) \quad (6)$$

が得られ， $X^2Y^8 - 3X^4Y^6 + 3X^6Y^4 - X^8Y^2 \in W_{12}^+$ から

$$28\zeta(3, 9) + 150\zeta(5, 7) + 168\zeta(7, 5) = \frac{5197}{691}\zeta(12). \quad (7)$$

が得られる。

実は，定理 2 において， $Q \in r^+(S_k)$ に制限すると，より簡潔な等式

$$\sum_{\substack{r+s=k \\ r \geq 1, s \geq 3: \text{odd}}} q_{r,s} \zeta^{\frac{1}{2}}(r, s) = 0 \quad (8)$$

が成り立つ ([16])。ただし， $\zeta^{\frac{1}{2}}(r, s) = \zeta(r, s) + \frac{1}{2}\zeta(r + s)$ である。注意 1 より，関係式 (8) の係数 $q_{r,s}$ は有理数でとれる。例えば， $\Delta(\tau) \in S_{12}$ の偶周期多項式 (3) に対し，

$$\begin{aligned} & 22680\zeta^{\frac{1}{2}}(1, 11) + 13006\zeta^{\frac{1}{2}}(3, 9) - 29145\zeta^{\frac{1}{2}}(5, 7) \\ & - 35364\zeta^{\frac{1}{2}}(7, 5) + 22680\zeta^{\frac{1}{2}}(9, 3) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

なる関係式を得る。これと (6) を合わせると，(7) が得られる。

注意 2. 上述した $\zeta^{\frac{1}{2}}$ は Yamamoto 氏 [25] による t -多重ゼータ値の $t = \frac{1}{2}$ の場合である。多重ゼータスター値の 2-1 公式 [26, 31] などに現れる。たとえば，Ohno-Zudilin [17] の 2-1 公式によれば， $4\zeta^{\frac{1}{2}}(2a + 1, 2b + 1) = \zeta^*(1, \{2\}_a, 1, \{2\}_b)$ である。したがって，等式 (8) は 2-1 インデックスに

関する多重ゼータスター値の等式である。2-1 インデックスの多重ゼータスター値にカスプ形式の次元だけ関係式があることを最初に観察したのは Ohno 氏である。Gangl 氏はこの観察に触発され、Zudilin 氏と研究を進めているようだ。筆者は Gangl 氏に触発され、等式 (8) の発見に至った。

Problem 1. 3 重以上の多重ゼータ値において、Gangl-Kaneko-Zagier の関係式の類似があるか。

Problem 2. [11] において、尖点形式のレベルを取り替えた場合に、対応する 2 重ゼータ値の線形関係式が研究されている。関係式 (8) をなんらかの形でレベル N の尖点形式へと拡張することができるか。

Problem 3. 関係式 (9) の係数は 691 を法としてすべて 123 となる。この観察は、 S_k の次元が 1 の場合、次のように拡張される。正規 Hecke 固有形式 $f \in S_k$ と $p \mid B_k$ となる素数 $p > k$ に対し、 $a_f(n) \equiv \sigma_{k-1}(n) \pmod{p}$ が成り立つ (Ramanujan 型の合同式)。このとき、関係式 (8) の係数は p を法としてすべて等しくなる。次元が 2 以上の S_k において、関係式 (8) の係数についてどのようなことが成り立つだろうか。

Problem 4. k が奇数のとき、Zagier 氏 [30] により $\zeta(\text{odd}, \text{even})$ たちの間に $W_{k-1}^- \oplus W_{k+1}^{+,0}$ 個の線形関係式があることが示唆され、Ma 氏 [14, 15] によって、Gangl-Kaneko-Zagier の関係式の類似が得られている ($\zeta^{\frac{1}{2}}$ 版は [16])。 k が偶数の場合は、Eisenstein 級数を用いた“尖点形式が関係式を与える直感的な説明”ができたが、奇数重さの場合はよい説明がないままである。奇数重さの場合に、尖点形式から関係式が得られるのはなぜだろうか。

