KZ 方程式と KZ 結合子

原田 遼太郎 (名古屋大学 多元数理科学研究科)

1 概要

本稿では Drinfeld によって導入された KZ 結合子と多重ゼータ値の関係について扱う. §2 においてはいくつかの記号と Proposition を紹介する. §3 にて形式的 KZ 方程式を紹介し, その基本解の比により KZ 結合子を定義する. この KZ 結合子が実は多重ゼータ値の母関数であるという先行結果も述べる. §4 では結合子が満たす一連の関係式たちを紹介し, 5-サイクル関係式以外のその証明を与える. また, 結合子関係式から導かれる多重ゼータ値の関係式も述べる. 最後の §5 では補足として KZ 結合子が多重ゼータ値の母関数であることの証明について, その概略を与える.

2 準備

2.1 記号

R を単位元を持つ可換環, e_0, e_1 を変数として, 以下の記号をおく.

$R\langle e_0, e_1\rangle$: R を係数にもつ二変数非可換多項式環

$R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$: R を係数にもつ二変数非可換形式的べき級数環

$\{e_0, e_1\}^\times$: e_0, e_1 がなす語 ($\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ におけるモニック単項式) の集合であり, 空語を 1 と定義する.

$\mathbb{C}'$: $\mathbb{C}$ から二つの実半直線 $(-\infty, 0]$ と $[1, +\infty)$ を引いた領域

$ш$: $\mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle$ におけるシャッフル積

Proposition 2.1. 任意の $w \in \{e_0, e_1\}^\times$ に対し, 次を満たす $w_{ij} \in \mathbb{Q} + e_1\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle e_0$ $(0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s)$ たちが一意に存在する.

$$w = w_{00} + e_0 \sqcup\!\sqcup\, w_{10} + w_{01} \sqcup\!\sqcup\, e_1 + e_0 \sqcup\!\sqcup\, w_{11} \sqcup\!\sqcup\, e_1 + \cdots + e_0^r \sqcup\!\sqcup\, w_{rs} \sqcup\!\sqcup\, e_1^s$$

ここでは $r = \deg_{e_0} w, s = \deg_{e_1} w$ としている.

Example 2.2. $w = e_1e_0e_0e_1$ は次のように表せる.

$$e_1e_0e_0e_1 = -2e_1^2e_0^2 - e_1e_0e_1e_0 + e_1e_0^2 \sqcup\!\sqcup\, e_1$$

2.2 多重ゼータ値

初めに定義した語の中でも, e_1 から始まり e_0 で終わるような語についてはその指数と多重ゼータ値の指数の対応が考えられる. すなわち, $w \in e_1 \cdot \{e_0, e_1\}^\times \cdot e_0 := \{e_1we_0 | w \in \{e_0, e_1\}^\times\}$ が

$$w = e_1e_0^{k_1-1}e_1e_0^{k_2-1}\cdots e_1e_0^{k_r-1} \quad (k_i \in \mathbb{N}, k_r \geq 2)$$

と表せ, このとき $\zeta(w) := \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ と定める.

Proposition 2.3. 次の $\mathbb{Q}$-線形写像はシャッフル積に関して準同型である.

$$\begin{aligned} \zeta^{\sqcup\!\sqcup} : \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \zeta(w_{00}) \end{aligned}$$

即ち, $\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(w \sqcup\!\sqcup\, w') = \zeta^{\sqcup\!\sqcup}(w)\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(w')$ (記号は Proposition 2.1 と同じものを用いている).

3 KZ 方程式と KZ 結合子

3.1 KZ 方程式

まず, KZ 結合子の定義のための準備として KZ 方程式の定義を紹介する.

Definition 3.1. $\mathbb{C}'$ の開集合 U に対して, R_U を U 上正則な関数のなす環とする. $R_U\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ を, R_U を係数環にもつ変数 e_0, e_1 の非可換形式的べき級数環と定義する. $R_U\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ の元 $G(e_0, e_1)(z)$ を次のように表す.

$$G(e_0, e_1)(z) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} G_w(z)w \in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$$

以降, e_0, e_1 の並びを変えない限り $G(e_0, e_1)(z) = G(z)$ と略記する.

Definition 3.2. 次の微分方程式によって, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ 上の形式的 **KZ 方程式 (Knizhnik-Zamolodchikov equation)** が定義される.

$$\frac{d}{dz}G(z)=\left(\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\right)G(z).$$

ここで, $G(z)\in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ である.

以降, 便宜上, KZ 方程式の解の集合を $\mathrm{Sol}KZ$ とおく.

Lemma 3.3 ([3])**.** $G_0(z)\approx z^{e_0}:=\sum_{n\geq 0}\frac{(\log z)^n}{n!}e_0^n$ $(z\to 0)$ を満たすような $G_0(z)=G_0(e_0,e_1)(z)\in\mathrm{Sol}KZ$ が一意に存在する. ここで, $G(z)\approx z^{e_0}$ $(z\to 0)$ とは, ある $P_0(z)\in R_{\mathbb{C}'\cap D_\epsilon}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ (D_ϵ は $z=0$ の ϵ 近傍) が存在して $G(z)z^{-e_0}=1+zP_0(z)$ を満たすことと定義する. この $G_0(z)$ を $z=0$ における **KZ 方程式の基本解**とよぶ.

