

「実 / 複素ゼータの世界」から「 p 進ゼータの世界」へ*

東京電機大学未来科学部[†] 原 隆[‡]

概要

多重ゼータ値および [多重] ゼータ関数の p 進理論について概説する. 前半部では古庄英和によって導入された KZ 型 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の構成を概観し, その性質や p 進 KZ 方程式との関係について論ずる. また, p 進ドリinfeld 結合子 Φ_{KZ}^p とドリinfeld 結合子 Φ_{De}^p との関係, および (KZ 型) p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ とドリinfeld の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ との関係について考察する. 後半では, 古典的な久保田-レオポルトの p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ のコブリッツ p 進測度を用いた構成および, $L_p(s, \omega^a)$ の正の整数点での特殊値と (KZ 型の) p 進ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(k)$ との関係を記述するコールマンの公式の証明を概観した上で, それらの多重化に関する古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文による最近の共同研究の成果と今後の課題を展望する.

本稿は, 第 26 回整数論サマースクール『多重ゼータ値』に於ける著者の同名講演の報告書であり, 多重ゼータ値および [多重] ゼータ関数の p 進理論 p -adic theory の概要をまとめる目的で執筆されたものです. レオンハルト・オイラー Leonhard EULER によって最初に考察された“奇妙な”多重級数 (今日の 多重ゼータ値 multiple zeta values) が, 後年になって豊かな構造を持つ非常に興味深い研究対象であると再発見され, 現在も (山本積分などの) 新たな発見とともに実に多様な進化を遂げ続けていることは, 既に本報告集の金子昌信^{すで}先生の記事 [金子 SS18] や川崎菜穂^{かねこ まさのぶ}さんの記事 [川崎 SS18] で詳しく解説されていることでしょう. そ

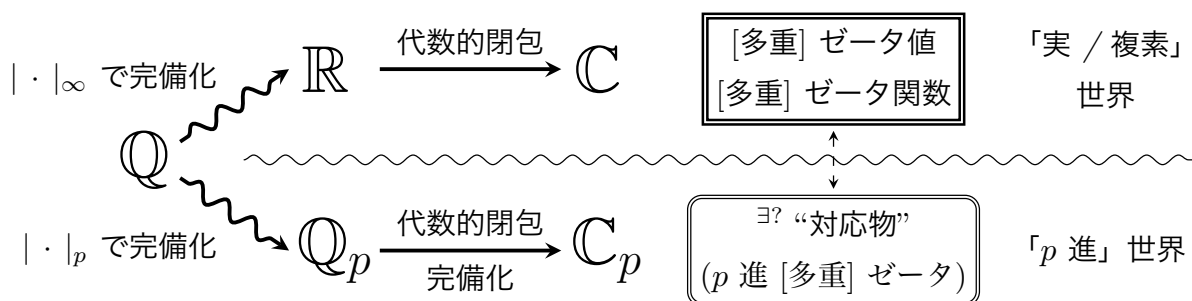


図1 「実 / 複素」の世界と「 p 進」世界

* 第 26 回整数論サマースクール『多重ゼータ値』報告集原稿

[†] 〒120-8551 東京都足立区千住旭街 5 番

[‡] E メールアドレス: t-hara@mail.dendai.ac.jp

んな魅力的な多重ゼータ値の理論 (およびその土台を形成する級数の理論 / 反復積分の理論) は、有理数体 $\mathbb{Q}$ の (ユークリッド距離 $|\cdot|_\infty$ による) 完備化である 実数体 $\mathbb{R}$ や、その代数的閉包である 複素数体 $\mathbb{C}$ を舞台として展開されてきました。一方で、クルト・ヘンゼル Kurt HENSEL によって発見された p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ (およびその代数的閉包の完備化 $\mathbb{C}_p$) は、有理数体 $\mathbb{Q}$ を p 進距離 $|\cdot|_p$ と呼ばれる $|\cdot|_\infty$ とは異なる距離関数で完備化したものであり、その意味では実数体 $\mathbb{R}$ の“双子の兄弟”のような存在であると言えます (図 1 を参照)。 p 進数体の発見がその後の整数論の発展に与えた多大なる影響を考えると、「実 / 複素」世界 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ で展開されてきた多重ゼータ値の理論を、その“兄弟”たる「 p 進」世界 $\mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p$ で構築することは、誰がどう考えたって とても面白くて魅力的な課題に違いありません。しかし、少し考察を重ねると「 p 進」世界で“ゼータ”を考えることが見かけ以上に難しい ことに直ぐに気付かされるでしょう; 「実 / 複素」世界では“ゼータ”の「定義」に他ならなかった [多重] ディリクレ級数 [multiple] DIRICHLET series が、「 p 進」世界では まったく収束してくれない のですから (命題 1.1 を参照)。したがって、「 p 進」世界で [多重] ゼータ値 / 関数の理論を展開するためには 発想を抜本的に転換^{そもそも}し、抑々のスタート地点であったディリクレ級数表示を一旦捨て去る 必要に迫られるのです。本稿では、最初に「 p 進」世界で“ゼータ”を考えるのが何故難しいのか という根本的な問題の背景を確認した上で、「 p 進」世界ならではの様々な困難を乗り越えるための画期的なアイデア に焦点を当てながら「 p 進ゼータの世界」を概観していきます。近年 [Zha16] や [GF] など、多重ゼータ値の理論の包括的な解説書が幾つも執筆されており、多重ゼータ値の注目度の高さが窺い知れますが、これらの解説書でも p 進多重ゼータ値は扱われておりません。総説的な文献があまり多くないことや「実 / 複素」世界での多重ゼータ値の理論と様相が大分異なることも手伝って、残念ながら現在でも p 進多重ゼータ値 / 関数は「敷居が高い」と感じられる方が少なくないようです。本稿を通じて「 p 進ゼータの世界」への心理的障壁を取り除き、その魅力溢れる世界を気軽に探索するためのお手伝いが出来れば何よりです。

本稿は以下のように構成されています。第 1 節では、古庄 英和さんによる p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の“定義”について、その画期的なアイデアにスポットを当てて紹介します。「 p 進」世界では [多重] ディリクレ級数が“全然収束してくれない”ことを第 1.0 節で観察した後、第 1.1 節で多重ゼータ値の古典理論 (「実 / 複素」世界での理論) を 多重ポリログ関数 *multiple polylogarithm* の観点から復習し、それと対比させる形で第 1.2 節で KZ 型 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ を“定義”^{ただ}します。但し、この段階では「この“定義”がちゃんと機能しているのか?」「 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ は“多重ゼータ値”と呼ぶに相応しい性質を備えているのか?」^{ふさわ}と言った、当然湧き上がる疑問に完全には答えることは出来ません。そこで第 2 節では、先ず第 2.1 節で「実 / 複素」の世界でも重要な役割を演じた KZ 方程式 KZ equation および ドリinfeld 結合子 DRINFELD associator の「 p 進版」 Φ_{KZ}^p を導入し、(背景にあるコールマン積分論の詳細には

目を瞑ることにすれば)「実 / 複素」の世界での理論と 完全に並行した形式的な議論によって $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の様々な性質が導き出されることを概観します. その後に続く第 2.2 節では, ドリーニュにより導入された ドリーニュ結合子 DELIGNE associator Φ_{De}^p および ドリーニュの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ を, Φ_{KZ}^p を用いてやや “天下り” 的な方法で導入します. 本稿の説明では Φ_{De}^p や $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ のような対象を考察する動機が全く分からないと思いますし, 本稿ではこの節以降でドリーニュの p 進多重ゼータ値を本格的に扱う機会はないのですが, 本稿に続く安田正太さんの記事 [安田 SS18b] や関真一郎さんの記事 [関 SS18] を読めば, 実際に $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ が八面六臂の大活躍を演じる場面に遭遇出来るかと思います. 第 2.3 節では, p 進多重ゼータ値に関して知られている結果や予想などをまとめました. 取り急ぎ p 進多重ゼータ値の理論の概要と現状を把握したいという目的で本稿を読まれるのであれば, 第 2 節まで目を通していただくことで或る程度目的は達せられるかと思います.

第 3 節では, サマースクールの講演でまったく紹介する時間がなかった p 進 [多重] L 関数 p -adic [multiple] L -function について論じています. p 進 [多重] ゼータ関数の世界も, p 進 [多重] ゼータ値の世界に負けず劣らず非常に魅力的な世界で, 第 1 節や第 2 節で紹介されたものとはまた異なる手法やアイデアに基づいて構築されています. 第 3.0 節では「 p 進」世界で「 p 進 [多重] ゼータ 関数」をどう “定義” するか (或いは特徴付けるか) について簡単に論じ, 第 3.1 節で p 進測度論の基礎的な内容を駆け足で振り返った後, 第 3.2 節では論文 [FKMT17b] の原型と言うべき 1 変数の p 進 L 関数に纏わる理論 (コブリッツの p 進測度とコールマンの公式) を若干詳しく解説します. 第 3.3 節では論文 [FKMT17b] の主要な結果を簡単に紹介します. 多重化された理論であるため [FKMT17b] の主結果はどれも非常に複雑な形をしていますが, その殆どが第 3.2 節の内容を直接 “多変数化” したものとなっているので, 第 3.3 節では「どのような計算をすれば良いか」を解説するに留め, [FKMT17b] で展開される激しい計算の詳細には踏み込まないことにしました. ちなみに, 多重ゼータ値のサマースクールであるにも拘らず, 本稿 (および講演) のタイトルには「多重ゼータ 値」ではなく「ゼータの世界」という漠然とした表現が用いられていますが, そこには実は「 p 進多重ゼータ 値」の話だけではなく, どうしても p 進 [多重] ゼータ 関数の話にも触れたい!! という著者の強い意向が反映されています. それどころか, 著者にとっては第 3 節の内容こそが “メイン・ディッシュ” であり, 前半 (第 1,2 節) で展開された p 進 [多重] ゼータ値の理論と後半 (第 3 節) で展開される p 進 [多重] L 関数の理論が結びつく コールマンの公式 (定理 3.24, 定理 3.41) を紹介することこそが, 著者の “秘められた最終到達目標” であると言っても過言ではなかったのですが, 時間の関係で講演では (後ろ髪を引かれつつも) 第 3 節の内容ごと削除せざるを得ませんでした. 抑々講演の際に一切話さなかった内容を報告集に書くのは如何なものか, とは著者自身も思いますが, 著者の主たる研究分野である 岩澤理論 IWASAWA theory の観点からすると, 多重ゼータ関数の “負の整数点” での値を補間する “ p 進関数” が (まだ改良の余地は