Ihara-Takao の関係式

Ihara-Takao [8] の関係式は、モチビック Lie 環 $\mathfrak{g}^m$ の生成元の深さに関する合同式として述べられる。モチビック Lie 環の基本事実をまとめて、Ihara-Takao の関係式を説明しよう。

萩原氏の稿 2.3 節において導入される Lie 代数^{*3}

$$\mathfrak{g}^m = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\text{Lie } U_{\text{dR}})_n$$

をモチビック Lie 環 (motivic Lie algebra) とよぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}^m$ は、各重さ $-n$ ($n \geq 3$: 奇数) に生成元をもつ次数付自由 Lie 環になるのであった。Brown 氏 [3] のモチビック多重ゼータ値における Hoffman 予想の解決 (広瀬氏の稿) により、 $\mathfrak{g}^m$ は 2 変数自由 Lie 環 $\text{Lie}[x_0, x_1]$ に埋め込めることがわかる。この埋め込みは、 $\text{Lie}[x_0, x_1]$ 上に Ihara (Poisson) 括弧積

$$\{f, g\} = [f, g] + D_f(g) - D_g(f) \quad (f, g \in \text{Lie}[x_0, x_1])$$

で Lie 構造^{*4}を定めると、Lie 準同型であることが知られている。ただし、 $[a, b] = ab - ba$ であり、 $f \in \text{Lie}[x_0, x_1]$ に対し、 $D_f : \text{Lie}[x_0, x_1] \rightarrow \text{Lie}[x_0, x_1]$ は交換子 $[,]$ に関する導分で、生成元 x_0, x_1 に対し $D_f(x_0) = 0$, $D_f(x_1) = [x_1, f]$ により定義される。以下、簡単のため、この埋め込みの像と $\mathfrak{g}^m$ を同一視し、 $\mathfrak{g}^m$ を Lie 環 $(\text{Lie}[x_0, x_1], \{, \})$ の部分 Lie 環とみなす：

$$\mathfrak{g}^m \subset (\text{Lie}[x_0, x_1], \{, \}).$$

文字 x_1 の次数が r 以上の元からなる $\mathfrak{g}^m$ の部分空間を $\mathfrak{D}_r \mathfrak{g}^m$ で表す。すると、文字 x_1 に関する減少フィルトレーション (深さフィルトレーションの双対)

$$\mathfrak{g}^m = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{g}^m \supset \mathfrak{D}_2 \mathfrak{g}^m \supset \cdots$$

が生じる。Ihara 括弧積の定義から、整数 $r, s \geq 1$ に対し、 $\{\mathfrak{D}_r \mathfrak{g}^m, \mathfrak{D}_s \mathfrak{g}^m\} \subset \mathfrak{D}_{r+s} \mathfrak{g}^m$ が成り立つことに注意しておく。

Ihara-Takao の関係式を述べる。 $\mathfrak{g}^m$ の生成元を $\sigma_n \in \text{Lie}[x_0, x_1]$ ($n \geq 3$: 奇数) と書こう。 $\sigma_n \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{g}^m$ である。以下、 σ_n の $x_0^{n-1} x_1$ の係数を 1 に正規化しておく。

^{*3} 萩原氏の稿では $u_{\text{dR}}^{\text{gr}}$ と表記されるが、ここでは Brown 氏の予想を紹介する都合、論文 [4] の記号を採用する。

^{*4} 組 $(\text{Lie}[x_0, x_1], \{, \})$ が Lie 環になることを示す方法はいくつか知られる。 $\text{Lie}[x_0, x_1]$ の定義も含めて、[21, Section 1] などを参照されたい。

定理 3. (Schneps [21, Theorem 4.1]) $\{a_{n,m} \in \mathbb{Q} \mid n + m = k\}$ に対し ,

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n>m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} \{\sigma_n, \sigma_m\} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m}$$

が成立する必要十分条件は

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n>m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} (X^{n-1}Y^{m-1} - X^{m-1}Y^{n-1}) \in W_k^{+,0}$$