Proof. 存在性についてはTheorem 5.4の明示公式をもって証明とする. ここでは一意性についてのみ証明する. 今 $H(z),G_0(z)\in\mathrm{Sol}KZ$ を KZ 方程式の基本解とすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left(G_0(z)^{-1}H(z)\right)=-G_0(z)^{-1}\left\{\frac{d}{dz}G_0(z)\right\}G_0(z)^{-1}H(z)+G_0(z)^{-1}\frac{d}{dz}H(z)\\
&=-G_0(z)^{-1}\left\{\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\right\}H(z)+G_0(z)^{-1}\left\{\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\right\}H(z)\\
&=0
\end{aligned}$$

よって, $G_0(z)^{-1}H(z)\in\mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ となることが分かる. ここで仮定より, ある $P_0(z),P_H(z)\in R_{\mathbb{C}'\cap D_\epsilon}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ が存在して, 次の等式を満たす.

$$G_0(z)=z^{e_0}+zP_0(z)z^{e_0},\quad H(z)=z^{e_0}+zP_H(z)z^{e_0}.$$

したがって,

$$G_0(z)^{-1}H(z)=\left(z^{e_0}+zP_0(z)z^{e_0}\right)^{-1}\left(z^{e_0}+zP_H(z)z^{e_0}\right)\to 1\ (z\to 0)$$

が成り立つ. $G_0(z)^{-1}H(z)$ は z に非依存なので結局 $G_0(z)^{-1}H(z)=1$. □

Lemma 3.4 ([3])**.** $G_1(z)\approx(1-z)^{e_1}$ $(z\to 1)$ を満たすような $G_1(z)=G_1(e_0,e_1)(z)\in\mathrm{Sol}KZ$ が一意に存在する. ここで, $G(z)\approx(1-z)^{e_1}$ $(z\to 1)$ とは, ある $P_1(z)\in R_{\mathbb{C}'\cap D_\epsilon}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ (D_ϵ は $z=0$ の ϵ 近傍) が存在して $G(z)(1-z)^{-e_1}=1+(1-z)P_1(1-z)$ を満たすことと定義する. この $G_1(z)$ を $z=1$ における **KZ 方程式の基本解**とよぶ.

Proof. 存在性は Proposition 3.5 と明示公式によって証明とする. 一意性については $G_0(z)$ と同様にして証明される. □

Proposition 3.5. 二つの基本解の間に次の等式が成り立つ:

$$G_1(e_0, e_1)(z) = G_0(e_1, e_0)(1 - z).$$

Proof. 基本解の一意性から, 次の二つが成り立つことを確かめれば十分である.

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \approx (1 - z)^{e_1} \ (z \to 1), \tag{3.1}$$

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \in \mathrm{Sol}KZ. \tag{3.2}$$

(3.1) から示す. $G_0(z) \approx z^{e_0}$ $(z \to 0)$ により, 次が得られる.

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \approx (1 - z)^{e_1} \ (z \to 1).$$

(3.2) については, まず KZ 方程式を $z \to 1 - z$ と変数変換すると,

$$\frac{d}{dz} G(1 - z) = \left(\frac{e_1}{z} + \frac{e_0}{z - 1} \right) G(1 - z).$$

元の KZ 方程式と比較して右辺の e_0, e_1 の順番が入れ替わっていることと, $G_0(e_0, e_1)(z)$ は元の KZ 方程式の解であることから,

$$G_0(e_1, e_0)(1 - z) \in \mathrm{Sol}KZ.$$

したがって題意が示された. □

3.2 KZ 結合子

Theorem 5.4 により $G_0(z), G_1(z)$ は定数項 1 をもつべき級数なので逆元を持つ. このことから, KZ 結合子 (Drinfeld 結合子とも呼ばれる)Φ_{KZ} は次のように定義される.

Definition 3.6 ([4]). **KZ 結合子 (KZ associator)** $\Phi_{KZ}(e_0, e_1)$ は次の式で定義される.

$$\Phi_{KZ}(e_0, e_1) := G_1(e_0, e_1)(z)^{-1} G_0(e_0, e_1)(z) \in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

以降, e_0, e_1 の並びが問題にならない限り, $\Phi_{KZ}(e_0, e_1)$ を Φ_{KZ} と略す.

Lemma 3.7. Φ_{KZ} は z に依らない. 即ち,

$$\Phi_{KZ} \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

Proof. 次の計算より示される.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\Phi_{KZ} &= -G_1(z)^{-1}\Big(\frac{d}{dz}G_1(z)\Big)G_1(z)^{-1}G_0(z) + G_1(z)^{-1}\frac{d}{dz}G_0(z) \\
&= -G_1(z)^{-1}\Big(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\Big)G_1(z)G_1(z)^{-1}G_0(z) \\
&\quad + G_1(z)^{-1}\Big(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\Big)G_0(z) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Remark 3.8. Proposition 2.3 を用いることにより, [6] と [15] に表れる明示公式を次のようにも書ける.

$$\Phi_{KZ} = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times}} (-1)^{\deg_{e_1} w} \zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w}) w$$

但し, $\overleftarrow{w}$ は語 w に表れる e_0, e_1 達の並びを右から左に並べ替えた語としている.