あるものの) 構成されたということは極めて革新的な出来事であり、まだその実像が全く明らかになっていない“多重ゼータの岩澤理論的研究”へ向けた非常に大きな一歩であると思われるため、敢えて紙面を割いて紹介させていただこうと決意した次第です*1。末尾の付録 A では p 進解析のごく基礎的な事項について、特に本稿を読む際に慣れておいた方が良いでしょうと思われることを中心に簡単に纏めました。図 1 からも見取れるように、「 p 進」世界 (“ $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{C}_p$ の世界”) は「実 / 複素」世界 (“ $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の世界”) と瓜二つな経緯で構成される世界ですから、其処では勿論「実 / 複素」世界と似た現象も多数観察されますが (特に 複素関数論 との類似性)、我々が「実 / 複素」世界で培ってきた直観を 大きく裏切る現象 も負けず劣らず大量に発生します (勿論 位相の違い に起因するものです)。特に「 p 進」世界にあまり馴染みのない方は、本稿を読み進めていく中で斯様な“直観を裏切る現象”に戸惑いや苦手意識を感じられてしまうかもしれませんので、必要に応じて適宜参照していただければ幸いです。

執筆当初の目論見としては、上記の項目に加えて

- ★ コールマン積分論についての概説
- ★ [p 進] 多重ゼータ値の理論の“淡中解釈”についての概説
- ★ 久保田-レオポルトの p 進 L 関数の原論文 [KL64] での構成法についての概説

も付録として加筆する計画だったのですが、本論の分量が予想外に膨大になってしまったこと、原稿の締切との折合いがつかなかったことなどの諸事情が重なったため、これらについては断腸の思いで割愛せざるをえませんでした (偏に著者の計画性のなさが原因です)。特にコールマン積分論については、原論文 [Col82] が (誤植が大量にあることも含めて) 非常に読みにくく、それでいて原論文の構成に沿った解説記事もあまり見当たらないという現状を鑑みて、この絶好の機会に是非“気軽に読める”概説記事を書きたいと意気込んでいたのですが、実現することが出来ず大変遺憾です。これらの項目について、また別の機会に他の場所で書かせていただくか、このまま書き進めて“増補版”をウェブページなどで公開する形にするかはまだ決め兼ねておりますが、近いうちに形に出来たら、と考えております。

本稿は報告集の解説記事と言うことで、伝統的な「定義」「命題」「証明」の様式に則って執筆していますが、この様式ではどうしても分量が多くなってしまうため、何処に何が書かれているか分かりにくくなってしまいうという欠点があります。一方で、サマースクールでの講演のレジュメでは、参加者が講演を聴きながら参照されることを見越して、理論の流れや要点が分かり易いようレイアウト等を工夫しました。完全に手前味噌ではございますが、かなり簡潔かつ見易いものに仕上がったと思いますので、理論の全体像を俯瞰されたい方は、例えば「最

*1 サマースクールの講演で話さなかった内容を報告集に執筆することを快く許可して下さったのみならず、記事のページ数に制限を設けることなく自由に執筆させて下さったオーガナイザーの皆様に御礼申し上げます (それにしても書き過ぎて、編集作業に支障をきたしてしまったことをこの場を借りてお詫び申し上げます)。

初にレジюмеを眺めてみた上で、必要に応じて本稿で細部を確認する」などと言った、各々におの合った形で本報告書とレジюмеを巧く活用していただければと存じます*2。また、技術的な点へのコメントや補足事項を「注意」として、本論からは外れるものの興味深い関連事項を「雑談」としてまとめました(但し、両者の境界はあまり厳密ではありません)。予想外に「注意」「雑談」の数が増えてしまったため、最初に目を通される際には「注意」「雑談」は一旦保留として読み進めた方が良いでしょう。或いは逆に「注意」「雑談」を拾い読みしていくのも、本論とはまたひと味違った数学の世界をお楽しみいただける“通の読み方”としてお勧めです。

■ 全体的な記号の約束 本稿では $\mathbb{N}$ は 1 以上の整数 (自然数) 全体の集合を表すものとし、0 以上の整数 全体の集合を表す際は記号 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いることとします。また、 $\mathbb{C}_p$ の p 進付値は $|p|_p = \frac{1}{p}$ と正規化されたものを考えています。多重ゼータ値の理論で標準的に用いられる以下の記号や用語は本稿でも断り無く用います;

★ 指数 *index* $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$

およびその 重さ *weight* $\text{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, 深さ *depth* $\text{dep}(\mathbf{k}) = r$

★ 指数 $\mathbf{k}$ が 許容的 *admissible* $\Leftrightarrow$ ^{定義} $k_r > 1$

また、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ や $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ の部分集合として

★ 中心 a , 半径 r の “開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r) := \{z \mid |z - a|_* < r\}$

★ 中心 a , 半径 r の “閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r) := \{z \mid |z - a|_* \leq r\}$

の記号も特に断りなく用います (* は ∞ か p を表すものとします)。

■ 謝辞 多重ゼータ値に関しては門外漢であるにも拘らず、斯様な大舞台で講演する機会をいただき誠に光栄です。世話人の田坂浩二さん、佐久川憲児さん、三柴善範さんに篤く御礼申し上げます。また、サマースクールの世話人・講演者の皆様と名古屋大学の古庄英和さん、東京電機大学 (当時) の並川健一さんには、私の拙い講演練習にお付き合いいただき、講演内容の向上に向けた数々の有益な指摘をしていただきました。特に佐久川憲児さん、関真一朗さん、安田正大さん、山本修司さんからは、技術的な点や最新の研究成果について鋭い質問・コメントを数多戴き、著者自身大変勉強になりました。その多くが講演、レジюме並びに本稿に反映されていると思います。報告集の記事の執筆の際には、三柴善範さん (第 1, 2 節)、佐久川憲児さん (第 3 節)、小野雅隆さん (全体) に原稿をチェックしていただいた上で、数学的な瑕疵からタイプミス等の誤植に至るまで様々なコメントをいただきました。お陰で本稿が読むに耐えない初稿の段階からかなり読み易いものに改善されたことに疑いの余地はありません。最後に、非常に盛況で素晴らしい集会となった本年度のサマースクールに、講演者の 1 人として参加することが出来て最高に幸せでした。本当にありがとうございました。

*2 レジюмеは http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/ss2018/Hara_resume.pdf より入手出来ます。

但し、若干誤植や数学的不備が残っているため、正確な内容は本稿を参照していただけると幸いです。

目次

§ 1	p 進多重ポリログ関数から p 進多重ゼータ値へ	6
§ 1.0	序奏: 「 p 進」世界の“ゼータ”は何故“難しくて分かりづらい”の??	7
§ 1.1	「実 / 複素」世界での理論を振り返って	9
§ 1.2	「 p 進」世界での理論 — 古庄英和の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$	15
§ 2	p 進結合子と知られている結果・予想など	33
§ 2.1	p 進 KZ 方程式と p 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$	33
§ 2.2	ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ とドリinfeld の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$	42
§ 2.3	知られている結果と予想	45
§ 3	p 進 [多重] L 関数とコールマン型の公式	53
§ 3.0	「 p 進」世界で“ゼータ関数”をどう“定義”するか?	53
§ 3.1	記号等の準備: p 進測度論速習コース	58
§ 3.2	1 変数の場合 — 久保田-レオポルトの p 進 L 関数とコールマンの公式	60
§ 3.3	多変数の場合 — 古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文の理論	79
付録 A	p 進解析に関する補遺	88
§ A.1	超距離空間の位相的特徴	88
§ A.2	$X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の関数について	91

§ 1 p 進多重ポリログ関数から p 進多重ゼータ値へ

本節では, 「 p 進」世界で“ゼータ”を考えることが何故“難しい”のかを第 1.0 節で確認した後, 古庄英和さんによる (KZ 型の) p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の巧みな定義を紹介します (第 1.2 節). 古庄さんの構成のアイデアは, 「実 / 複素」の世界でも有用な「多重ゼータ値を多重ポリログ関数の特殊値として捉え直す」という観点に基づくものですが, サマースクールのこれまでの講演 (および報告集の記事) では, 多重ゼータ値と多重ポリログ関数の関係についてあまりクローズアップされてこなかったように思われますので, 「実 / 複素」の世界での多重ポリログ関数の理論も第 1.1 節に簡単にまとめました.

なお「 p 進」世界 ($\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{C}_p$ の世界) にまったく馴染みがないと言う方は, 予め [加藤中井 16] などの文献で「 p 進」世界に慣れてきてから本稿に挑まれることをお薦めします. [加藤中井 16] は, ペレリマン数に纏わる「数遊び」に興じているうちに自然と p 進数について学習出来てしまうという大変な秀作で, いちおしの一冊です. また, サマースクールの講演の際にも紹介し

てしまいましたので、著者が雑誌『数学セミナー』2018年10月号に寄稿した一般向けの解説記事 [原 18] も参考文献として挙げておきます。

§ 1.0 序奏: 「 p 進」世界の“ゼータ”は何故“難しくて分かりづらい”の??