である。

$\mathfrak{g}^m$ は自由 Lie 環なので , 例えば , $\{\sigma_3, \sigma_9\}$ と $\{\sigma_5, \sigma_7\}$ は $\mathfrak{g}^m$ の重さ -12 の元からなる部分空間の 1 組の基底である。(5) を思い出すと , 定理 3 より , これら基底に

$$\{\sigma_3, \sigma_9\} - 3\{\sigma_5, \sigma_7\} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m} \quad (10)$$

なる関係式が得られる。定理 3 は , $\{\sigma_n, \sigma_m\}$ たちの x_1 の次数 2 の部分を消すような線形結合 (このとき , parity theorem^{*5}によって , x_1 の次数 3 の部分も消える) が尖点形式の次元だけ存在することを意味する。存在性は Ihara-Takao の定理 [8, II, Theorem 2] であり , 関係式の係数が制限偶周期多項式と一致することを証明したのは Schneps 氏 [21]^{*6}である。証明は至って初等的である。

Problem 5. モチビック Lie 環 $\mathfrak{g}^m$ の重さ $-3, -5, -7, -9$ の次元は 1 なので , $\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_9$ は正規化の条件からただ一つに定まる。例えば , $\sigma_3 = [x_0, [x_0, x_1]] + [x_1, [x_1, x_0]]$ となることが知られている。一般に , σ_n を x_0, x_1 で具体的に書き表すことは難しい問題である。この問題提起は [3, Problem 1] や [8, p.258]などを参照されたい。これについて , 文字 x_1 の次

^{*5} 多重ゼータ値の場合 , $k+r$ が奇数のとき , 重さ k 深さ r の多重ゼータ値が深さ $r-1$ 以下の多重ゼータ値の積和でかけるという主張である。様々な文脈で証明されている ([7, Corollary 4.2], [9, Proposition 17], [4, Proposition 6.4], [24, 18] など)。

^{*6} 定理 3 は Ihara-Takao の定理 $(+\alpha)$ から導けることが Sharifi 氏により指摘されている ([21, Acknowledgement])。

数が d である σ_n の部分項を $\sigma_n^{(d)}$ と書くと、正規化の条件から、

$$\sigma_n^{(1)} = \underbrace{[x_0, [x_0, \dots, [x_0, x_1] \dots]]}_{n-1} \quad (11)$$

がわかっている。また、Brown 氏 [5, Definition 5.4] は正規化複シャッフル関係式を用いることで、 $\sigma_n^{(2)}, \sigma_n^{(3)}$ の x_0, x_1 での明示的な表記 (一つの選び方) を与えている。 $\sigma_n^{(d)}$ ($d \geq 4$) に標準的な選び方はあるだろうか。

Problem 6. Ihara 氏 [8, I, (6.3)] は、次の合同式を観察している (正規化の違いがあることに注意):

$$\{\sigma_3, \sigma_9\} - 3\{\sigma_5, \sigma_7\} \equiv 0 \pmod{691}. \quad (12)$$

左辺は x_0, x_1 の単項式の線形和でかけており、その係数の全てが 691 で割り切れるという主張である。合同式 (12) は、 S_k の次元が 1 の場合、Problem 3 で述べた素数 p (Bernoulli 数 B_k の分子) に対する合同式に拡張される ([4, Example 8.4])。Ihara 氏の予想 [8, II, Conjecture 2] と関連して、 S_k の次元が 2 以上の場合に、どのような合同式が得られようか。Sharifi 氏 [20] によるこの合同式の Galois 側での研究も興味深い。

Ihara-Takao の関係式と Gangl-Kaneko-Zagier の関係式

さて、偶周期多項式を経由して、Ihara-Takao の関係式と Gangl-Kaneko-Zagier の関係式が得られることがわかった。ここでは、多重ゼータ値との関係が見える形で Ihara-Takao の関係式を言い換える。同様の言い換えは、Baumard-Schneps [1] などにも現れる。