4 結合子関係式

最後に KZ 結合子が満たす関係式について紹介する. この章ではまず初めに Definition 4.1 で結合子 $(\mu, \phi) \in K^{\times} \times K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ を定義し, その中で結合子関係式を述べる. そして次に, Definition 3.6 では Φ_{KZ} を基本解の比として定義し KZ 結合子 (Drinfeld 結合子) と呼んでいたがこの章ではより厳密に Definition 4.1 に照らし合わせ, 実は組 $(2\pi i, \Phi_{KZ})$ が結合子の例であることを示す. 但し, 証明は 3-サイクル関係式まで行う. また, 多重ゼータ値の関係式, Euler の公式との関係も紹介する.

下の Definititon 4.1 中の $\widehat{U\mathfrak{P}_5}$ は, $\mathfrak{P}_5$ の普遍包絡環を次数について完備化したものとしている. $\mathfrak{P}_5$ とは **5 本糸純球面組紐 Lie 代数**とよばれる, 次の関係式を満たすような元 X_{ij} $(1 \leq i, j \leq 5)$ で生成される体 K 上の次数

付き Lie 代数である．次数は $\deg(X_{ij}) = 1$ として定めている．

$$\cdot X_{ii} = 0, \quad \cdot X_{ij} = X_{ji} \ (i \neq j), \quad \cdot \sum_{j=1}^{5} X_{ij} = 0 \ (1 \leq i \leq 5),$$
$$\cdot [X_{ij}, X_{kl}] = 0 \ (i, j, k, l \text{ は相異なる}).$$

Definition 4.1. K を標数 0 の体とする．$(\mu, \phi) \in K^{\times} \times K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ は次の条件を満たすとき**結合子**をなすという[1].

$$\cdot \ \phi(e_0, 0) = \phi(0, e_1) = 1. \tag{4.1}$$

$$\cdot \ \Delta(\phi) = \phi \otimes \phi. \tag{4.2}$$

・(2-サイクル関係式): $K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ において,

$$\phi(e_0, e_1)\phi(e_1, e_0) = 1. \tag{4.3}$$

・(3-サイクル関係式): $e_\infty = -e_0 - e_1$とおくと, $K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ において

$$\exp(\frac{\mu}{2}e_0)\phi(e_\infty, e_0)\exp(\frac{\mu}{2}e_\infty)\phi(e_1, e_\infty)\exp(\frac{\mu}{2}e_1)\phi(e_0, e_1) = 1. \tag{4.4}$$

・(5-サイクル関係式): $\widehat{U\mathfrak{P}_5}$において,

$$\phi(X_{12}, X_{23})\phi(X_{34}, X_{45})\phi(X_{51}, X_{12})\phi(X_{23}, X_{34})\phi(X_{45}, X_{51}) = 1. \tag{4.5}$$

ここで, Δ とは $\Delta(e_0) = e_0 \otimes 1 + 1 \otimes e_0$, $\Delta(e_1) = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1$ で定まる, 通常の積についての K-代数準同型 $\Delta : K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \longrightarrow K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \widehat{\otimes} K\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ としている．$\widehat{\otimes}$ は完備テンソル積を意味する．また (4.1) から (4.5) までの五つの関係式を合わせて**結合子関係式**とよぶ.

Theorem 4.2 ([4]). $(2\pi i, \Phi_{KZ})$ は結合子である．

Proof. $2\pi i \in \mathbb{C}^{\times}$ は明らか．また Theorem 5.10 により Φ_{KZ} が (4.1) を満たすことがわかる．

関係式 (4.2) について証明する．$w \in \{e_0, e_1\}^{\times}$ に対し,

$$\Delta(w) = \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^{\times}} \delta_{w_1 \sqcup w_2, w} w_1 \otimes w_2$$

が成り立つ．ここで, $\delta_{w_1 \sqcup w_2, w}$ は通常の Kronecker のデルタを $\mathbb{Q}$-線形に拡張したものとしている．即ち, $w_1 \sqcup w_2$ 中における w の係数である．上式

[1] μ は K の可逆元全体の集合 $K^{\times}$ の元としていることに注意.

より,

$$\begin{aligned}\Delta(\Phi_{KZ}) &= \sum_{w\in\{e_0,e_1\}^\times}(-1)^{\deg_{e_1}w}\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w})\Delta(w)\\ &= \sum_{w\in\{e_0,e_1\}^\times}(-1)^{\deg_{e_1}w}\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w})\sum_{w_1,w_2\in\{e_0,e_1\}^\times}\delta_{w_1\sqcup\!\sqcup w_2,w}w_1\otimes w_2\\ &= \sum_{w_1,w_2\in\{e_0,e_1\}^\times}\sum_{w\in\{e_0,e_1\}^\times}(-1)^{\deg_{e_1}w}\delta_{w_1\sqcup\!\sqcup w_2,w}\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w})w_1\otimes w_2.\end{aligned} \tag{4.6}$$

$w_1 \sqcup\!\sqcup w_2$ の各項において, e_1 の次数は $\deg_{e_1}w_1+\deg_{e_1}w_2$ に等しいので,

$$(4.6)\text{ の最右辺} = \sum_{w_1,w_2\in\{e_0,e_1\}^\times}(-1)^{\deg_{e_1}w_1+\deg_{e_1}w_2}\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w_1\sqcup\!\sqcup w_2})w_1\otimes w_2.$$

Proposition 2.3 により,

$$\begin{aligned}(4.6)\text{ の最右辺} &= \sum_{w_1,w_2\in\{e_0,e_1\}^\times}(-1)^{\deg_{e_1}w_1+\deg_{e_1}w_2}\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w_1})\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w_2})w_1\otimes w_2\\ &= \Phi_{KZ}\otimes\Phi_{KZ}.\end{aligned}$$

よって (4.2) が示された.