サマースクールの序盤の講演 (および報告集の記事 [金子 SS18] など) でも紹介されてきたように, 「実 / 複素」の世界では指数 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ に対する 多重ゼータ値 *multiple zeta values* $\zeta(\mathbf{k})$ は “多重ディリクレ級数” (またはオイラー–ザギエ型多重ゼータ関数)

$$\zeta_{\text{EZ}}(s_1, s_2, \dots, s_r) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \quad \dots \text{ (EZ)}$$

の $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ での特殊値として定義されます. この特殊値は $\mathbf{k}$ が許容的 *admissible* であるとき (即ち $k_r > 1$ であるとき) には収束して、或る実数を定めるのでした (例えば [荒川金子 10, 補題 1.1.2] を参照). それならば, “ p 進多重ゼータ値” $\zeta_p(\mathbf{k})$ は同様に, 「 p 進」世界で “多重ディリクレ級数” (EZ) を考えて, その $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ での “特殊値” として定めてしまえば良さそうな気がします. しかし, このような安直な “定義” には致命的な問題点があります; 「 p 進」世界では, どんな指数 $\mathbf{k}$ に対しても級数 (EZ) は決して収束しないのです (!!)

命題 1.1. 任意の $(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ に対して, 無限級数 $\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$ は $\mathbb{C}_p$ では発散する.

【証明】 最初に $a_N^{(r)} := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$ とおくと, 考えている無限級数を $\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} = \sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(r)}$ と表せることに注意しましょう*3. 以下, 命題の主張を指数 $\mathbf{k}$ の深さ $r = \text{dep}(\mathbf{k})$ に関する帰納法により証明します. 先ず $r = 1$ のときは, 任意の自然数 N に対して $|a_N^{(1)}| = |N^{k_1}|_p^{-1} \geq 1$ となるので, $\{a_N^{(1)}\}_{N=1}^{\infty}$ は (p 進位相に関して) 0 に収束しません. 無限級数 $\sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(1)} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{k_1}}$ が収束するならば $a_N^{(1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ となる筈です. 以上, 議論により $\sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(1)} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{k_1}}$ が発散することが分かります. 続いて $r > 1$ のときは, 簡単な計算から $|a_N^{(r)}|_p = |N^{k_r}|_p^{-1} \cdot \left| \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{(r-1)} \right|_p \geq \left| \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{(r-1)} \right|_p \dots (*)$ となりま

*3 総和記号の条件を満たす $(n_1, n_2, \dots, n_{r-1})$ が存在しない場合は $a_N^{(r)} = 0$ と定義することにします.

すが、帰納仮定より $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(r-1)}$ は収束しません。したがって不等式 (*) により $\{a_N^{(r)}\}_{N=1}^{\infty}$ も (p 進位相に関して) 0 に収束しないことが分かります*4, 先程と同様の議論により $\sum_{N=1}^{\infty} a_N^{(r)}$ が発散することが示されました。□

注意 1.2. 命題 1.1 の証明で用いた『無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する』という性質は、「実 / 複素」の世界でも「 p 進」世界でも同様に成り立ちます*5。一方で逆の主張『数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するならば無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する』が「実 / 複素」の世界でまったく成り立たないことは良く知られていますし、直観的にも明らかでしょう。ところが「 p 進」世界ではこの逆の主張も成り立ってしまう*6ののですから、「 p 進」世界に慣れていない人なら驚かれるのも無理はありません。このように「 p 進」世界では「実 / 複素」の世界での直観を裏切る現象が^{しばしば}屡々起こりますが、その原因を探てゆくと大抵の場合は p 進付値 $|\cdot|_p$ の極めて特徴的な性質である 強三角不等式 *strong triangle inequality* $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ に辿り着くのです (第 A.1 節も参照)。

命題 1.1 は「多重ディリクレ級数」(EZ) の特殊値として多重ゼータ値を定義する」という観点に捉われていては「 p 進」世界では多重ゼータ値を定義することすら出来ないことを示唆しているのですから、「多重ゼータ値は多重ディリクレ級数の特殊値である」という観点を一旦捨て去るより他にありません。この困難な状況を乗り越えて「 p 進」世界で多重ゼータ値を定義するための鍵となるのが、「実 / 複素」の世界でも活躍した 多重ポリログ関数 *multiple polylogarithm* の理論です。次の小節 (第 1.1 節) で「実 / 複素」の世界での多重ポリログ関数の理論について振り返った後、第 1.2 節で p 進多重ポリログ関数を用いた p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の定義 (古庄英和さんによる) を紹介することにしましょう。

雑談 1.3. p 進 L 関数の理論に少しでも触れられたことがある方ならば「 p での因子を取り除いていないのが問題なのではないか?」と考えられるかもしれません。確かに n_i が p で割り切れる項は p 進付値が非常に大きくなってしまいうため、 p 進 L 関数を考える際には“ p での (オイラー) 因子を取り除く”ことが^{しばしば}屡々なされます。しかしながら (EZ) を

$\sum_{\substack{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r \\ p \nmid n_1, \dots, p \nmid n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$ という級数に取り替えたところで^{やは}矢張りまったく収束しな

*4 ε - δ 論法により簡単に正当化出来ますので、気になった人は確認してみましょう。

*5 仮定から $a_N = \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n$ の右辺の各総和が $N \rightarrow \infty$ で同じ値に収束する、というだけのことです。

*6 実際 $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ならば、強三角不等式を用いて部分和の数列 $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ がコーシー列となることが簡単に確認出来ます。強三角不等式の簡単な練習問題ですので、各自確認してみてください。

いことは、命題 1.1 と同様にして確認出来ます。この観察からも、「ディリクレ級数が収束するように少し細工を施す^{ほどこ}」という戦略は現実的ではなく、本質的に 別の角度からのアプローチが必要であることが窺^{うかが}い知れるのではないのでしょうか。

雑談 1.4. 命題 1.1 の証明を眺めていると、 p 進付値の定義 $|n|_p = p^{-\text{ord}_p(n)}$ のせいで n^{-k_i} の付値が大きくなってしまふことが、(EZ) の $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ での収束を妨げている最大の要因のように感じられます。それならば、逆に (EZ) の負の整数点での値、即ち (EZ) の $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (-k_1, -k_2, \dots, -k_r)$ での特殊値^{ひね} を考えた方が“収束しやすい”のではないのでしょうか——？ 実際に深さが 1 の場合は、「 χ で捻った冪和の平均」の（「 p 進」世界での）極限を考えると一般化関-ベルヌーイ数（つまり“ディリクレ L 関数の負の整数点での特殊値”）に収束することが知られており（ヴィットの極限公式 WITT's limit formula の一般化、[森田 81] の 4 ページも参照してください）、久保田富雄とハインリッヒ-ヴォルフガング・レオポルトはその事実に基づいて今日 久保田-レオポルトの p 進 L 関数 と呼ばれる関数 $L_p(s, \chi)$ を構成したのでした [KL64]。 「 p 進 L 関数」と聞くとどうしても“難しそうな対象”という印象を持たれてしまうようですが、最初はこのような極めて“素朴な”着想から作られていたんですね。

§ 1.1 「実 / 複素」世界での理論を振り返って

それでは「 p 進」世界で [多重] ゼータ値を考察するための準備段階として、先ずは「実 / 複素」世界での理論の概要を、特に 多重ポリログ関数 に焦点を当てつつ概観してゆきましょう。

§ 1.1.1 多重ポリログ関数と多重ゼータ値

早速ですが 多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ にご登壇^{とうだん}いただくことにしましょう；

定義 1.5 (多重ポリログ関数). $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ 及び $z \in \mathbb{C}$ に対して、冪級数

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \cdots (\text{Li})_{\text{Ser}}$$

(の絶対収束域) で定義される複素関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z)$ を (1 変数) 多重ポリログ関数 (one-variable) *multiple polylogarithm* と呼ぶ。

雑談 1.6. 深さ r が 1 のとき (つまり $\mathbf{k} = (k)$ のとき) に冪級数 $\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ で定

義される関数が、今日 ^{こんにち} ポリログ関数 *polylogarithm* と呼ばれている関数です。ポリログ関

数を指して「多重対数関数」と称する文献も存在しますが*7, “multiple” の訳語も「多重」であることから “multiple polylogarithm” が「多重多重対数関数 (?!)」となってしまうため、仕方なく (かどうかは分かりませんが) “polylog” の方をそのまま片仮名で「ポリログ」と書いてしまうことが多いようです。尚、ポリログ関数は エルンスト・ジャン・フィリップ・フォーク・ド・ジョンキエール *Ernest Jean Philippe Fauque DE JONQUIÈRE* によって精力的に研究されたことから ド・ジョンキエール関数 *DE JONQUIÈRE function* と称する文献も見られます。

雑談 1.7. 「何故 z の指数として n_r だけを考えるのか？」と不思議に思われる方もいらっしゃるかもしれません。実際、より一般に

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z_1, z_2, \dots, z_r) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$$

という形の 多変数 多重ポリログ関数も自然に考えることが出来て、趙 健強 などにより精力的に調べられています (例えば [Zha16, Section 2] を参照)。上記の 1 変数 多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は $z_1 = z_2 = \dots = z_{r-1} = 1$ で特殊化して得られるもので、多重ゼータ値との関係性を調べる上では (最終的に $z_r = 1$ に特殊化してしまうので) 1 変数の多重ポリログ関数を考えれば十分なのです。

対数関数のマクローリン展開の公式から $\text{Li}_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$ となることは容

易に分かります。分母の n を冪乗 n^k にしたり個数を増やしたりしているので“多重”“ポリ”ログ関数と呼ぶわけですね。その名が示す通り、多重ポリログ関数は対数関数と似た性質を色々と持っていますが、ここでは 収束半径 に関する次の命題を紹介しましょう。

命題 1.8. 多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の収束半径は 1 である。

この命題は 指数 $\mathbf{k}$ が 許容的でなくても成り立つ ことに注意して下さい。つまり、 $\mathbf{k}$ が許容的でなくても $|z|_{\infty} < 1$ ならば $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は収束します。非常に基本的な命題であるにも拘らず、意外なことに証明について言及している (或いは適切な文献を引用している) 文献があまり見当たりません。とは言え微分積分学の演習問題程度の内容かな、と思って証明は割愛しようと思ったのですが、著者が試してみたところ多重版の証明は案外細かな評価を必要とするため、証明を掲載しておくことにしました (もっとエレガントに証明出来る気もしますが……)。

【証明】 先ずは冪級数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の z^N の係数を $a_N^{(r)} = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$ と