まず、天下りに導分 ∂_n を定義しよう。萩原氏の稿 2.3 節で導入されるアフィン群スキーム U_{dR} における群演算 $U_{dR} \times U_{dR} \rightarrow U_{dR}$ は、座標環 $\mathcal{O}(U_{dR}) \cong \mathcal{A} = \mathcal{H}/(\mathcal{H}_2)$ の余積 $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ を誘導する^{*7}。ただし、 $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_k$ は萩原氏の稿 4.1 節で定義される次数付 $\mathbb{Q}$ 代数であり、 $\mathbb{Q}$ 線型空間として、モチビック多重ゼータ値 $\zeta^m(\mathbf{k})$ で生成される。 $\zeta^m(\mathbf{k})$ の

^{*7} 同型 $\mathcal{O}(U_{dR}) \cong \mathcal{A}$ は Brown 氏の Hoffman 予想解決の帰結である。広瀬氏の稿も参照されたい。

$\mathcal{A}$ での像を $\zeta^a(\mathbf{k})$ で表す。余積 Δ と商の合成を $D : \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}^2) \otimes \mathcal{A}$ とおき, 奇数 $n \geq 3$ に対し

$$\partial_n := (\zeta^a(n)^\vee \otimes \text{id}) \circ D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

と定める。ただし, $\zeta^a(n)^\vee(\zeta^a(\mathbf{k}))$ で $\zeta^a(\mathbf{k})$ の $\mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}^2$ での像における $\zeta^a(n)$ の係数とし, これを $\mathbb{Q}$ 線形に拡張したものを $\zeta^a(n)^\vee : \mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ と書いた。たとえば, $\zeta^m(3, 3) = \frac{1}{2}\zeta^m(3)\zeta^m(3) - \frac{1}{2}\zeta^m(6)$ であるので, $\zeta^a(6)^\vee(\zeta^a(3, 3)) = -\frac{1}{2}$ である。ここからわかるように, $\zeta^a(n)^\vee$ を具体的に計算するのは容易ではない。 $\mathcal{A}_k$ で重さ k の部分空間を表すと, $\partial_n : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k-n}$ である。

導分 ∂_n とモチビック Lie 環 $\mathfrak{g}^m$ の生成元 σ_n ((11) をみたすもの) との対応を手短に述べておく。ペアリング

$$\langle, \rangle : \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle \times \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}$$

を $\varphi = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \varphi_w w^\vee \in \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$ と語 $u \in \{e_0, e_1\}^\times$ に対し, $\langle \varphi, u \rangle = \varphi_u \in \mathbb{Q}$ で定める。 $(e_{i_1} \cdots e_{i_r})^\vee = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ とした。このとき, $\partial_n(u) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \langle \sigma_n \circ w^\vee, u \rangle \zeta^a(w)$ が成り立つ。ただし, $\circ : \mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle$ は線形化 Ihara 作用素 ([4, Definition 2.1]) である。導分 ∂_n を具体的に計算することは, σ_n を x_0, x_1 で具体的に書き表すことと同じ (難しい) 問題である。

しかしながら, 深さの低い多重ゼータ値に対する ∂_n を計算する方法が知られており, その帰結として, 定理 3 の言い換えが得られる。

定理 4. $\{a_{n,m} \in \mathbb{Q}\}$ に対し, 作用素

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} \partial_m \circ \partial_n : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{Q}$$

が $\mathfrak{D}^3 \mathcal{A}_k$ において自明である必要十分条件は

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 3:\text{odd}}} a_{n,m} X^{n-1} Y^{m-1} \in W_k^{+,0}$$

である。

定理 4 を応用して，制限偶周期多項式の双対として多重ゼータ値の関係式を導出しよう。今， $\mathfrak{D}^3\mathcal{A}_k$ の n 個の元 $\zeta^a(w_1), \dots, \zeta^a(w_n)$ に対し，行列 $C_k(w_1, \dots, w_n)$ を

$$\begin{pmatrix} \partial_{k-3} \circ \partial_3(\zeta^a(w_1)) & \partial_{k-5} \circ \partial_5(\zeta^a(w_1)) & \cdots & \partial_3 \circ \partial_{k-3}(\zeta^a(w_1)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_{k-3} \circ \partial_3(\zeta^a(w_n)) & \partial_{k-5} \circ \partial_5(\zeta^a(w_n)) & \cdots & \partial_3 \circ \partial_{k-3}(\zeta^a(w_n)) \end{pmatrix}$$