次に関係式 (4.3) を証明する. Definition 3.6 と Proposition 3.5 から,

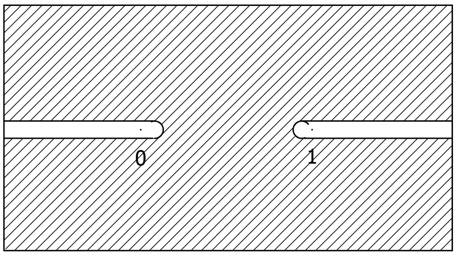
$$\begin{aligned}\Phi_{KZ}(e_1,e_0) &= G_1(e_1,e_0)(z)^{-1}G_0(e_1,e_0)(z)\\ &= G_0(e_0,e_1)(1-z)^{-1}G_1(e_0,e_1)(1-z)\\ &= \Phi_{KZ}(e_0,e_1)^{-1}.\end{aligned}$$

よって

$$\Phi_{KZ}(e_0,e_1)\Phi_{KZ}(e_1,e_0)=1.$$

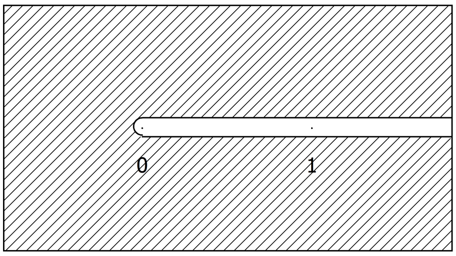
上式より (4.3) が示された.

次に関係式 (4.4) を示す. 三点 $\{0,1,\infty\}$ の各入れ替えに対して射影変換が一意に定まる. それらがなす自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\})$ により, 領域 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ と形式的 KZ 方程式が移り変わる. まず, $\{0,1,\infty\}$ を入れ替えない自明な射影変換 $\mathrm{id}:\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対しては領域は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ のまま, 形式的 KZ 方程式も Definition 3.2 と同様であるから, その基本解は $G_0(e_0,e_1)(z)$ である. その他の射影変換については次ページで見るように図の領域とその領域上の形式的 KZ 方程式の解が得られる.



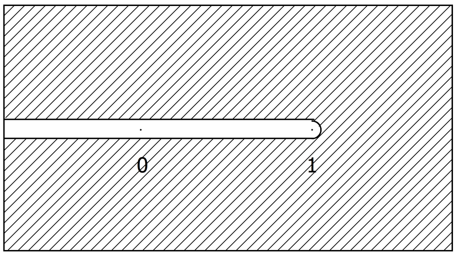
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \longmapsto 1 - z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto 0$$
$$\infty \longmapsto \infty$$

解　$G_0(e_1, e_0)(1 - z)$



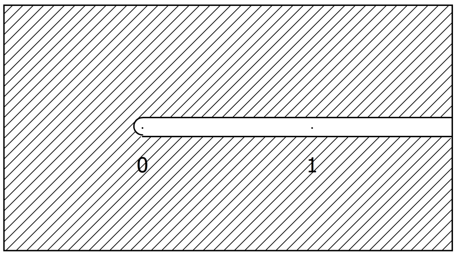
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \longmapsto z/(z-1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$0 \longmapsto 0$$
$$1 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto 1$$

解　$G_0(e_0, e_\infty)\big(z/(z-1)\big)$



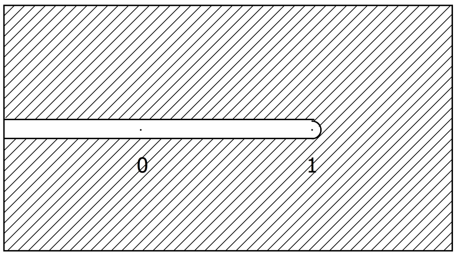
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \longmapsto 1/z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$0 \longmapsto \infty$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$\infty \longmapsto 0$$

解　$G_0(e_\infty, e_1)\big(1/z\big)$



$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \longmapsto 1/(1-z) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto 0$$

解　$G_0(e_\infty, e_0)\big(1/(1-z)\big)$



$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni z \longmapsto (z-1)/z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$0 \longmapsto \infty$$
$$1 \longmapsto 0$$
$$\infty \longmapsto 1$$

解　$G_0(e_1, e_\infty)\big((z-1)/z\big)$

また, 次の六つの漸近挙動が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&G_0(e_0,e_1)(z) \approx z^{e_0} \quad (z\to 0),\\
&G_0(e_1,e_0)(1-z) \approx (1-z)^{e_1} \quad (z\to 1),\\
&G_0(e_1,e_\infty)\Big(1-\frac{1}{z}\Big) \approx \Big(1-\frac{1}{z}\Big)^{e_1} \quad (z\to 1),\\
&G_0(e_\infty,e_1)\Big(\frac{1}{z}\Big) \approx \Big(\frac{1}{z}\Big)^{e_\infty} \quad (z\to \infty),\\
&G_0(e_\infty,e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big) \approx \Big(\frac{1}{1-z}\Big)^{e_\infty} \quad (z\to \infty),\\
&G_0(e_0,e_\infty)\Big(\frac{z}{z-1}\Big) \approx \Big(\frac{z}{z-1}\Big)^{e_0} \quad (z\to 0).
\end{aligned}
$$