*7 例えば WIKIPEDIA のページ <https://ja.wikipedia.org/wiki/多重対数関数> など。

おきましょう*8. また, 計算の便宜上 $s_N^{(r)} := \sum_{k=1}^N a_k^{(r)}$ と定めます. このとき, 簡単な考察か

ら $a_N^{(r)} = \frac{s_{N-1}^{(r-1)}}{N^{k_r}}$ となることが分かります. 以下 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}^{(r)}}{a_N^{(r)}} = 1$ が成り立つことを指数

k の 深さ r に関する帰納法 によって示しましょう (このとき, 所謂 いわゆる ダランベールの判定法 d'ALEMBERT *criterion* によって べき 冪級数 $\text{Li}_k(z)$ の収束半径が 1 となることが従います). 先
ず $r = 1$ のときは $\frac{a_{N+1}^{(1)}}{a_N^{(1)}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k_1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ が直接確認出来ます. 次に $r > 1$ のとき
は, 先程の注意から

$$\frac{a_{N+1}^{(r)}}{a_N^{(r)}} = \frac{(N+1)^{-k_r} s_N^{(r-1)}}{N^{-k_r} s_{N-1}^{(r-1)}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k_r} \frac{s_{N-1}^{(r-1)} + a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k_r} \left(1 + \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}}\right)$$

が成り立つので, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}^{(r)}}{a_N^{(r)}} = 1$ が成り立つことは $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} = 0$ が成り立つことと同

値であることが分かります. 此処で帰納仮定 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N-1}^{(r-1)}}{a_N^{(r-1)}} = 1$ を具体的に書き下しますと

(計算の都合上分母と分子を入れ替えた形にしています), 十分に小さい 任意の 正の実数 ε に
対して自然数 N_0 が存在し, $N > N_0$ なるすべての自然数に対して $\left| \frac{a_{N-1}^{(r-1)}}{a_N^{(r-1)}} - 1 \right| < \varepsilon$ が成り

立つことになりますので, 式変形をして $a_{N-1}^{(r-1)} > (1 - \varepsilon) a_N^{(r-1)}$ という不等式を得ます. こ

の不等式を用いて $\frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}}$ を

$$\begin{aligned} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} &= \frac{a_N^{(r-1)}}{a_1^{(r-1)} + \dots + a_{N_0-1}^{(r-1)} + a_{N_0}^{(r-1)} + \dots + a_{N-2}^{(r-1)} + a_{N-1}^{(r-1)}} \\ &< \frac{a_N^{(r-1)}}{a_1^{(r-1)} + \dots + a_{N_0-1}^{(r-1)} + (1 - \varepsilon)^{N-N_0-1} a_{N-1}^{(r-1)} + \dots + (1 - \varepsilon) a_{N-1}^{(r-1)} + a_{N-1}^{(r-1)}} \\ &= \frac{a_N^{(r-1)}}{\underbrace{a_1^{(r-1)} + \dots + a_{N_0-1}^{(r-1)}}_{N \text{ に依らない正の定数として評価}} + \frac{1-(1-\varepsilon)^{N-N_0}}{1-(1-\varepsilon)} a_{N-1}^{(r-1)}} < \frac{a_N^{(r-1)}}{\frac{1-(1-\varepsilon)^{N-N_0}}{\varepsilon} a_{N-1}^{(r-1)}} \\ &= \frac{\varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon)^{N-N_0}} \cdot \frac{a_N^{(r-1)}}{a_{N-1}^{(r-1)}} \end{aligned}$$

*8 総和記号の条件を満たす $(n_1, n_2, \dots, n_{r-1})$ が存在しない場合は $a_N^{(r)} = 0$ と定義することにします.

と評価出来るため、 $N \rightarrow \infty$ として再び帰納仮定から不等式 $0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} \leq \varepsilon$ が導かれます。正の数 ε は 任意に 選んでいたもので、目標としていた極限式 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N^{(r-1)}}{s_{N-1}^{(r-1)}} = 0$ を得ました。□

次の命題は、多重ポリログ関数と多重ゼータ値の関係を記述する非常に重要なものですが、多重ポリログ関数の定義から直観的には“ほぼ明らか”でしょう。

命題 1.9 (多重ポリログ関数と多重ゼータ値の関係). $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ が許容的指数 (つまり $k_r > 1$) であるとき $\lim_{\substack{|z|_\infty < 1 \\ z \rightarrow 1}} \text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \zeta(\mathbf{k})$ が成り立つ。

注意 1.10. 「 $z = 1$ を代入すれば良いだけじゃん!!」という話ではありますが、 $z = 1$ は収束円盤の境界上であるため、「極限值として正しく多重ゼータ値に収束するか」は一応チェックする必要があります。また 多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の $z = 1$ での特殊値が多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ であるという観点は、言われてみれば“当たり前”ですが、その舞台裏では革新的な「視点の転換」がなされています。この「視点の転換」を通じて、第 1.2 節では「 p 進」世界での多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ を“ p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の $z = 1$ での特殊値」として定義することになるのですから、最後の注意として、極限を取る際に付された「 $|z|_\infty < 1$ 」という条件は、次の小節で $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ を解析接続した後に見返すと「多重ポリログ関数を 主分枝に制限して 極限をとる」ことを意味していることが分かります。このような極限の扱いも「 p 進」世界での理論 (特に定義 1.20) と比較してみると面白いでしょう。

【証明】 指数 $\mathbf{k}$ が許容的ならば多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ は収束する (例えば [荒川金子 10, 補題 1.1.2] などを参照) ので、 $|z|_\infty \leq 1$ のとき

$$\left| \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \right|_\infty \leq \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{|z|_\infty^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \leq \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} = \zeta(\mathbf{k}) < \infty$$

より、優級数定理から $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は収束します。したがって $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の収束半径が 1 よりも真に大きくなる (つまり “ $|z|_\infty = 1$ まで解析接続出来る”) ので、特に題意が従います*9。□

*9 (マニアックな注) 定理の主張を見ると、如何にも ^{いか} ^{べき} 冪級数に対する ^{ただ} アーベルの連続性定理 から直ちに従いそうな気がしますが、複素版 のアーベルの定理には所謂 ^{いわゆる} ストルツ角の条件 *STOLZ angle condition* が課されてしまうため、今回の設定で適用しようとする ^{かえ} 却って面倒な条件が付いてします ([Ahl78, Chapter 2, Theorem 3] 参照)。

§ 1.1.2 多重ポリログ関数の反復積分表示と解析接続

^{べき}冪級数の収束半径内では、項別微分だろうと項別積分だろうと遣りたい放題ですので、多重ポリログ関数の定義式 $(\text{Li})_{\text{Ser}}$ を項別微分することで、次の微分方程式を得ます。

命題 1.11. $|z|_\infty < 1$ のとき、多重ポリログ関数 $\text{Li}_k(z)$ は次の微分方程式を満たす；

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}(z) & (k_r \geq 2 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{1-z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}(z) & (k_r = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_1(z) = \frac{1}{1-z}.$$

^{さすが}流石に高校生レベルの微分の計算ですので、証明は割愛します。ヒントとして $k_r = 1$ のときに現れる $\frac{1}{1-z}$ という項が幾何級数の公式 $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ に由来している、ということだけをお伝えして、先に進みましょう。さて、 $\text{Li}_k(0) = 0$ であることは定義式 $(\text{Li})_{\text{Ser}}$ から^{ただ}直ちに従いますから、(今のところ $|z|_\infty < 1$ の条件下では) 命題 1.11 の微分方程式を繰り返し用いて $\text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}(z)$ を 1 次微分形式 $\omega_0 = \frac{dt}{t}$ と $-\omega_1 = \frac{dt}{1-t}$ の反復積分 *iterated integral* として表すことが出来ます。例えば次の計算のように、実際に具体的な指数 $\mathbf{k}$ に対して $\text{Li}_k(z)$ を手計算で反復積分に書き直してみると、^す直ぐに納得出来るはずです。

$$\begin{aligned} \text{Li}_{2,1}(z) &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \frac{1}{1-t_3} \text{Li}_2(t_3) dt_3 = \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \frac{1}{t_2} \text{Li}_1(t_2) dt_2 \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left(\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3}. \end{aligned}$$

反復積分の記号を用いて、^{ここ} 此処迄の話をまとめておきましょう。

反復積分の記号についての規約

$X(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の区分的に滑らかな (整った) 道 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X(\mathbb{C})$ と、 $X(\mathbb{C})$ 上の微分 1 形式 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r &\quad \left(\text{または } \int_{\gamma} \omega_1 \circ \omega_2 \circ \dots \circ \omega_r \right) \\ &:= \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1} \underbrace{\gamma^* \omega_1(t_1) \wedge \gamma^* \omega_2(t_2) \wedge \dots \wedge \gamma^* \omega_r(t_r)} \end{aligned}$$

と定めます。この記法は“前の微分形式から順に 積分する”という順序で書かれています。文献によっては“後ろの微分形式から順に 積分する”流儀を採用している場合も少なくない^{*10}ので 良く注意してください!! なお、積分値が道の始点 α と終

点 β にしか依らない場合には、単に $\int_{\alpha}^{\beta} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r$ と書くこととします。また、道の始点や終点には 0 や 1 での接基点 *tangential base point* も含めることとします (接基点や尖点的な道, 整った道などの用語については、山本修司さんの解説記事 [山本 SS18, 1.2 節] を参照してください; 山本さんの記事の記号を用いるならば γ は“接基点付き空間 $\tilde{X}(\mathbb{C})$ の道”と書かれるべきものですが、普遍被覆空間と大変紛らわしいのでこの記号は用いないことにしました)。

命題 1.12 (多重ポリログ関数の反復積分表示). $X(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の有理微分形式 ω_0, ω_1 を其々 $\omega_0 = \frac{dt}{t}, \omega_1 = \frac{dt}{t-1}$ と定めると*11, 多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は次のような反復積分表示を持つ;

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \int_{\gamma_z} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \dots (\text{Li})_{\text{Int}}$$

