Yamamoto 積分表示と積分級数等式

川崎菜穂 (Naho Kawasaki)
東北大学大学院理学研究科

Yamamoto([11]) は, 2-labeled poset を用いて反復積分を定義し, 多重ゼータ（スター）値を含む広範な対象の積分表示を与えている．多重ゼータ値の類似物である, Arakawa-Kaneko ゼータ関数や Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数, 一部のルート系のゼータ関数それぞれの特殊値を表すことができ, 応用としてそれらの特殊値に対する関係式が再証明される．本稿では, Yamamoto 積分表示を導入したのち, Kaneko-Yamamoto の積分級数等式と付随する予想を紹介する．また, Yamamoto 積分表示の Arakawa-Kaneko ゼータ関数への応用や関連する課題を述べる．

正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して, index $\mathbf{k}$ を $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ で定義する． $k_r > 1$ のとき, index $\mathbf{k}$ を admissible (以下, adm.) と呼ぶ．多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ および多重ゼータスター値 $\zeta^\star(k_1, \ldots, k_r)$ は, 任意の adm. index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

および

$$\zeta^\star(\mathbf{k}) = \zeta^\star(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1\le\cdots\le m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

でそれぞれ定義されるものである．

1 Yamamoto 積分表示

Yamamoto 積分表示 ([11]) について述べる．

定義 1.1 ([11, Definition 2.1])**.** (1) $X = ((X, \preceq), \delta_X)$ を有限半順序集合 (finite partially ordered set) $(X, \preceq)$ と *labeling map* $\delta_X : X \to \{0,1\}$ の組とし, *2-poset* と呼ぶ.

(2) 2-poset X が *admissible* (以下, adm.) であるとは, X のすべての極大元 x に対して $\delta_X(x) = 0$ かつ, X のすべての極小元 x に対して $\delta_X(x) = 1$ となることとする．

(3) adm. 2-poset X に付随する積分を

$$I(X) = \int_{\Delta(X)} \prod_{x \in X} \omega_{\delta_X(x)}(t_x)$$

で定義する．ただし,

$$\Delta(X) = \left\{ (t_x)_x \in (0,1)^X \mid t_x < t_y \text{ if } x \prec y \right\}$$

かつ,

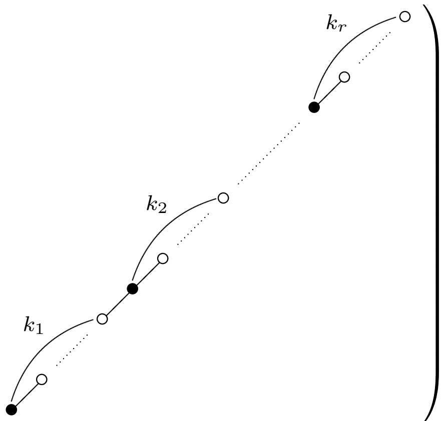
$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

とする.

2-poset X が adm. であることと, $I(X)$ が収束することは同値である. empty 2-poset を $\varnothing$ で表し, $I(\varnothing) = 1$ とおく. これは empty index $\varnothing$ (記号流用) に対する定義 $\zeta(\varnothing) = \zeta^{\star}(\varnothing) = 1$ に対応している.

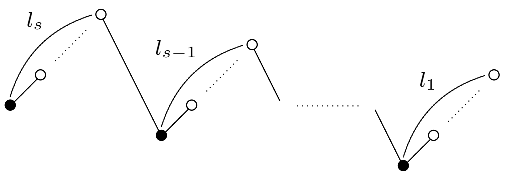
2-poset を表すために, 頂点 $\circ$, $\bullet$ がそれぞれ $\delta_X(x) = 0, 1$ に対応している Hasse 図を用いる. このとき, 辺で結ばれた頂点の上下関係で半順序関係を表す. 一般に, 2-poset に対応する Hasse 図は唯一通りではない. adm. 2-poset X が全順序のとき, $I(X)$ は多重ゼータ値の反復積分表示に一致する. 実際,

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r) = I$$



となる. また, 多重ゼータスター値 $\zeta^{\star}(l_1, \ldots, l_{s-1}, l_s)$ の Yamamoto 積分表示は,

$$\zeta^{\star}(l_1, \ldots, l_{s-1}, l_s) = I$$



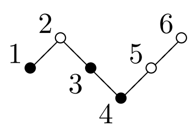
となる. これは, [11, Corollary 1.3] で与えられた多重ゼータスター値の積分表示である.