これら解の間に以下の五つの関係式が成り立つ.

$$G_0(e_0,e_1)(z)\exp(\pi i e_0) = G_0(e_0,e_\infty)\Big(\frac{z}{z-1}\Big), \tag{4.7}$$

$$G_0(e_0,e_\infty)\Big(\frac{z}{z-1}\Big)\Phi_{KZ}(e_\infty,e_0) = G_0(e_\infty,e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big), \tag{4.8}$$

$$G_0(e_\infty,e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big)\exp(\pi i e_\infty) = G_0(e_\infty,e_1)\Big(\frac{1}{z}\Big), \tag{4.9}$$

$$G_0(e_\infty,e_1)\Big(\frac{1}{z}\Big)\Phi_{KZ}(e_1,e_\infty) = G_0(e_1,e_\infty)\Big(1-\frac{1}{z}\Big), \tag{4.10}$$

$$G_0(e_1,e_\infty)\Big(1-\frac{1}{z}\Big)\exp(\pi i e_1) = G_0(e_1,e_0)(1-z). \tag{4.11}$$

これらの式から

$$
\begin{aligned}
&G_0(e_0,e_1)(z)\exp(\pi i e_0)\Phi_{KZ}(e_\infty,e_0)\exp(\pi i e_\infty)\Phi(e_1,e_\infty)\exp(\pi i e_1)\\
&\quad = G_0(e_1,e_0)(1-z).
\end{aligned}
$$

よって, Proposition 3.5 を用いることにより次の式が得られる.

$$\exp(\pi i e_0)\Phi_{KZ}(e_\infty,e_0)\exp(\pi i e_\infty)\Phi_{KZ}(e_1,e_\infty)\exp(\pi i e_1)\Phi_{KZ}(e_0,e_1) = 1.$$

したがって, 関係式 (4.7), . . . , (4.11) を導けばよい. まず (4.9) を証明する. 漸近挙動により以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
G_0(e_\infty,e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big)\exp(\pi i e_\infty) &\approx \Big(\frac{1}{1-z}\Big)^{e_\infty}\exp(\pi i e_\infty) \quad (z\to\infty)\\
&= \exp\Big(e_\infty\Big(\log\frac{1}{1-z}+\pi i\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(e_\infty\log\frac{1}{z-1}\Big)\\
&\approx \exp\Big(e_\infty\log\frac{1}{z}\Big) \quad (z\to\infty).
\end{aligned}
$$

ゆえに, 基本解の一意性から (4.9) が得られ, (4.7), (4.11) も同様にして示される. 次に (4.8) の証明に移る. $G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right)$ に対して Proposition 3.5 を用いることで次の式を得る.

$$G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0) = G_1(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)$$

よって, 右辺において $\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)$ の定義を用いることで (4.8) が示される. (4.10) も同様にして得られるため, 以上より (4.7), . . . , (4.11) が成り立つので, (4.4) が示された.

5-サイクル関係式 (4.5) についての証明は省略する. 興味のある人は [4] のほか [1], [5], [13] などの文献も参照されたい. □

Remark 4.3. KZ 結合子における結合子関係式から以下の多重ゼータ値の関係式が従う. 上から二番目の関係については証明が気になる人は [10] の Lemma 2.2. を参照されたい.

(4.2) と $\Phi_{KZ}(0, 0) = 1 \Longleftrightarrow$ シャッフル関係式

(4.2) と (4.3)$\Longrightarrow$ 双対関係式

(4.2) と (4.5)$\underset{[8]}{\Longrightarrow}$ (4.3) と (4.4)

結合子関係式 $\underset{[9]}{\Longrightarrow}$ 一般複シャッフル関係式

一方で, Euler の公式が従うことも知られている.

Proposition 4.4 ([2])**.** KZ 結合子における (4.2), (4.3), (4.4) から

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2n}}{2n!}B_{2n}$$

が導かれる. (但し, B_{2n} は Bernoulli 数, $n \geq 1$ とする.)

5 補足資料

この章では, 基本解 $G_0(z)$ 及び Φ_{KZ} の明示公式について大まかな証明を述べる. 注意すべきこととして, [7, 11] を参考としているため多重ゼータ値と語の指数対応が §2.2 と逆になっているが, §2.2 の対応についても同様の手法により証明される.

5.1 基本解の明示公式

$G_0(z)$ の明示公式を紹介するために, 新しい記号と言葉を定義する.

Notation 5.1. $w \in \{e_0, e_1\}^{\times} \cdot e_1$ を $p_i \geq 0, q_i \geq 1$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ に対し

$$w = {e_0}^{p_0} {e_1}^{q_0} {e_0}^{p_1} {e_1}^{q_1} \cdots {e_0}^{p_n} {e_1}^{q_n}$$

と表したとき, w の重さ **(weight)** を

$$\mathrm{wt}(w) := p_0 + q_0 + \cdots + p_n + q_n,$$

w の深さ **(depth)** を

$$\mathrm{dep}(w) := q_0 + q_1 + \cdots + q_n$$

と定義する.