ただし $\gamma_z: [0, 1] \rightarrow X(\mathbb{C})$ は 0 (正確には接基点 $0\vec{1} = 1_0 = \mathbf{0}$) と z を結ぶ整った道とする。

表示 $(\text{Li})_{\text{Int}}$ に於いて γ_z を“まっすぐな道” dch (定義は山本修司さんの記事 [山本 SS18, 例 3.3] を参照) としたものが多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ の反復積分表示 [荒川金子 10, 定理 1.2.1] に他なりません (川崎菜穂さんの記事の山本積分表示 [川崎 SS18, 例 1.2 の直前] も参照)。

命題 1.12 の主張では「 $|z|_{\infty} < 1$ 」という条件を外してしまいました。何故ならば ω_0, ω_1 という微分形式は非常にシンプルなものなので、最早開円盤 $\mathbb{D}_0^-(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|_{\infty} < 1\}$ 内に留まらず $X(\mathbb{C})$ 内の 0 を始点とする道に対して線積分することが可能であるからです。つまり反復積分表示 $(\text{Li})_{\text{Int}}$ は、多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の普遍被覆空間 $\widetilde{X(\mathbb{C})}$ 上の関数としての (或いは $X(\mathbb{C})$ 上の多価関数としての) 解析接続 *analytic continuation* を与えていることになります。解析接続された関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の多価性は、良く知られているように γ が終点 z に着くまでに ω_0, ω_1 の極 0, 1 を“何回回ったか”に応じて積分値が変わる (つまりモノドロミー *monodromy* が生じる) ことに由来しています。詳細は (深さ 1 の場合しか扱われていませんが) 河野俊丈さんの著書 [河野 09, 1.4 章] に詳しいので参照して下さい。

何にせよ、我々は「実 / 複素」世界での多重ポリログ関数が反復積分表示を介して解析接続されることを概観してきました。此処での経験を踏まえて、次の小節では愈々「 p 進」世界の理論へと足を踏み出してゆきましょう。

*10 例えば [GF, Section 3.1.3] など。陳 國才 Kuo-Tsai CHEN の原論文 [Che77] では本稿と同じ順番で反復積分を定義しています。

*11 此処での文脈では $\omega_1 = \frac{dt}{1-t}$ と定めた方が自然なように思えますが (実際にそう定義してある文献も少なくありません), 後続の山本修司さん, 佐久川憲児さん, 萩原啓さんの記事に合わせた定義を採用しました。

§ 1.2 「 p 進」世界での理論 — 古庄英和の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$

さあ、^{ところ} 処 変わって「 p 進」世界の舞台 $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ にやって参りました。
「実 / 複素」の世界で培った経験^{つちか}を踏まえると、最初に“ p 進多重ポリログ関数”を定義し、
解析接続した上で“ $z = 1$ での特殊値”として p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ を定義する と言う
シナリオが容易に思い付くでしょう。目論見^{もくろみ}通りにすんなりと p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が
構成出来れば良いのですが、はてさてそう巧く^{うま}いくことやら……。

§ 1.2.1 p 進多重ポリログ関数 — 「 p 進」世界の^{べき}冪級数として

本小節の主役である p 進多重ポリログ関数 も、^ま 先ずは安直に^{べき} 冪級数 で定義しましょう；

定義 1.13 (p 進多重ポリログ関数). $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ に対し、冪級数

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^p(z) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \cdots (\text{Li})_{\text{Ser}}^p$$

(の絶対収束域) で定義される p 進解析的関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^p(z)$ を (1 変数) p 進
多重ポリログ関数 (one-variable) *p-adic multiple polylogarithm* と呼ぶこととします。

大学で学習する^{べき} 冪級数の理論は、良く見返してみるとユークリッド距離 $|\cdot|_{\infty}$ の距離関数と
しての性質と $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の完備性位しか用いられていません。したがって、ユークリッド距離
 $|\cdot|_{\infty}$ を p 進付値 $|\cdot|_p$ に取り替えることで、^{べき} 冪級数の理論の主要な定理の大半が p 進数係数
の^{べき} 冪級数についても (証明を何ら変えることなく) 成り立つことが簡単に確認出来ます。この
事実を用いて、早速 p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の収束半径を求めてみましょう。

命題 1.14. p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の収束半径は 1 である。

通常の多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の場合とまったく同じ結果ですが、証明手法はかなり異
なっています (用いる距離関数が異なるので当然ではありますが)。[Fur04, Lemma 2.7] では
“Easy.” として証明が割愛されていますが、「 p 進」世界での解析に慣れていない方にとって
は何をすれば良いのか分かりづらいたと思いますので、簡単に証明を紹介しておきましょう。
実際、 p 進付値特有の 強三角不等式 *strong triangle inequality* のお陰で、収束半径の計算は
「 p 進」世界の場合の方が寧ろ^{むしろ}簡単になっています*12。

【証明】 ^{べき} 冪級数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の z^N の係数 $a_N = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{r-1} < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$ の和に現れ

*12 不等式評価が“簡単になる”ことは、 $\mathbb{C}_p$ の様な「 p 進」世界での解析 (p 進解析) では度々観察される現象です。

る各項 $\frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}}$ の p 冪^{べき}の指数の最小値は、下から $-\text{wt}(\mathbf{k}) \left\lfloor \frac{\log N}{\log p} \right\rfloor$ で抑えられます (実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す床関数 *floor function* です). 実際、1 から N までの自然数は p で高々 $e_N = \left\lfloor \frac{\log N}{\log p} \right\rfloor$ 回割り切れるため^{*13}, $n_1, \dots, n_{r-1}, N$ がすべて p で e_N 回割り切れる状況が起こり得るならば、そのときに p 冪の指数が最小となります. 此処^こで強三角不等式と p 進付値の定義 $|p|_p = p^{-1}$ を用いると

$$|a_N|_p \leq \max_{0 < n_1 < \cdots < n_{r-1} < N} \left| \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_{r-1}^{k_{r-1}} N^{k_r}} \right|_p \leq p^{\text{wt}(\mathbf{k})e_N} \leq p^{\frac{\log N}{\log p} \text{wt}(\mathbf{k})} = N^{\text{wt}(\mathbf{k})}$$

と評価出来ますので、任意の (正の) 実数 α と $a < 1$ に対して (「実 / 複素」の世界で) $a^N N^\alpha \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ となることから $|z|_p < 1$ のとき

$$|a_N z^N|_p \leq N^{\text{wt}(\mathbf{k})} |z|_p^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (|z|_p < 1 \text{ より})$$

が成り立ちます. したがって注意 1.2 で紹介した「逆の主張」から、冪級数^{べき} $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \sum_{N=1}^{\infty} a_N z^N$ は $|z|_p < 1$ で収束します. 最後に、 $\mathbb{D}_0^-(1)$ の境界上の点 $z = 1$ では $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ が実際に発散するので (命題 1.1 を参照してください), 収束半径がちょうど 1 であることも分かります. $\square$

§ 1.2.2 p 進多重ポリログ関数の反復積分表示と解析接続 — コールマン積分を用いて

続いて p 進多重ポリログ関数が満たすべき微分方程式を考察しましょう. 「 p 進」の世界での微分方程式と聞くと、何やら非常に難しそうなものを感じられますが、 p 進多重ポリログ関数は所詮は“開円板” $\mathbb{D}_0^-(1) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$ の上で収束する冪級数^{べき} なので、実質的に微分/積分する必要のある関数は冪乗関数^{べき} z^n のみです. 斯様な関数については、微分という操作は「実 / 複素」の世界でも $z^n \mapsto n z^{n-1}$ という代数的な操作^{かよう} だと思えることが出来ましたから、「 p 進」の世界では $\frac{d}{dz}; z^n \mapsto n z^{n-1}$ という操作を「微分」と“定義”することにしましょう^{*14}. すると、「実 / 複素」の世界と全く同様に、項別微分によって $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の満たす微分方程式が得られます (命題 1.11 と比較してください);

^{*13} p を底とする対数 “ $\log_p N$ ” を計算すれば「 N が高々何回 p で割り切れるか」が分かるという、高校で対数関数が導入される際に必ず学ぶ事実を用いているだけです. ただ “ $\log_p N$ ” と書いてしまうと、後で登場する p 進対数関数 と非常に紛らわしいので、敢えて自然対数に (底の変換公式を用いて) 書き直しているのです.

^{*14} ($\mathbb{C}_p$ 線型な) 代数的 導分 *derivation* の定義に含まれているライプニッツ則 *LEIBNITZ rule* を用いると、任意の導分 D に対して $D(z^n) = n z^{n-1} D(z)$ が成り立つことが帰納的に証明出来ます. 此処で“定義”した $\frac{d}{dz}$ は、本当は $\frac{d}{dz}(z) = 1$ と正規化された導分として定義されるべきものです.

命題 1.15. $|z|_p < 1$ のとき, p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ は次の微分方程式を満たす;

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^p(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^p(z) & (k_r \geq 2 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{1-z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^p(z) & (k_r = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_1^p(z) = \frac{1}{1-z}.$$

さらに“開円板” $\mathbb{D}_0^-(1)$ 上では“微分 1 形式” $\omega_f = f(z) dz = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{f,n} z^n \right) dz$ の原始関数 $\text{primitive function } F_f(z)$ (つまり $dF_f(z) = \omega_f$ を満たす $\mathbb{D}_0^-(1)$ 上の収束^{べき}冪級数 $F_f(z)$) が

$$F_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,n} \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{(積分定数)}$$

として簡単に定義出来てしまいますので^{*15}, 高校の教

科書での“定義”のように $\omega_f = f(z) dz$ の“定積分”を $\int_{\alpha}^{\beta} \omega_f \stackrel{\text{定義}}{:=} [F_f(z)]_{\alpha}^{\beta} := F_f(\beta) - F_f(\alpha)$ で定めることが出来ます (引き算によって積分定数が打ち消し合っていることに注目しましょう). これを用いて $\mathbb{D}_0^-(1)$ 上での p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ に対しても, 「実 / 複素」の場合とまったく同じ形の“反復積分表示”が得られます (命題 1.12 と比較してみてください).