例 1.2 (多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の例)**.** 2-poset X を

$$X = \begin{cases} \{1 \prec 2 \succ 3 \succ 4 \prec 5 \prec 6\} \\ (\delta_X(1), \ldots, \delta_X(6)) = (1, 0, 1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

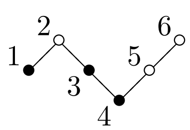
とおく. このとき, X は adm. である. Hasse 図を用いると,

$$I(X) = I$$



と表される. これは多重ゼータスター値 $\zeta^{\star}(3, 1, 2)$ の Yamamoto 積分表示である. 実際,

$$I$$



$$= \int_0^1 \frac{dt_6}{t_6} \int_0^{t_6} \frac{dt_5}{t_5} \int_0^{t_5} \frac{dt_4}{1-t_4} \int_{t_4}^1 \frac{dt_3}{1-t_3} \int_{t_3}^1 \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$$

を計算すると,

$$\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} = \sum_{0<n} \frac{t_2^n}{n},$$

$$\sum_{0<n} \frac{1}{n} \int_{t_3}^{1} t_2^{n-1} dt_2 = \sum_{0<n} \frac{1-t_3^n}{n^2},$$

$$\sum_{0<n} \frac{1}{n^2} \int_{t_4}^{1} \frac{1-t_3^n}{1-t_3} dt_3 = \sum_{0<m\le n} \frac{1-t_4^m}{mn^2},$$

$$\sum_{0<m\le n} \frac{1}{mn^2} \int_0^{t_5} \frac{1-t_4^m}{1-t_4} dt_4 = \sum_{0<l\le m\le n} \frac{t_5^l}{lmn^2},$$

$$\sum_{0<l\le m\le n} \frac{1}{lmn^2} \int_0^{t_6} t_5^{l-1} dt_5 = \sum_{0<l\le m\le n} \frac{t_6^l}{l^2mn^2},$$

$$\sum_{0<l\le m\le n} \frac{1}{l^2mn^2} \int_0^{1} t_6^{l-1} dt_6 = \sum_{0<l\le m\le n} \frac{1}{l^3mn^2} = \zeta^{\star}(3,1,2)$$

を得る.

多重ゼータ値や多重ゼータスター値の他に, Mordell-Tornheim 型ゼータ関数の特殊値 ([11]), Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値 ([5, 7, 11]) や Kaneko-Tsumura ゼータ関数の特殊値 ([5]) なども Yamamoto 積分表示をもつ. 以下, ゼータ関数の特殊値をゼータ値と呼ぶ.

2 積分級数等式

まず, 2-poset の基本的な構造と Yamamoto 積分表示の間に成り立つ関係式について紹介する.

命題 2.1 ([11, Definition 2.2, Proposition 2.3])**.** (1) 2-poset X の比較不可能な元 a, b に対して, X に関係 $a \prec b$ を追加した 2-poset を X_a^b と書く. このとき, 2-poset X が adm. ならば X_a^b, X_b^a は adm. であり,

$$I(X) = I(X_a^b) + I(X_b^a)$$

が成り立つ.

(2) 2-poset $X = ((X, \preceq), \delta_X)$ に対して, 2-poset $X^\dagger = ((X, \preceq^\dagger), \delta_{X^\dagger})$ を次のように定義する. X の元 x, y に対して, $x \preceq y$ ならば $y \preceq^\dagger x$ とする. そして, $\delta_{X^\dagger} = 1 - \delta_X$ とおく. このとき, 2-poset X が adm. ならば $X^\dagger$ は adm. であり,

$$I(X) = I(X^\dagger)$$

が成り立つ.

(3) 2-poset X, Y に対して, 2-poset $X \amalg Y = ((X \amalg Y, \preceq'), \delta_{X\amalg Y})$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} x \preceq' y \iff & x, y \in X \text{ and } x \preceq y \text{ in } X \text{ または} \\ & x, y \in Y \text{ and } x \preceq y \text{ in } Y \end{aligned}$$

とし, $\delta_{X\amalg Y} : X \amalg Y \to \{0,1\}$ を $\delta_X : X \to \{0,1\}$ と $\delta_Y : Y \to \{0,1\}$ の直和とする. このとき, 2-poset X, Y が adm. ならば $X \amalg Y$ は adm. であり,

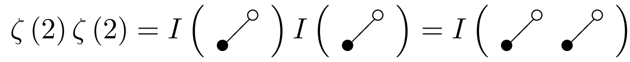
$$I(X)\, I(Y) = I(X \amalg Y)$$

が成り立つ.