Notation 5.2.

$$M' := \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \cdot e_1$$

とおいたときに次の自然な射影を f' とする.

$$f' : \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \twoheadrightarrow \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle / \mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle \cdot e_0 \simeq \mathbb{C} \cdot 1 + M.'$$

また, $z \in \mathbb{C}'$ とし,

$$M' \ni w = e_0^{k_m - 1} e_1 e_0^{k_{m-1} - 1} e_1 \cdots e_0^{k_1 - 1} e_1$$
$$(m \geq 1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \ldots, k_m \geq 1\ )$$

及び空語 1 に対して, 次の $\mathbb{C}$-線形写像を定義する.[2]

$$\begin{aligned} Li(z) : M' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto Li_w(z) := Li_{(k_1, k_2, \ldots, k_m)}(z) \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

[2] 多重ポリログ $Li_{(k_1, \ldots, k_m)}(z)$ は $|z| < 1$ で絶対収束する級数で定義され, $\mathbb{C}'$ に解析接続される. また, $k_m \geq 2$ ならば $z \to 1$ で $\zeta(k_1, \ldots, k_m)$ に収束する. [12, §1.1], [14, §3] を参照.

Notation 5.3. α を新たな変数とおき, g_1' を次の $\mathbb{C}$-代数準同型とする.

$$\begin{aligned} g_1' : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle &\longrightarrow \mathbb{C}\,\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \,\hat{\otimes}\, \mathbb{C}[\![\alpha]\!] \\ e_0 &\longmapsto e_0 - \alpha \\ e_1 &\longmapsto e_1 \end{aligned}$$

さらに $w \in \mathbb{C}\,\langle e_0, e_1\rangle$ を語としたとき, g_2' を次の $\mathbb{C}$-線形写像とする.

$$\begin{aligned} g_2' : \mathbb{C}\,\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \,\hat{\otimes}\, \mathbb{C}[\![\alpha]\!] &\longrightarrow \mathbb{C}\,\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \\ w \otimes \alpha^p &\longmapsto w e_0^p \end{aligned}$$

これらを用いて, 明示公式の定理が記される.

Theorem 5.4 ($G_0(z)$ の明示公式 [7])**.** $G_0(z) = G_0(e_0, e_1)(z)$ を KZ 方程式の基本解とすると, 次のように表される.

$$G_0(e_0, e_1)(z) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J(w)(z) w \tag{5.1}$$

但し, $J(w)(z)$ は以下の場合分けに応じて表される.

(1) $w \in M'$ のとき,

$$J(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z).$$

(2) $w = v e_0^r$ ($r \geq 1, v \in M'$) のとき,

$$J(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq s,t \\ s+t=r}} (-1)^s Li_{f'(v \sqcup\!\sqcup e_0^s)}(z) \frac{\{\log(z)\}^t}{t!}.$$

(3) $w = e_0^r$ ($r \geq 0$) のとき,

$$J(w)(z) = \frac{\{\log(z)\}^r}{r!}.$$

Proof. まず (1) を示す. KZ 方程式より,

$$\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \Big(\frac{d}{dz} J(w)(z)\Big) w = \Big(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\Big)\Big(\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J(w)(z) w\Big)$$

となる．$w=e_0w' \quad (w\in M')$ とする．上式において

$$\frac{d}{dz}J(e_0w')(z)e_0w' \quad と \quad \frac{e_0}{z}J(w')(z)w'$$

の係数を比較することで,

$$\frac{d}{dz}J(e_0w')(z)=\frac{1}{z}J(w')(z) \tag{5.2}$$

を得る．$w=e_1w'$ のときも同様に,

$$\frac{d}{dz}J(e_1w')(z)=\frac{1}{z-1}J(w')(z) \tag{5.3}$$

を得る．$(-1)^{\mathrm{dep}(w)}Li_w(z) \quad (w\in M')$ らは多重ポリログの微分関係式より, 微分方程式 (5.2), (5.3) を満たす．よって $w\in M'$ に対して

$$(-1)^{\mathrm{dep}(w)}Li_w(z)=J(w)(z).$$

(2), (3) の証明に移る．次の $\mathbb{Q}$ 双線形写像を定める．

$$<\quad>: \mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle\times\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle\longrightarrow\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$$

但し, 各語 $w_1,w_2\in\{e_0,e_1\}^{\times}$ に対し,

$$<w_1,w_2>:=\begin{cases}1 & \text{if } w_1=w_2,\\ 0 & \text{if } w_1\neq w_2.\end{cases}$$

ここで,

$$<g_2'\circ g_1'(w_1),w_2e_0^r>=<w_1,(-1)^r f'(w_2\sqcup e_0^r)> \tag{5.4}$$

が成り立つ．実際, $w_1\notin M'$ の場合は明らかである．$w_1\in M'$ の場合も, $<w_1,(-1)^r f'(w_2\sqcup e_0^r)>=(-1)^r n$ であったとすると $w_2\sqcup e_0^r$ は項として nw_1 をもつ．則ち, w_1 から e_0 を r 個除いて w_2 を得る方法は n 通りある．一方で, $w_1=e_0^{s_1}e_1\cdots e_0^{s_m}e_1$ と表せたとして

$$g_1'(w_1)=(e_0-\alpha)^{s_1}e_1\cdots(e_0-\alpha)^{s_m}e_1$$

となり, $g_1'(w_1)$ において $(-1)^r w_2\otimes\alpha^r$ が n 個含まれる．則ち $g_2'\circ g_1'(w_1)$ は $(-1)^r w_2e_0^r$ を n 個含む．よって,

$$<g_2'\circ g_1'(w_1),w_2e_0^r>=(-1)^r n=<w_1,(-1)^r f'(w_2\sqcup e_0^r)>$$

を得る. 次に $g'_2 \circ g'_1\bigl(f'(G_0(z))\bigr)$ を,

$$g'_2 \circ g'_1(f'(G_0(z))) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J'(w)(z)w \tag{5.5}$$