命題 1.16 (p 進多重ポリログ関数の“反復積分表示”). $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の有理微分形式 ω_0, ω_1 を其々^{それぞれ} $\left(\omega_0 = \frac{dt}{t}, \omega_1 = \frac{dt}{t-1} \right)$ と定めると, $|z|_p < 1$ に於いて p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ は次のような“反復積分表示”を持つ;

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \int_0^z (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \dots (\text{Li})_{\text{Int}}^p.$$

此处で“反復積分”とは, 単に“前の微分形式から順に 積分を計算してゆく”ことを指すものとします. 例えば $\int_0^z (-\omega_1) \omega_0 (-\omega_1)$ は

$$\begin{aligned} \int_0^z (-\omega_1) \omega_0 (-\omega_1) &:= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left(\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} (-\omega_1(t_1)) \right) \omega_0(t_2) \right\} (-\omega_1(t_3)) \\ &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left(\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left(\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} t_1^{m-1} \right] dt_1 \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \end{aligned}$$

^{*15} ^{べき}冪級数 $F_f(z)$ が収束することは確認する必要があります (“開円盤”上の“ポアンカレの補題”; 注意 3.28 も参照してください).

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_3=0}^{t_3=t_2} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_2^m}{m} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} = \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left\{ \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_2^{m-1}}{m} \right) dt_2 \right\} \frac{dt_3}{1-t_3} \\
&= \int_{t_3=0}^{t_3=z} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_3^m}{m^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_3^{n-1} \right) dt_3 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{z^{m+n}}{m^2(m+n)} = \sum_{0 < n_1 < n_2} \frac{z^{n_2}}{n_1^2 n_2} = \text{Li}_{2,1}^p(z)
\end{aligned}$$

のように形式的には「実 / 複素」の場合とまったく同じ計算によって p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{2,1}^p(z)$ となることが分かります。ただ、この計算は収束円盤 $\mathbb{D}_0^-(1)$ では“項別微分”や“項別積分”が自由に出来るという事実に依拠していることには注意が必要です（したがって $|z|_p < 1$ のとき にしか正当化されません）。

注意 1.10 で述べた戦略に沿うのであれば、次に我々がすべきことは「命題 1.16 の“反復積分表示”を“線積分”を用いて $\mathbb{D}_0^-(1)$ の外の点 z へと拡張する」ということになりますが、^{ここ}此処で「 p 進」世界での“線積分”って何? という疑問に突き当たります。閉区間 $[0, 1]$ は「実 / 複素」世界の対象ですから、素朴な意味で“道” $\gamma: [0, 1] \rightarrow X(\mathbb{C}_p)$ を考えるのはどう考えても無謀です。実際、「 p 進」世界 $X(\mathbb{C}_p)$ では素朴な意味での“線積分”は定義出来ません（次の小節 1.2.3 でもこの辺りの事情に触れます）。そこで「 p 進」世界では“線積分”に代わるものとしてコールマン積分 COLEMAN integral $\left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \omega \right]_{\alpha}^{\beta}$ と呼ばれる「 p 進」世界の積分を用います。コールマン積分がどのようなものかについては、小節 1.2.3 で（非常に大雑把に）^{おおざっぱ}解説することにしますが、一旦コールマン積分の存在を認めてしまえば、第 1.1.2 節とまったく同様の手順で“コールマン反復積分”を用いて p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ を“解析接続”することが出来ます；^{いったん}

命題-定義 1.17 (p 進多重ポリログ関数の“解析接続”, [Fur04, Definition 2.9]). 任意の $a \in \mathbb{C}_p$ に対し、分枝 a の“反復コールマン積分”

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) := \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots (-\omega_1) \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z \cdots (\text{Li})_{\text{Int}}^{p,(a)}$$

によって定まる $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の分枝 a のコールマン関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ を分枝 a の p 進多重ポリログ関数 p -adic multiple polylogarithm of branch a と呼ぶ。分枝 a を選ぶ毎に、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ は $\mathbb{D}_0^-(1)$ 上で $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$ と一致する唯一つの分枝 a のコールマン関数として特徴付けられる。

^{ここ}此処で“反復コールマン積分”は、^{やは}矢張り単純に“前の微分形式から順に コールマン積分を

計算してゆく”ことを指すものとします; 例えば

$$\left[\int_{\text{Col}}^{(a)} (-\omega_1) \omega_0(-\omega_1) \right]_0^z := \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} (-\omega_1(t_1)) \right]_{t_1=0}^{t_1=t_2} \omega_0(t_2) \right]_{t_2=0}^{t_2=t_3} (-\omega_1(t_3)) \right]_{t_3=0}^{t_3=z}$$

といった塩梅です. 命題-定義 1.17 の主張の未定義語については, この後の第 1.2.3 節で簡単に解説します. この時点で注目しておきたいのは 定義された “解析接続” $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ に $a \in \mathbb{C}_p$ というパラメータが付いているということです. つまり, p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の解析接続は パラメータ a の数だけ (非加算無限個!!) 存在することになるのです*16.

§ 1.2.3 コールマン積分とは? — 「 p 進」世界での積分論の困難を乗り越えて

第 1.1 節でも度々登場したように, 「実 / 複素」の世界では^{しばしば} 屢々 “道に沿った解析接続” が行われますが, それは大雑把に言えば^{おおざっぱ}

Step 1. 道の始点 x_0 での $f(z)$ のローラン展開を求める

Step 2. $f(z)$ の x_0 でのローラン展開の収束域 D_0 内にある道上の点 x_1 でローラン展開し直す

Step 3. $f(z)$ の x_1 でのローラン展開の収束域を D_1 とするとき, $D_1 \setminus D_0$ 内にある道上の点 x_2 でローラン展開し直す

Step 4. $f(z)$ の x_2 でのローラン展開の収束域を D_2 とするとき, $D_2 \setminus (D_0 \cup D_1)$ 内にある道上の点 x_3 でローラン展開し直す

.....

という操作を道の終点まで繰り返すことでなされるのでした. 実際, 各 $D_{j-1} \cap D_j$ を “糊代”^{のりしろ} として各点でのローラン展開が貼り合っ^{べき}てゆき (一致の定理), $f(z)$ が “道の終点” まで接続されるわけです (図 2 の左側を参照). 「 p 進」世界でも^{べき} 冪級数やローラン級数は意味を持ちますから, 非常に楽観的に考えれば上記の手順を繰り返すことで関数の “道に沿った解析接続” が出来そうな気がしてきます. しかし, そんな期待とは裏腹に,^{うらはら} 「 p 進」世界では幾つもの深刻な事情が重なってそう簡単に “解析接続” が出来ないことが結論付けられてしまいます; 第一に, ^{すで}既に説明したように「 p 進」世界では抑々^{そもそも} 素朴な意味での “道” は意味を為しません. また, 仮に何らかの方法で “道” の概念が定義出来たとしても, 素朴な意味で “道に沿った解析接続” が機能することはまったく期待出来ないのです. と言うのも, 「 p 進」世界では 2 つの円盤が交わるならば, 必ず一方が他方に含まれる という「実 / 複素」世界では考えられない事態が生じてしまうからです (図 2 の右側を参照; 強三角不等式 を用いて簡単に確認出来ますので, 気になる人は証明してみてください). 特に図 2 の左側の図のような状況は 「 p 進」世界では起

*16 慣習として “分枝 a ” という用語を用いていますが, 通常の実素関数論 (「複素」の世界) で多価関数に対して用いられる “分枝” という用語とはニュアンスが微妙に異なっているので注意しましょう.

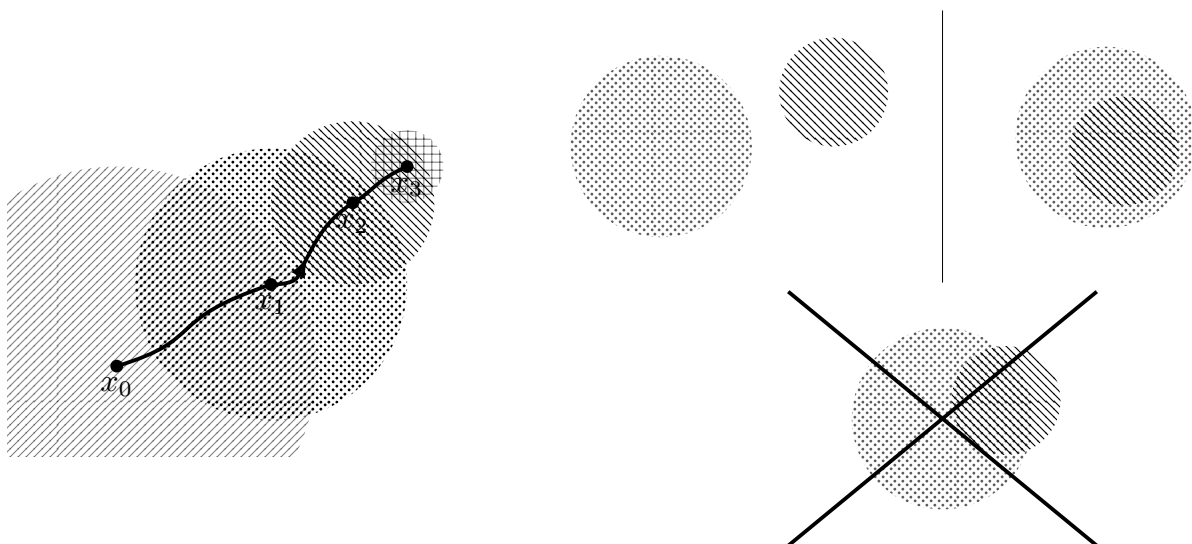


図2 (左) 「実 / 複素」の世界での“道に沿った解析接続”のイメージ
(右) 「 p 進」世界での2つの円盤 (“交わる円盤” は必ず一方が他方に含まれる)