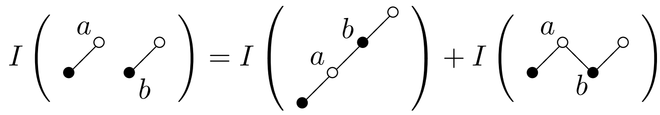
命題 2.1 (1) により, 2-poset X が adm. ならば $I(X)$ は多重ゼータ値の和で書き表せる.

命題 2.1 (1), (3) から, adm. 2-poset X, Y が特に全順序の場合, 次のように多重ゼータ値の shuffle 関係式が得られる. 多重ゼータ値の shuffle 関係式とは, 多重ゼータ値の反復積分表示に由来する積を用いて得られる関係式である.

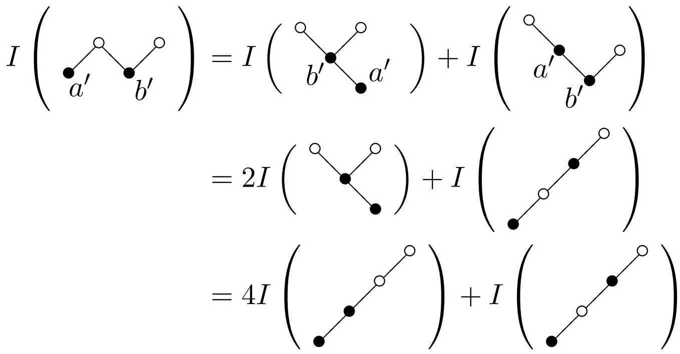
例 2.2. Riemann ゼータ値の積 $\zeta(2)\zeta(2)$ を Yamamoto 積分表示を用いて計算する. これは命題 2.1 (3) より,



となる. そして命題 2.1 (1) より,



となる. 同様に, 右辺の第二項に命題 2.1 (1) を繰り返し用いることにより,



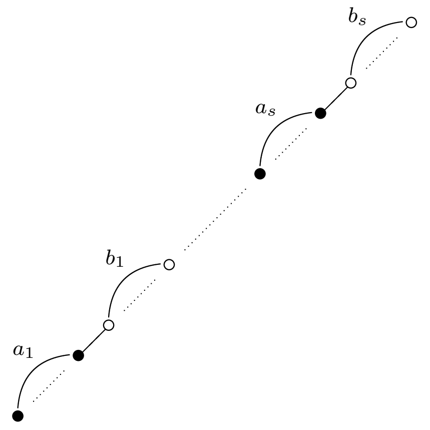
を得る. したがって, shuffle 関係式

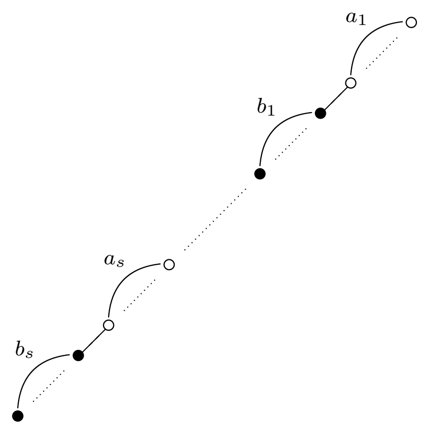
$$\zeta(2)\zeta(2) = 4\zeta(1,3) + 2\zeta(2,2)$$

が得られる.

命題 2.1 (2) は, 次の多重ゼータ値の双対公式の自然な一般化となっている. adm. index $\mathbf{k}$ を, 2 以上の成分と 1 とにわけて, $\mathbf{k} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1}, b_s+1)$ $(a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \geq 1)$ と表す. このとき, $\mathbf{k}$ の dual index $\mathbf{k}^\dagger$ を $\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1}, a_s+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$ で定義する. adm. index $\mathbf{k}$ とその dual index $\mathbf{k}^\dagger$ に対して, 双対公式 $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^\dagger)$ が成り立つ. この事実は, Yamamoto 積分表示を用いると次のように解釈できる.