で定義する。この行列の右零化ベクトルのなす空間は， $W_k^{+,0}$ と同型な部分空間をもつ。一方，左零化ベクトルは， $\zeta^a(w_1), \dots, \zeta^a(w_n)$ たちの線形関係式となることが容易に証明できる（広瀬氏の稿で紹介されている方法と同じ）。

行列 $C_k(w_1, \dots, w_n)$ から得られる関係式の例を $k = 12$ の場合に 2 つほど見てみてみよう。簡単のため， $(k_1, \dots, k_r)$ に対応する語を $e_{k_1, \dots, k_r}$ と書く。

例 1. 正方向行列

$$C_{12}(e_{3,9}, e_{5,7}, e_{7,5}, e_{9,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 6 \\ -15 & -14 & 15 & 15 \\ -27 & -42 & 42 & 28 \end{pmatrix}$$

の右零化ベクトルは ${}^t(1, -3, 3, -1)$ の定数倍となる。一方，左零化ベクトルとして $(28, 150, 168, 0)$ がとれるので，関係式 (7) (mod $\mathbb{Q}\zeta(12)$) が得られる。[1] では，Gangl-Kaneko-Zagier の関係式と Ihara-Takao の関係式が行列 C_k を介して双対関係にあることを述べている。また，[10] で述べられているように，この行列と 2 重 Eisenstein 級数との関係も興味深い。

例 2. Gangl-Kaneko-Zagier の関係式以外にも制限偶周期多項式と双対にある関係式が得られる。例えば，正方向行列

$$C_{12}(e_{3,1,8}, e_{5,1,6}, e_{7,1,4}, e_{9,1,2}) = \begin{pmatrix} -\frac{75}{2} & -21 & 45 & \frac{37}{2} \\ -\frac{33}{2} & -7 & 19 & \frac{19}{2} \\ -\frac{15}{2} & 7 & 5 & \frac{1}{2} \\ -\frac{21}{2} & 21 & 3 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

の右零化ベクトルは ${}^t(1, -3, 3, -1)$ の定数倍である。一方，左零化ベクトルから

$$14\zeta^a(3, 1, 8) + 5\zeta^a(5, 1, 6) + 14\zeta^a(7, 1, 4) = 0$$

を得る。

Problem 7. 例 2 であげた行列の左零化ベクトルを右零化ベクトル (制限偶周期多項式) から直接得る方法はあるだろうか。

Broadhurst-Kreimer 予想

Broadhurst-Kreimer 予想とは，重さ k ，深さ r 以下の多重ゼータ値で生成される空間 $\mathfrak{Z}_k^r$ の次元予想である (予想 2 で述べる)。深さ 2 と 4 の多重ゼータ値とモジューラ形式との関係を示唆する予想となっている。予想が提唱された当初は，数値実験以外に根拠はなかったのだが，近年，新たな見解と証明の指針が得られつつある (寺杣氏の稿も参照)。ここでは，Brown 氏の論文 [4, 5] に沿った方針を紹介する。

Broadhurst-Kreimer 予想を深さ次数化多重ゼータ値代数の構造予想と結びつけて話をするために，プロトタイプとして，モチビク多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{A} = \mathcal{H}/(\mathcal{H}_2)$ の場合の次元公式を思い出そう。同型 $(\mathcal{U}\mathfrak{g}^m)^\vee \cong \mathcal{O}(U_{dR}) \cong \mathcal{A}$ より，重さ k の空間 $\mathcal{A}_k$ の次元は

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_k x^k = \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathcal{U}\mathfrak{g}^m)_{-k} x^k = \frac{1}{1 - \sum_{i > 0} x^{2i+1}} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

となる。2 番目の等式がポイントで，モチビク Lie 環 $\mathfrak{g}^m$ が σ_n ($n \geq 3$: 奇数) で生成される自由 Lie 環であることの帰結である。