こり得ないため、“開円盤”の共通部分を“糊代”^{のりしろ}として関数を接続していく、という発想自体がナンセンスなものになってしまうのです。

この問題を解消する方法の一つが、ジョン・テイトにより導入されたリジッド解析幾何学 *rigid analytic geometry* です。リジッド解析幾何学は、完全不連結になってしまうほど“細かい”「 p 進」世界の位相を“制限”し、貼り合わせに用いる開集合や開被覆を「少なくする」ことで“関数の貼り合わせ”が巧く機能するようにしてしまおう、という画期的なアイデアに基づいて構築された幾何学で、現在では「 p 進」世界の幾何学を考える際に欠かすことのできない非常に強力なツールとなっています。リジッド幾何学^{かとう ふみはる}については、近年加藤文元さんによる待望の日本語の解説書 [加藤 13] が出版されました。特に [加藤 13, 第0節] の導入部では、リジッド幾何学^{まと}の考え方について非常に分かり易く纏められていますので、リジッド幾何学がどんなものかを知りたい方は先ずは [加藤 13] を手に取ってみましょう。また、[BGR84] はリジッド幾何学の基本文献として未だに定評のある教科書で、大抵のことはこの本に載っているといっても過言ではありません。

と言うわけで、目下の目標である p 進多重ポリログ関数の“解析接続”に於いても当然リジッド幾何学の助けを借りる必要がありますが、実はこの問題にはリジッド幾何学だけでは乗り超えられない困難が残されています——それが 積分定数の不定性 の問題です。「実 / 複素」の世界では、多重ポリログ関数は微分形式の反復積分表示を持ち、その表示を用いて解析接続されたのでした。「 p 進」世界では (上記のような事情も鑑みると) “道に沿った積分”は巧く機能しなさそうなので、取り敢えずは素朴に“ローラン展開の項別積分”によって積分を考えるより仕方がありません。しかし、(高校でも学んだように) 関数を積分をした際には 積分定数の不定性 が必ず現れます。そして「 p 進」世界は 完全不連結 であるため (命

題 A.6 を参照), 個々の “開円盤” 上でローラン展開を積分した際の積分定数がそのままではまったく貼り合わない のです. つまり, 「 p 進」世界では各点で素朴に項別積分して得られる関数が 局所定数関数 の不定性を持つことになってしまい, そのままではまったく使いものになりません. この困難を回避する方法のヒントは p 進解析の祖とも言うべき ベルナルド・モリス・ドヴォルク *Bernard Morris DWORK* によって既に与えられていました. ドヴォルクは「 p 進」世界に特有の フロベニウス構造 FROBENIUS structure に着目し, フロベニウス作用の “固有ベクトル” となっているような局所定数関数は 大域的な定数関数 となる ことを発見しました (ドヴォルクの原理; [Col82, Lemma 3.1] を参照). コールマンはドヴォルクのこの発見に触発されて, 積分とフロベニウス作用が 可換となるように “原始関数” を巧く取る というアイデアに基づいて, 積分の際に生じる不定性が 大域的な定数 となるような積分理論の構築に成功したのです. p 進積分や p 進微分方程式を “フロベニウス構造” 付きで考える という思想は, 現在の p 進微分方程式や p 進コホモロジーの最新理論でも非常に重要かつ基本的な考え方として根付いています (F クリスタル, F アイソクリスタルの概念など). コールマンは論文 [Col82] の Chapter III の冒頭で, p 進解析に於ける “フロベニウス構造” の重要性を以下のような印象的な文章で表現しています;

Rigid analysis was created to provide some coherence in an otherwise totally disconnected p -adic realm. Still, it is often left to Frobenius to quell the rebellious outer provinces.

リジッド解析は, さもなければ完全不連結な p 進の “領土” に或る種の秩序を与えるために産み出された. それでもなお, 反抗的な “外領” を制圧する役目は屢々フロベニウスに委ねられているのである.

最後に, 今回考察すべき空間 $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ が “穴開き” の空間であることから生じる若干技術的な問題について触れておきましょう. 例えば, 除外されている点 0 で極を持つ微分形式 $\frac{dz}{z}$ の “原始関数” は, 「実 / 複素」の場合と同様に 対数関数 $\text{Log}_p z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$ となるはずですが. 右辺の ^{べき} 冪級数の収束半径は 1 であり (命題 1.8 を参照), したがって $\text{Log}_p z$ はそのままでは収束円盤 $\mathbb{D}_1^-(1) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-1|_p < 1\}$ でしか定義されていないため, “ 0 のまわりの関数” と捉えるためには $\mathbb{C}_p^\times$ 上の関数に拡張する必要があります. ところが $\text{Log}_p z$ の $\mathbb{D}_1^-(1)$ から $\mathbb{C}_p^\times$ への拡張の方法が まったく一意的ではない のです. 実際, $\mathbb{C}_p^\times$ は構造定理により $p^\mathbb{Q} \times (\text{位数が } p \text{ と素な } 1 \text{ の } \supseteq \text{べき} \text{ 冪根}) \times \mathbb{D}_1^-(1)$ の形の直積分解を持ちます ([Ko77, p. 72] を参照). “開円盤” $\mathbb{D}_1^-(1)$ 上では $\text{Log}_p z$ は定義されているため, あとは $p^\mathbb{Q}$ と 1 の冪根に対して $\text{Log}_p z$ の値を定義すれば十分ですが, 対数関数が満たすべき 加法性 *additivity* $\text{Log}_p zw = \text{Log}_p z + \text{Log}_p w$ を保ったまま拡張するのであれば, 1 の

冪根 ζ での値は 0 となる必要があります. ところが $p^{\mathbb{Q}}$ への拡張に対しては 何の制約もないため, 例えば生成元 p での値を “ $\text{Log}_p^{(a)} p = a \in \mathbb{C}_p$ ” と定めるごとに異なる (それも非可算無限個の!) 拡張 $\text{Log}_p^{(a)} z$ が生じてしまうのです. コールマンはこの問題に対しては 予め “対数関数の分枝 $\text{Log}_p^{(a)} z$ ” を固定し, 分枝毎に積分理論を構築する という態度を取っています.

以上を踏まえた上で, 本稿で必要とされるコールマン積分論の主結果を紹介します. 此处で紹介する定式化は基本的に [Bes00, Section 2] に則っています. $X(\mathbb{C}_p)$ 上の過収束なりジッド解析的関数の集合および過収束なりジッド解析的微分 1 形式の集合をそれぞれ $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$, $\Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ で表し, 点 $0, 1, \infty$ で (分枝 a の) “対数的極を持つ局所解析的な関数” および “対数的極を持つ局所解析的な微分 1 形式” の集合をそれぞれ $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$, $\Omega_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ で表します (各関数環の正確な定義は第 A.2.3 節および [Bes00, p. 341] を参照してください).

定理 1.18 (コールマン積分論の主定理, [Col82, CdS88]). 各 $a \in \mathbb{C}_p$ に対し, 分枝 a の コールマン関数 COLEMAN function と呼ばれる局所解析的関数の集合 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ ($\subset \mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$) で $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ を含むものと $\mathbb{C}_p$ 線型写像 $\int_{\text{Col}}^{(a)} : \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))/\mathbb{C}_p \cdot 1$ が存在して以下の性質で特徴付けられる (但し $\Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) := \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))} \Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ とする);

(1) 外微分作用素 $d : \mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \rightarrow \Omega_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ に対して $d \circ \int_{\text{Col}}^{(a)} = \text{id}_{\Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))}$ が成り立つ;

(2) フロベニウス射 (の任意の持ち上げ) ϕ に対して $\int_{\text{Col}}^{(a)} \phi^* \omega = \phi^* \left(\int_{\text{Col}}^{(a)} \omega \right)$ が成り立つ;

(3) $f \in \mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ に対して $\int_{\text{Col}}^{(a)} df = f \pmod{\mathbb{C}_p \cdot 1}$ が成り立つ.

特に任意の $\alpha, \beta \in X(\mathbb{C}_p)$ に対して $\left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \omega \right]_\alpha^\beta$ が well-defined になります (つまり積分が “経路” に依存しない / “モノドロミーが生じない” ということ). さらにコールマン関数に対して 一致の定理 *uniqueness principle* が成立することも, コールマン関数の構成から従います;

命題 1.19 (一致の定理 [Col82, Corollary 4.8a], [Fur04, Proposition 2.6]). 分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ のコールマン関数 $f, g \in \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ が $X(\mathbb{C}_p)$ の (強グロタンディーク位相に関する) 許容開集合 *admissible open set* U 上で一致するならば, f と g は $X(\mathbb{C}_p)$ のコールマン関数として一致する.

許容開集合の定義は省略します ([加藤 13, 定義 4.2.2] や [BGR84, Section 9.1.4, Proposi-

tion 2] を参照). 具体例としては, $X(\mathbb{C}_p)$ のアフィノイド部分集合 (“縁のある” 部分集合) は許容開集合ですし, “開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ や第 A.2.3 節に登場する U_r のような “縁のない” 集合も許容開集合となります (本稿を読む上では, このくらいの部分集合を想定しておけば十分だと思います).