例 2.3. $\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1},b_1+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_s+1)\quad(a_1,b_1,\ldots,a_s,b_s\geq 1)$ に対して, $\zeta(\mathbf{k})$ の Yamamoto 積分表示に命題 2.1 (2) を用いると,

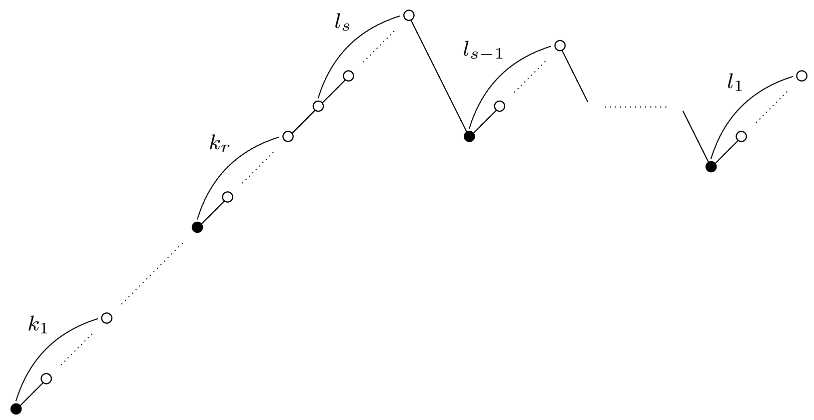
I 

$= I$ 

となり, $\mathbf{k}$ の dual index $\mathbf{k}^\dagger$ に対する $\zeta(\mathbf{k}^\dagger)$ が得られる.

次に, 積分級数等式について述べる.

定理 2.4 (積分級数等式, [4, Theorem 4.1])**.** 任意の non-empty index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$, $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_s)$ に対して,

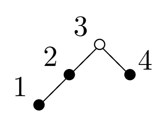
I 

$$=\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ \parallel\\ 0<n_1\leq\cdots\leq n_s}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}$$

が成り立つ.

積分級数等式において, $s=1$ とすると多重ゼータ値, $r=1$ とすると多重ゼータスター値, それぞれの Yamamoto 積分表示に一致する. このことから積分級数等式は, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値の積分表示の一般化となっていることがわかる.

積分級数等式は, 左辺の積分を左から右に計算することにより, 右辺の級数が得られる. ここでは, 例として $\mathbf{k}=\mathbf{l}=(1,1)$ の場合の証明を述べる. 左辺は,

L.H.S. $= I$ 

$$=\int_0^1\frac{dt_4}{1-t_4}\int_{t_4}^1\frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_1}{1-t_1}$$

である. t_1 から順に積分を計算すると,

$$\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} = \sum_{0<m_1} \frac{t_2^{m_1}}{m_1},$$

$$\sum_{0<m_1} \frac{1}{m_1} \int_0^{t_3} \frac{t_2^{m_1}}{1-t_2} dt_2 = \sum_{0<m_1<m_2} \frac{t_3^{m_2}}{m_1 m_2},$$

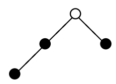
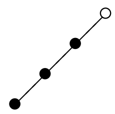
$$\sum_{0<m_1<m_2} \frac{1}{m_1 m_2} \int_{t_4}^{1} t_3^{m_2-1} dt_3 = \sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \| \\ n_2}} \frac{1-t_4^{n_2}}{m_1 m_2 n_2},$$

$$\sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \| \\ n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_2} \int_0^1 \frac{1-t_4^{n_2}}{1-t_4} dt_4 = \sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \| \\ 0<n_1\le n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_1 n_2} = \text{R.H.S.}$$

を得る.

積分級数等式の両辺を, 次の例のようにそれぞれ展開することによって, 多重ゼータ値の関係式が得られる.

例 2.5. $\mathbf{k} = \mathbf{l} = (1,1)$ の場合を計算する. 左辺は命題 2.1 (1) より,

$I\Bigg($  $\Bigg) = 3I\Bigg($  $\Bigg) = 3\zeta(1,1,2)$

となる. 一方, 右辺は,

$$\sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \| \\ 0<n_1\le n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_1 n_2} = 2\zeta(1,1,2) + \zeta(2,2) + \zeta(1,3)$$

となる. したがって,

$$\zeta(1,1,2) = \zeta(2,2) + \zeta(1,3)$$

を得る.