さて，深さ次数化による 2 重次数付きモチビク Lie 環 (depth-graded motivic Lie algebra)

$$\mathfrak{d}^m = \bigoplus_{r \geq 1} \mathfrak{d}_r^m = \bigoplus_{r \geq 1} (\mathfrak{D}_r \mathfrak{g}^m / \mathfrak{D}_{r+1} \mathfrak{g}^m)$$

を考えよう。この次数付普遍包絡環は，深さ次数化代数 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}$ の双対空間

と同型である:

$$(\mathcal{U}\mathfrak{d}^m)^\vee \cong \bigoplus_{k,r \geq 0} (\mathfrak{D}^r \mathcal{A}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{A}_k) =: \text{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}. \quad (13)$$

したがって, Lie 環 $\mathfrak{d}^m$ の生成元と関係式 (とその関係) を全て決定できれば, 先と同様の議論で $\mathfrak{D}^r \mathcal{A}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{A}_k$ の次元が得られる。しかしながら, $\mathfrak{d}^m$ の構造は $\mathfrak{g}^m$ ほど単純ではない。例えば, $\mathfrak{g}^m$ の生成元 σ_n の $\mathfrak{d}^m$ での像を $\bar{\sigma}_n \in \mathfrak{d}_1^m$ と書くと, Ihara-Takao の関係式から, $\bar{\sigma}_n$ の間に尖点形式と対応する 2 次の関係式が生じる。よって, $\mathfrak{d}^m$ は $\bar{\sigma}_n$ で生成される自由 Lie 環ではない。

では, どんな Lie 環であろうか。関係式 (10) を見ると, $\{\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_m\}$ たちの間の関係式を与えると同時に, $\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m$ の元を与えていることがわかる。すなわち, $W^{+,0}$ から $\mathfrak{d}_4^m$ への線形写像が得られている。 $\sigma_n \equiv \sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(2)} + \sigma_n^{(3)} \pmod{\mathfrak{D}_4 \mathfrak{g}^m}$ なので, 制限偶周期多項式 $\sum a_{n,m} X^{n-1} Y^{m-1} \in W^{+,0}$ に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{n>m} a_{n,m} \{\sigma_n, \sigma_m\} &\equiv \sum_{n>m} a_{n,m} (\{\sigma_n^{(1)}, \sigma_m^{(1)}\} + \{\sigma_n^{(1)}, \sigma_m^{(2)}\} + \{\sigma_n^{(2)}, \sigma_m^{(1)}\} \\ &\quad + \{\sigma_n^{(1)}, \sigma_m^{(3)}\} + \{\sigma_n^{(2)}, \sigma_m^{(2)}\} + \{\sigma_n^{(3)}, \sigma_m^{(1)}\}) \pmod{\mathfrak{D}_5 \mathfrak{g}^m} \end{aligned}$$

であることに注意する。定理 3 より, 右辺の最初の 3 つの項は 0 なので,

$$\begin{aligned} c : W^{+,0} &\longrightarrow \mathfrak{d}_4^m \\ \sum_{n>m} a_{n,m} X^{n-1} Y^{m-1} &\longmapsto \sum_{d=1}^3 \sum_{n>m} a_{n,m} \{\sigma_n^{(d)}, \sigma_m^{(4-d)}\} \pmod{\mathfrak{D}_5 \mathfrak{g}^m} \end{aligned}$$

により線形写像が定義される。Brown 氏による $\sigma_n^{(d)}$ ($d \leq 3$) の公式を使うと, 像は具体的に書き下せる。これが単射かはわかっていない。 c を用いて, Lie 環 $\mathfrak{d}^m$ の構造が次のようになると予想されている:

予想 1. [5, Conjecture 1]

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{d}^m; \mathbb{Q}) &\cong \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{Q} \bar{\sigma}_{2i+1} \oplus c(W^{+,0}) \\ H_2(\mathfrak{d}^m; \mathbb{Q}) &\cong W^{+,0} \\ H_i(\mathfrak{d}^m; \mathbb{Q}) &= 0 \quad \text{for all } i \geq 3. \end{aligned}$$