と展開し, 上式において $J'(w)(z)$ は以下で表されることを示す.

$$J'(w)(z) = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z) & \text{if } w \in M', \quad (5.6)\\ (-1)^{\mathrm{dep}(w)+r} Li_{f'(w' \sqcup e_0^r)}(z) & \text{if } w = w'e_0^r \ (w' \in M'), (5.7)\\ 0 & \text{if } w = e_0^r \quad (r \geq 1). \quad (5.8) \end{cases}$$

(1) より, $w \in M'$ に対して $J(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z)$. よって, $f'(G_0(z)) = \sum_{w \in M'} (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z) w$ なので,

$$g'_2 \circ g'_1\bigl(f'(G_0(z))\bigr) = \sum_{w \in M', \text{ 語}} (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z) + \sum_{w \notin M', \text{ 語}} (\text{other terms}).$$

ゆえに, $w \in M'$ に対して

$$J'(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z).$$

よって (5.6) が示された. 一方で, $f'(G_0(z))$ の各項は M' に属しているので, $g'_2 \circ g'_1\bigl(f'(G_0(z))\bigr)$ は $\mathbb{C} \cdot e_0^r$ に属する項をもたない. したがって $w = e_0^r \quad (r \geq 1)$ に対し,

$$J'(w)(z) = 0.$$

よって (5.8) が示された. 次に (5.7) を示す. まず [7, Lemma 3.20] より

$$G_0(z) = \left(\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J'(w)(z)w \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n \right) \tag{5.9}$$

が得られる. (5.1) と (5.5) により

$$J'(w'e_0^r)(z) = \sum_{w_i \in M', \text{ 語}} < g'_2 \circ g'_1(f'(w_i)), w'e_0^r > J(w'_i)(z)$$

を得る. よって, (5.4) および Thm 5.4 (1) より,

$$\begin{aligned} J'(w'e_0^r)(z) &= \sum_{w_i \in M', \text{ 語}} < g'_2 \circ g'_1(f'(w_i)), w'e_0^r > J(w'_i)(z) \\ &= (-1)^r \sum_{w_i \in M', \text{ 語}} < w_i, f'(w' \sqcup e_0^r) > (-1)^{\mathrm{dep}(w_i)} Li_{w_i}(z) \\ &= (-1)^{\mathrm{dep}(w')+r} Li_{f'(w' \sqcup e_0^r)}(z). \end{aligned}$$

したがって (5.7) が成り立つ．以上より，(5.5) が示された．よって $w = w'e_0^r \quad (r \geq 1,\ w' \in M')$ に対して (5.1) と (5.9) で係数比較を行うと次を得る．

$$J(w)(z) = J(w'e_0^r)(z) = \sum_{\substack{s+t=r \\ s,t\geq 0}} J'(w'e_0^s)(z)\frac{(\log z)^t}{t!}.$$

あとは (5.7) を用いることで明示公式の (2) が示される．さらに，$w = e_0^r \quad (r \geq 1)$ に対して (5.1) と (5.9) で係数比較を行うと

$$J(e_0^r)(z) = \sum_{\substack{s+t=r \\ s,t\geq 0}} J'(e_0^s)(z)\frac{(\log z)^t}{t!}$$

を得る．あとは (5.8) により明示公式の (3) が示される． □

Example 5.5. $G_0(z)$ の低次の項は次のように表される．

$$\begin{aligned} G_0(e_0, e_1)(z) = 1 &+ Li_1(z)e_0 + Li_1(1-z)e_1 + \frac{\{Li_1(z)\}^2}{2}e_0^2 - Li_2(z)e_0e_1 + \\ &+ \{Li_2(z) + (\log z)\log(1-z)\}e_1e_0 + \frac{\{\log(1-z)\}^2}{2}e_1^2 + \frac{(\log z)^3}{6}e_0^3 \\ &- Li_3(z)e_0^2e_1 + \{2Li_3(z) + (\log z)Li_2(z)\}e_0e_1e_0 + Li_{1,2}(z)e_0e_1^2 \\ &- \left[Li_3(z) - (\log z)Li_2(z) - \frac{(\log z)^2\log(1-z)}{2}\right]e_1e_0^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Theorem 5.4 を用いて $G_0(z), G_1(z)$ を実際に構成できることから，$G_0(z), G_1(z)$ の存在性が示される．

5.2 KZ 結合子の明示公式

Φ_{KZ} に対しても明示公式が存在することがわかっている．記述するために，いくつかの準備を行う．

Notation 5.6.

$$M := e_0 \cdot \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \cdot e_1$$

M に対して次の自然な射影を f とおく．

$$f : \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle/(e_1 \cdot \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle + \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \cdot e_0) \simeq \mathbb{C}\cdot 1 + M.$$

$$
\begin{aligned}
M \ni w = e_0^{k_m-1} e_1 e_0^{k_{m-1}-1} e_1 \cdots e_0^{k_1-1} e_1& \\
(m \geq 1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \cdots, k_{m-1} \geq 1, k_m \geq 2\ ).&
\end{aligned}
$$