積分級数等式は簡明な式であるが, そこから得られる多重ゼータ値の関係式族は大きなクラスになり, 次のような予想が知られている.

予想 2.6 ([4, Conjecture 4.3])**.** 積分級数等式から得られる関係式族によって, 多重ゼータ値の全ての線形関係式が導出されるであろう.

このことに関連して, 次のような事実が知られている.

定理 2.7 ([4, Theorem 4.6, Theorem 4.8, Theorem 6.7])**.** (1) 有限複シャッフル関係式のもとで, 積分級数等式と正規化基本定理 ([2, Theorem 1]) は同値である.

(2) 積分級数等式のもとで, harmonic 関係式と shuffle 関係式は同値である.

(3) 積分級数等式, 有限複シャッフル関係式および双対公式により, 川島関係式 ([6, Corollary 5.4]) が導出される.

3 Arakawa-Kaneko ゼータ関数への応用

Kaneko と Tsumura はゼータ関数

$$\eta(\mathbf{k};s)=\eta(k_1,\cdots,k_r;s):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}\left(1-e^t\right)}{1-e^t}t^{s-1}dt\qquad(\mathrm{Re}(s)>1-r)$$

を定義した ([3]). これは, Arakawa-Kaneko ゼータ関数

$$\xi(\mathbf{k};s)=\xi(k_1,\cdots,k_r;s):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}\left(1-e^{-t}\right)}{e^t-1}t^{s-1}dt\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

([1]) の '双子の兄弟' と呼ばれている. ただし, $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ を index, s を複素変数とする. そして, $\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z)$ を multiple polylogarithm

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\qquad(|z|<1)$$

とする. Kaneko-Tsumura ゼータ関数 $\eta(\mathbf{k};s)$ および Arakawa-Kaneko ゼータ関数 $\xi(\mathbf{k};s)$ は, 複素全平面に整関数として解析接続される.

Kaneko と Tsumura は, これらのゼータ関数の特殊値を多重ゼータ値または多重ゼータスター値の明示的な線形和で表した. この定理を紹介するために記号を定めておく. 任意の非負整数列 $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_r)\quad(j_1,\dots,j_r\geq 0)$ に対して, $\mathbf{j}$ の weight および depth をそれぞれ, $\mathrm{wt}(\mathbf{j})=j_1+\cdots+j_r$, $\mathrm{dep}(\mathbf{j})=r$ で定義する. 任意の index $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して, $\mathbf{k}_+:=(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+1)$ とおく. depth が等しい $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_r)$ に対して, $\mathbf{k}+\mathbf{j}$ を index

$$\mathbf{k}+\mathbf{j}:=(k_1+j_1,\dots,k_r+j_r),$$

そして, $b(\mathbf{k};\mathbf{j})$ を

$$b(\mathbf{k};\mathbf{j}):=\prod_{i=1}^r\left(\begin{array}{c}k_i+j_i-1\\ j_i\end{array}\right).$$

とおく.

Kaneko と Tsumura は [3] の中で, 次の定理を示した.

定理 3.1 ([3, Theorem 2.5])**.** 任意の non-empty index $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と任意の正の整数 m に対して,

$$\eta(\mathbf{k};m)=(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{j})=m-1\\ \mathrm{dep}(\mathbf{j})=n}}b\left((\mathbf{k}_+)^\dagger;\mathbf{j}\right)\zeta^\star\left((\mathbf{k}_+)^\dagger+\mathbf{j}\right)$$

および

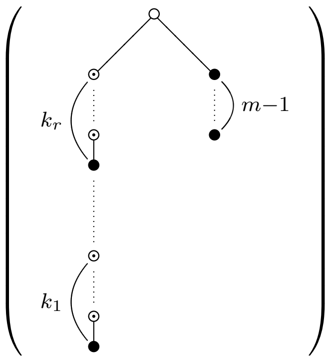
$$\xi(\mathbf{k};m)=\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{j})=m-1\\ \mathrm{dep}(\mathbf{j})=n}}b\left((\mathbf{k}_+)^\dagger;\mathbf{j}\right)\zeta\left((\mathbf{k}_+)^\dagger+\mathbf{j}\right)$$

が成り立つ. ただし, 和は weight が $m-1$ であり, depth が $n=\mathrm{dep}((\mathbf{k}_+)^\dagger)$ である非負整数列 $\mathbf{j}$ すべてをわたる.