実際, Brown 氏 [4] は予想 1 と写像 c の単射性を仮定して

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathcal{U}\mathfrak{d}^m)_{-k,r} x^k y^r = \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2 - \mathbb{S}(x)y^4}$$

となることを確かめている。ただし,

$$\begin{aligned} \mathbb{O}(x) &= \frac{x^3}{1-x^2} = x^3 + x^5 + \cdots, \\ \mathbb{S}(x) &= \sum_{k>0} \dim_{\mathbb{C}} S_k x^k = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)} = x^{12} + x^{16} + \cdots \end{aligned}$$

である。同型 (13) より

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathfrak{D}^r \mathcal{A}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{A}_k) x^k y^r = \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2 - \mathbb{S}(x)y^4} \quad (14)$$

を得る。等式 (14) の成立が, モチビック版 Broadhurst-Kreimer 予想である。深さ $r \leq 3$ における予想 (14) は, Goncharov 氏 [7, Theorems 2.4 and 2.5] により, Brown 氏の予想 1 を仮定することなく肯定的に解決されている。 $r \geq 4$ については, 未解決である。

多重ゼータ値版の Broadhurst-Kreimer 予想を述べておこう。

予想 2. (Broadhurst-Kreimer 予想 [2])

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim (\mathfrak{D}^r \overline{\mathcal{Z}}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \overline{\mathcal{Z}}_k) x^k y^r \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2 - \mathbb{S}(x)y^4}.$$

ただし, $\overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} / \zeta(2) \mathcal{Z}$ である。

関連話題として, $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}$ のある部分空間に関する Brown 氏による次元予想を述べよう。Brown 氏は [4, Section 10] において, $\bar{\sigma}_n \in \mathfrak{d}_1^m$ で生成される $\mathfrak{d}^m$ の部分 Lie 環に対応すると期待される多重ゼータ値の空間

$$\mathcal{A}_{k,r}^{od} = \langle \zeta_{\mathfrak{D}}^a(k_1, \dots, k_r) \mid k_1 + \cdots + k_r = k, k_i \geq 3 : \text{odd} \rangle_{\mathbb{Q}} \quad (k, r \geq 0)$$

を導入している。ただし, $\zeta^a(w) \in \mathcal{A}$ の $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \mathcal{A}$ での像を $\zeta_{\mathfrak{D}}^a(w)$ とおい

た。空間 $\mathcal{A}_{k,r}^{od}$ の次元予想 (uneven part of motivic Broadhurst-Kreimer conjecture [5, Conjecture 5]) は以下である:

$$\sum_{k,r \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_{k,r}^{od} x^k y^r \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - \mathcal{O}(x)y + \mathcal{S}(x)y^2}. \quad (15)$$

予想 (15) の右辺を $y = 0$ で展開すると, 空間 $\mathcal{A}_{k,r}^{od}$ の生成元の関係式はある意味で尖点形式由来のものしかないといえる。例えば, $\mathcal{A}_{12,2}^{od}$ の関係式はモチビック版の関係式 (7) のみであり, $\mathcal{A}_{15,3}^{od}$ は関係式 (7) に $\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3)$ をかけて調和積で展開して得られる関係式と次の関係式のみである ([23]^{*8}):

$$-14\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3, 3, 9) + 15\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3, 5, 7) + 6\zeta_{\mathfrak{D}}^a(3, 7, 5) + 36\zeta_{\mathfrak{D}}^a(5, 5, 5) = 0. \quad (16)$$

予想 (15) の $r = 2$ の場合は解決されている。 $r \geq 3$ の場合は未解決である。特に, $r = 3$ の場合は, $\zeta(\text{odd}, \text{odd}, \text{odd})$ が $\mathfrak{D}^3 \mathcal{Z} / \mathfrak{D}^2 \mathcal{Z}$ を生成するだろうという Broadhurst 予想の解決につながる。

Problem 8. $r = 3$ の場合の予想 (15) を示せ。

Problem 9. 関係式 (16) と尖点形式 $\Delta(\tau)$ との間に (Gangl-Kaneko-Zagier の関係式の意味で) 関係はあるだろうか。