及び空語 1 に対して, 次の $\mathbb{C}$ 線形写像を定義する.

$$
\begin{aligned}
Z : M &\longrightarrow \mathbb{C} \\
w &\longmapsto \zeta(k_1, k_2, \cdots, k_m) \\
1 &\longmapsto 1
\end{aligned}
$$

Notation 5.7. α, β を新たな変数とおき, 以下の二つの写像を定義する.

$$
\begin{aligned}
g_1 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \widehat{\otimes} \mathbb{C}[[\alpha, \beta]] \\
e_0 &\longmapsto e_0 - \alpha \\
e_1 &\longmapsto e_1 - \beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \widehat{\otimes} \mathbb{C}[[\alpha, \beta]] &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \\
w \otimes \alpha^p \beta^q &\longmapsto e_1^q w e_0^p \quad (p, q \geq 0)
\end{aligned}
$$

但し, g_1 は代数射, g_2 は $\mathbb{C}$ 線形写像として定義する.

これらの記号を用いて以下の補題が成り立つ.

Lemma 5.8.

$$
g_2 \circ g_1 \circ f(\Phi_{KZ}(e_0, e_1)) = \Phi_{KZ}(e_0, e_1)
$$

Proof. [11] の補題 A.22 をみよ. □

Lemma 5.9.

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-B} G_0(e_0, e_1)(1 - \epsilon) = \Phi_{KZ}(e_0, e_1).
$$

Proof. [11] の補題 A.20 をみよ. □

Theorem 5.10 (Φ_{KZ} の明示公式 [6, 15])**.**

$$
\Phi_{KZ}(e_0, e_1) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} I(w) w
$$

但し, $I(w)$ は次のような場合分けに応じて表される.

(1) $w \in M$ のとき, $I(w) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Z(w)$.

(2) $w = e_1^r v e_0^s$ $(r, s \geq 0, v \in M)$ のとき,
$I(w) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq a \leq r \\ 0 \leq b \leq s}} (-1)^{a+b} Z(f(e_1^a ш e_1^{r-a} v e_0^{s-b} ш e_0^b))$.

(3) $w = e_1^r e_0^s$ $(r, s \geq 0)$ のとき,
$I(w) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq a \leq r \\ 0 \leq b \leq s}} (-1)^{a+b} Z(f(e_1^a ш e_1^{r-a} e_0^{s-b} ш e_0^b))$.

Proof. まず (1) の証明を行う. Theorem 5.4 の主張 (1) と Lemma 5.9 を組み合わせることで, $I(w) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} \zeta(w)$ が示される. (2) および (3) の証明については, Lemma 5.8 を用いることで, Theorem 5.4 の証明と同様にして示される. □

Example 5.11. 上の定理により, Φ_{KZ} の低次の項は次のように表せる.

$$\begin{aligned}\Phi_{KZ} = 1 &- \zeta(2)e_0e_1 + \zeta(2)e_1e_0 - \zeta(3)e_0^2e_1 + 2\zeta(3)e_0e_1e_0 + \zeta(1,2)e_0e_1^2 \\ &- \zeta(3)e_1e_0^2 - 2\zeta(1,2)e_1e_0e_1 + \zeta(1,2)e_1^2e_0 - \zeta(4)e_0^3e_1 + \cdots .\end{aligned}$$

Remark 5.12. これまで, $G_0(z)$ の明示公式と Φ_{KZ} の明示公式を紹介した. これらの公式と, Proposition 3.5 から得られる式 $G_0(e_1, e_0)(1-z)\Phi_{KZ}(z) = G_0(e_0, e_1)(z)$ により多重ポリログの関数等式が得られる. 例えば次が成り立つ.

$$\begin{aligned} Li_2(1-z) &= Li_2(z) - \log(z)\log(1-z) + \zeta(2), \\ Li_3(1-z) &= -Li_{1,2}(z) + \log(1-z)Li_2(1-z) \\ &\qquad + \frac{\{\log(1-z)\}^2 \log(z)}{2} + \zeta(1,2). \end{aligned}$$

参考文献

[1] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum qroups*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[2] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$: proceedings of a workshop held March 23-27, 1987, editor Y. Ihara, K. Ribet, J.-P .Serre. Springer-Verlag, New York, 1989 79–297.

[3] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analiz, **1** (1989) 114–148. English translation: Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457.

[4] V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991) 829–860.

[5] P. Etingof, O. Schiffmann, *Lectures on Quantum Groups*, International Press of Boston, 1998.

[6] H. Furusho, *The Multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. vol **39**. no 4. (2003). 695–720.

[7] H. Furusho, *p-adic multiple zeta values I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. math. **155**, (2004) 253–286.

[8] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Mathematics, Vol. 171 (2010), No. 1, 545–556.

[9] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Annals of Mathematics, Vol. 174 (2011), No. 1, 341–360.

[10] H. Furusho, *On relations among multiple zeta values obtained in knot theory*, preprint, arXiv:1501.06638, to appear in "Teichmüller theory and its impact".

[11] 古庄英和, 結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 MI lecture note series Vol **68** (2016).

[12] 原隆,「実/複素ゼータの世界」から「p 進多重ゼータの世界」へ, 本報告集 (2018).

[13] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, 1995.

[14] 川崎菜穂, Yamamoto 積分表示と積分級数等式, 本報告集 (2018).

[15] T. T. Q. Le, J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996) 39–65.