この定理は Yamamoto 積分表示を用いると, 次のように再証明できる ([5]).

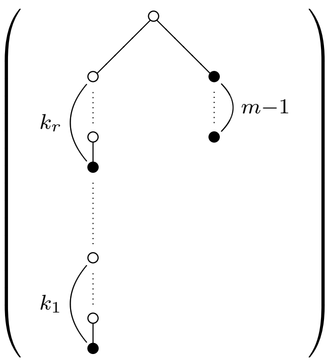
正の整数 m に対して, Kaneko-Tsumura ゼータ値 $\eta(k_1, \ldots, k_r; m)$ の Yamamoto 積分表示は,

$$\eta(k_1, \ldots, k_r; m) = (-1)^{r-1} I$$



となる (cf. [10]). ただし, $\omega_0(t) + \omega_1(t) = \frac{dt}{t(1-t)}$ を表す頂点として $\odot$ を用いた. また, Arakawa-Kaneko ゼータ値 $\xi(k_1, \ldots, k_r; m)$ の Yamamoto 積分表示は,

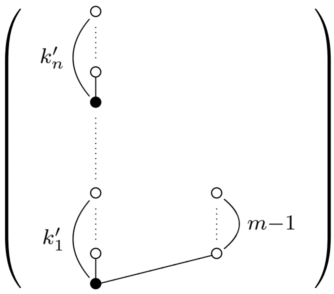
$$\xi(k_1, \ldots, k_r; m) = I$$



となる (cf. [3]).

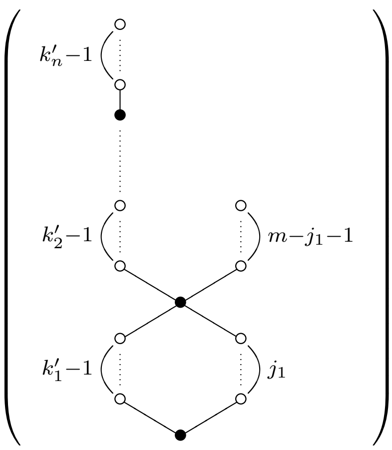
Combinatorial proof. $\xi(\mathbf{k}; m)$ の Yamamoto 積分表示と命題 2.1 (2) より,

$$\xi(\mathbf{k}; m) = I$$



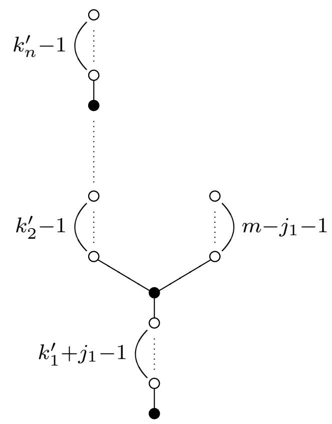
が得られる. ただし, $(\mathbf{k}_+)^\dagger = (k'_1, \ldots, k'_n)$ とする. 以下, 全順序化を行う. 命題 2.1 (1) より,

$$\xi(\mathbf{k}; m) = \sum_{j_1=0}^{m-1} I$$



となる．極小元とその次の黒丸の間にある k'_1+j_1-1 個 $(1\le j_1\le m-1)$ の白丸を全順序化する方法は $\binom{k'_1+j_1-1}{j_1}$ 通りであることから，

$$\xi\left(\mathbf{k};m\right)=\sum_{j_1=0}^{m-1}\binom{k'_1+j_1-1}{j_1} I$$



となる．同様の操作を $n-1$ 回繰り返すことによって，示したい式が得られる．$\eta\left(\mathbf{k};m\right)$ についても同様に示すことができる． □

また，次の定理は [3, (3.11)] で予想され，[10, Corollary 2.5] には一般化された公式として証明が記載されている．

定理 3.2 ([10, Corollary 2.5])**.** 任意の正の整数 k,m に対して，

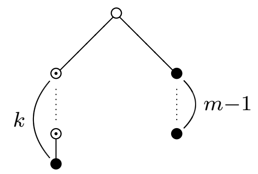
$$\eta\left(k;m\right)=\eta\left(m;k\right)$$