Problem 10. Brown 氏は [4] において, 制限偶周期多項式から線形複シャッフル空間 $\mathfrak{ls}$ の深さ 4 の元 $e : W^{+,0} \rightarrow \mathfrak{ls}_4$ を構成している。 $\mathfrak{ls} \cong \mathfrak{d}^m$ が予想されている。 e と c の関係を明らかにせよ (写像 e は単射であることがわかっている)。

Problem 11. 写像 c が単射であることを示せ。

Problem 12. $\mathfrak{d}_4^m$ の次元を求めよ。

^{*8} Gangl 氏は Zudilin 氏とともに $\zeta^{\frac{1}{2}}$ の研究から同じような現象を同時期に発見していたようである。

参考文献

- [1] S. Baumard, L. Schneps, *Period polynomial relations between double zeta values*, Ramanujan J. **32** (2013), no. 1, 83–100.
- [2] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393** (1997), no. 3-4, 403–412.
- [3] F. Brown, *Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$* , Ann. of Math. **175** (2012), no. 2, 949–976.
- [4] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, arXiv:1301.3053.
- [5] F. Brown, *Zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of a punctured elliptic curve*, Forum Math. Sigma **5** (2017), 1–56.
- [6] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, In: Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.
- [7] A.B. Goncharov, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$* , Duke Math. J., **110**(3) (2001), 397–487.
- [8] Y. Ihara, *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro- p fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$* , in Arithmetic Fundamental Groups and Noncommutative Algebra, Proc. Sympos. Pure Math. **70**, Berkeley, CA, 1999, 247–273.
- [9] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.
- [10] M. Kaneko, 二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数 , およびモジュラー形式 , 京大数理研短期共同「多重ゼータ値の研究」報告集 , (2004).
- [11] M. Kaneko, K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2*, Math. Ann. **357** (2013), no. 3, 1091–1118.
- [12] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modu-

- lar forms (Durham, 1983), Ellis Horwood (1984), 197–249.
- [13] S. Lang, *Introduction to Modular Forms*, Springer-Verlag, 1976.
 - [14] D. Ma, *Period polynomial relations between formal double zeta values of odd weight*, Math. Ann. **365** (2016), no. 1, 345–362.
 - [15] D. Ma, *Period polynomial relations of binomial coefficients and binomial realization of formal double zeta space*, Int. J. Number Theory **13** (2017), no. 3, 761–774.
 - [16] D. Ma, K. Tasaka, *Relationship between multiple zeta values of depths 2 and 3 and period polynomials*, preprint arXiv:1707.08178.
 - [17] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.
 - [18] E. Panzer, *The parity theorem for multiple polylogarithms*, J. Number Theory **172** (2017), 93–113.
 - [19] R.A. Rankin, *The scalar product of modular forms*, Proc. London Math. Soc., **2** (1952), 371–393.
 - [20] R. Sharifi, *Relationships between conjectures on the structure of pro- p Galois groups unramified outside p* , Proceedings Symp. in Pure Math. **70** (2002), 275–284.
 - [21] L. Schneps, *On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators*, J. Lie Theory **16**(1) (2006), 19–37.
 - [22] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, **7**, Springer-Verlag, New York, 1996.
 - [23] K. Tasaka, *On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials*, Kyushu J. Math. **70**(1) (2016), 1–28.
 - [24] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler–Zagier sums*, Acta Arith. **111** (2004), 27–42.
 - [25] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Algebra **385** (2013), 102–114.
 - [26] 山本修司, 等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式, 第 59 回代数学シンポジウム報告集 (2014), 128–135.
 - [27] D. Zagier, 保型形式論の話題から (金子昌信記), 九州大学理学部数学教室講義録刊行会, (1993).

- [28] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.
- [29] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, in Hokei-keishiki to L-kansuu no kenkyuu (= Research on Automorphic Forms and L-Functions), RIMS Kokyuroku **843** (1993), 162–170.
- [30] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$* , Ann. of Math., **175** (2012), no. 2, 977–1000.
- [31] J. Zhao, *Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta star values*, J. Math. Soc. Japan, **68**(4) (2016), 1669–1694.