が成り立つ．

この定理も Yamamoto 積分表示を用いて，次のように再証明できる ([5])．

Combinatorial proof. 左辺を計算すると，

$$\eta\left(k;m\right)=I$$



$$=\sum_{\substack{0<u_1\le\cdots\le u_k\\ \| \\ 0<v_1\le\cdots\le v_m}}\frac{1}{u_1\cdots u_k v_1\cdots v_m}$$

となる．右辺の級数の対称性より明らか． □

注意 3.3. [3] と [10] では，$\eta\left(\mathbf{k};m\right)$ および $\xi\left(\mathbf{k};m\right)$ の定義式から，解析的あるいは母関数の計算によって定理 3.1，定理 3.2 を導いている．

4 その他の研究とこれからの課題

Yamamoto 積分表示が用いられているその他の研究について，三つ紹介する:

- Kaneko-Yamamoto([4]) は，積分級数等式を用いて制限付き和公式を証明した（[4, Proposition 7.1]）．この制限付き和公式により，和公式と Hoffman 関係式が導出されることも示している（[4, Corollary 7.2, Remark 7.3]）．

- Shingu([7]) は, depth が 1 の index $\mathbf{k} = (k)$ に対する Kaneko-Tsumura ゼータ値 $\eta(k;m)$ を多重ゼータ値の和で表せることを, Yamamoto 積分表示を用いて証明した ([7, 定理 6.1]). この結果を特殊化することにより, Kaneko-Tsumura による予想式 ([3, p.39]) が成り立つことも示した ([7, 系 6.2]). また, 定理 3.2 を大野関係式から再証明している ([7, 定理 7.1]).

- Umezawa([8]) は, 'Mordell-Tornheim 型の Arakawa-Kaneko ゼータ値' が '一般 Mordell-Tornheim 型のゼータ値' の和で書き表せることを示した ([8, Theorem 5]). この証明は二通りあり, そのうちの一つでそれぞれのゼータ値に対する Yamamoto 積分表示が用いられている ([8, Remark 5]). また, 一般 Mordell-Tornheim 型のゼータ値を多重化し, これが Yamamoto 積分表示をもつことにも言及している ([8, Remark 10]).

最後に, Yamamoto 積分表示に関連する今後の課題をいくつか挙げておく:

- 2 つの多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の積が多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の和でうまく表せるか.

- 積分級数等式から有限複シャッフル関係式が導出できるか. この問題は定理 2.7 (1), (2) より, 積分級数等式から正規化複シャッフル関係式が導出できるかという問題と同値である.

- 積分級数等式から双対公式が導出できるか.

- '多変数版の Kaneko-Tsumura ゼータ値'([3, Definition 5.6]) を Yamamoto 積分表示できるか. そして, 定理 3.2 の多変数版である [10, Corollary 2.5] の再証明ができるか.

- Yamamoto 積分表示を用いて, 多重ゼータスター値と t-多重ゼータ値の間に成り立つ 2-1 公式を再解釈できるか. t-多重ゼータ値とは, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間したものである. Yamamoto([9]) は Yamamoto 積分表示を用いて, 2-1 公式の両辺の値に対する結果と疑問について述べている. その疑問を解決することで, 2-1 公式が成り立つ背景をより深く理解できるか.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189-209.

[2] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.*, **142** (2006), 307-338.

[3] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **232** (2018), 19-54, arXiv:1503.02156.

[4] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Mathematica*, **24** (2018), 2499-2521, arXiv:1605.03117.

[5] N. Kawasaki and Y. Ohno, Combinatorial proofs of identities for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions, *Kyushu J. Math.*, **72** (2018), 215-222.

[6] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory*, **129** (2009), 755-788.

[7] 神宮啓佑, Kaneko-Tsumura ゼータ関数とその周辺, 修士論文, 名古屋大学 (2018).

[8] R. Umezawa, On an analog of the Arakawa-Kaneko zeta function and relations of some multiple zeta values, preprint, 2018, arXiv:1803.11441.

[9] 山本修司, 等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式, 第 59 回代数学シンポジウム 報告集 (2014), 128-135.

[10] S. Yamamoto, Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers, preprint, 2016, arXiv:1607.01978.

[11] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 3-14, arXiv:1405.6499.