本小節の最後に コールマン関数の分枝 について補足しておきましょう. 分枝 a のコールマン関数 $f(z)$ は定義から $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ の元でもあるため, $z_0 = 0, 1, \infty$ のまわりで 分枝 a の p 進対数関数 $\text{Log}_p^{(a)}(z)$ を用いた “漸近展開”

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(a)}(z - z_0) + \dots + f_m(z) \{\text{Log}_p^{(a)}(z - z_0)\}^m \quad (z_0 = 0, 1 \text{ のとき})$$

または

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + f_m(z) \left\{ \text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}^m \quad (z_0 = \infty \text{ のとき})$$

を持ちます ($f_i(z)$ は点 z_0 のまわりの或る “開円環” $A_{z_0}(r, 1)$ 上収束する冪級数; 第 A.2.2 節の $\mathcal{A}(A_{z_0}(r, 1))$ の定義を参照してください). 此处に現れる 分枝 a の p 進対数関数 $\text{Log}_p^{(a)}(z)$ を分枝 b の p 進対数関数 $\text{Log}_p^{(b)}(z)$ に取り替える操作

$$\iota_{a,b}(f)(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(b)}(z - z_0) + \dots + f_m(z) \{\text{Log}_p^{(b)}(z - z_0)\}^m \quad (z_0 = 0, 1 \text{ のとき})$$

および

$$\iota_{a,b}(f)(z) = f_0(z) + f_1(z) \text{Log}_p^{(b)}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + f_m(z) \left\{ \text{Log}_p^{(b)}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}^m \quad (z_0 = \infty \text{ のとき})$$

は環同型 $\iota_{a,b}: \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p))$ を誘導します. まったく同様に $\iota_{a,b}$ -半線型な^{*17}加群の同型 $\tau_{a,b}: \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p)); \text{Log}_p^{(a)}(z) \mapsto \text{Log}_p^{(b)}(z)$ も構成出来ます^{*18}. コールマン積分は, 構成から分枝を取り替える写像 $\iota_{a,b}, \tau_{a,b}$ に対して “関手的に” 振舞います; つまり図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) & \xrightarrow{\int_{\text{Col}}^{(a)}} & \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))/\mathbb{C}_p \cdot 1 \\ \tau_{a,b} \downarrow \wr & & \wr \downarrow \iota_{a,b} \\ \Omega_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p)) & \xrightarrow{\int_{\text{Col}}^{(b)}} & \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(b)}(X(\mathbb{C}_p))/\mathbb{C}_p \cdot 1 \end{array}$$

が可換となります (コールマン積分の 分枝非依存性原理 *branch independency principle*; [Fur04, Proposition 2.3] を参照). したがって, $X(\mathbb{C}_p)$ の 有理微分 1 形式 η_j (これは勿論^{もちろん}

^{*17} 正確な用法ではないかもしれませんが, 任意の $f \in \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)), \omega \in \Omega_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ に対して等式 $\tau_{a,b}(f\omega) = \iota_{a,b}(f)\tau_{a,b}(\omega)$ が成り立つという意味で “半線型” という用語を用いています.

^{*18} 同型 $\iota_{a,b}, \tau_{a,b}$ は “漸近展開” の局所パラメータに依らない well-defined な同型となります ([Fur04, Lemma 2.2] 参照).

分枝 a には依らない対象であり, $\tau_{a,b}(\eta_j) = \eta_j$ が成り立ちます) を分枝 a, b で “同じ手順で” 反復コールマン積分して得られる関数

$$f^{(a)}(z) := \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_k \right]_{\alpha}^z, \quad f^{(b)}(z) := \left[\int_{\text{Col}}^{(b)} \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_k \right]_{\alpha}^z$$

は $\iota_{a,b}(f^{(a)}) = f^{(b)}$ を満たすことが (k に関する帰納法により) 従います. より踏み込んだ言い方をするならば, $f^{(a)}$ と $f^{(b)}$ は $z_0 = 0, 1, \infty$ で (現われる対数関数 $\text{Log}_p^{(a)}(z)$, $\text{Log}_p^{(b)}(z)$ の分枝の差異を除けば) まったく同じ形の “漸近展開” を持つ “本質的には同じ関数” であるわけです. 特に斯様な関数は, どの分枝で考えても “漸近展開” の各係数 $f_j(z)$ が分枝に依存しません. 勿論 p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ は $X(\mathbb{C}_p)$ 上の 有理微分 1 形式 $\omega_1 = \frac{dz}{z}$, $-\omega_2 = \frac{dz}{1-z}$ の反復コールマン積分で定義される関数ですから, p 進多重ゼータ値の分枝非依存性の議論 (後述の定理 1.22 を参照) では 漸近展開に現れる対数関数部分 $\{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^j$ の影響を如何にして取り除くかに焦点が当てられるのです.

§ 1.2.4 KZ 型 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{K})$ の “定義”

何はともあれ p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の “解析接続” $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ が構成出来ましたので, 「実 / 複素」の場合に倣って “ $\zeta_p(\mathbf{k}) := \lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ ” とすれば 「多重ゼータ値の p 進版」と呼ぶべき対象が構成出来そうです. ところが我々は既に命題 1.1 で $\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ が p 進位相では収束しないことを証明してしまいました. 幾ら $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ を “解析接続” したからといって, 収束しなかったものが自動的に収束するようなことが起こるはずはありません. 其処で, $z \rightarrow 1$ での $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の “極限值” として意味のある値を取り出すために 極限の取り方に制限を課す 必要が生じるのです.

定義 1.20 (“分岐を制限した” 極限 $\lim'$, [Fur04, Notation 2.12]). $f(z)$ を $\mathbb{C}_p$ 上定義された関数とし, $\alpha \in \mathbb{C}_p$ とする. $\mathbb{Q}_p(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$ の $\mathbb{Q}_p$ 上の分岐指数が有限であり*19, (p 進位相で) α に収束するような $\mathbb{C}_p$ の任意の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ が同じ値に収束するとき, その収束値を $\lim'_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ で表し, $\lim'_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ は収束する という. そうでないとき (即ち $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ が同じ値に収束しないとき), $\lim'_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ は発散する という.

定義 1.20 の $\lim'$ を用いることで, 古庄英和さんによって導入された p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ は形式的には 「実 / 複素」の場合とまったく同じ形で定義出来ますので, (収束性などの確認は後回しにして) 先に $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の定義を紹介してしましましょう.

*19 拡大 $\mathbb{Q}_p(\{z_n\}_{n=1}^{\infty})/\mathbb{Q}_p$ 自体は無限次拡大でも構いません.

定義 1.21 (古庄英和の KZ 型 p 進多重ゼータ値, [Fur04, Definition 2.17]). 許容指数 $\mathbf{k}$ に対して KZ 型 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ p -adic multiple zeta value of KZ type を $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) = \lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ で定める.

定義 1.21 を命題 1.9 と比較してみれば, $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が $\zeta(\mathbf{k})$ の「 p 進」世界での対応物と呼ぶに相応しいものであることが実感出来るでしょう. 勿論定義 1.21 を見て気になるのは 極限 $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の収束性 ですが, それ以前に p 進多重ポリログ関数の解析接続 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ が分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存している 点も気になるところです. と言うのも, 普通に考えると 極限值 $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ も分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存することとなり (それどころか 極限が存在するかどうか が分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ 毎に変化したとしてもまったく可笑しくありません), “ p 進多重ゼータ値の値 が p 進多重ポリログ関数の分枝の取り方に依存する?!” というとんでもない事態になり兼ねないので, 次に紹介する定理は, そんな“病的な”状況が起こらないことを保障するものです. コールマン積分論が p 進対数関数の分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存して構成されている ことから, コールマン積分論を用いた議論では (特にコールマン関数の 特殊値 を考える際に) 分枝への依存性 / 非依存性を気に掛けるべし, と言うことは常に肝に命じておく必要があります.

定理 1.22 (p 進多重ゼータ値の分枝非依存性, [Fur04, Theorem 2.13]). 定義 1.21 に現れる p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の極限 $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ が収束するか発散するかは 分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存しない. さらに, この極限が収束するとき, 極限值も 分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存しない.

特に p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ は, 定義に用いられる p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存しない.

第 1.2.3 節で見たように, コールマン関数が分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存している箇所は 極での漸近展開に現れる発散項 $\text{Log}_p^{(a)}(z)$ の部分 だけ であつたので, 定理 1.22 の証明に取り組む際には “発散項 $\text{Log}_p^{(a)}(z)$ が消えるかどうか” を調べるのが重要です. 鍵となるのが次に紹介する補題 1.23 で, この補題こそが極限 $\lim'$ を導入する強い動機を与えています.

補題 1.23 ([Fur04, Lemma 2.14]). 任意の $a \in \mathbb{C}_p$, $m \in \mathbb{N}$ および $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^m \left\{ \text{Log}_p^{(a)} \epsilon \right\}^n = 0$ が成り立つ.

注意 1.24. この補題は、「実 / 複素」の世界では典型的なド・ロピタルの定理の演習問題としても有名な結果 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x^{-1}} \stackrel{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0$ (を拡張したもの) の「 p 進」版です. ところが「実 / 複素」の世界では良く知られたこの結果が「 p 進」世界では 極限の取り方に制限を付けないと成り立たない ことには注意が必要です. 補題 1.23 の証明を見ればその理由が察せられると思いますので, 補題 1.23 の証明を概観した後で, $\lim'$ の制限を課しないと極限が発散してしまう例 (反例 1.25) を紹介しましょう.

【補題 1.23 の証明】 $\lim'$ の定義に基づいて, $\mathbb{C}_p$ の点列 $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$ を次の 2 つの条件を満たすように取ります;

★ $\epsilon_k \neq 0$ かつ $\epsilon_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)

★ $\mathbb{Q}_p$ 上の $L_\epsilon := \mathbb{Q}_p(\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty)$ の分岐指数 e_ϵ が有限である

このとき L_ϵ の元 ϖ_ϵ で $|\varpi_\epsilon|_p = p^{-1/e_\epsilon}$ を満たすもの (即ち L_ϵ の一意化元 *uniformiser*) が存在して, L_ϵ の乗法群 $L_\epsilon^\times$ は $L_\epsilon^\times = \langle \varpi_\epsilon \rangle \times \mu_{p'}(\mathcal{O}_{L_\epsilon}) \times (1 + \varpi_\epsilon \mathcal{O}_{L_\epsilon}^{\times})$ と直積分解されます. ^{ただ}但し $\mathcal{O}_{L_\epsilon}$ は L_ϵ の整数環を表し, $\mu_{p'}(\mathcal{O}_{L_\epsilon})$ は $\mathcal{O}_{L_\epsilon}$ に含まれる 1 の ^{べき}冪根で位数が p と素なもの全体のなす乗法群を表すものとします. 特に, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して ϵ_k は $\epsilon_k = \varpi_\epsilon^{\nu_k} u_k$ ($\nu_k \in \mathbb{Z}, u_k \in \mathcal{O}_{L_\epsilon}^\times$) と分解され, さらに p と素な整数 r_k が存在して $u_k^{r_k} \in 1 + \varpi_\epsilon \mathcal{O}_{L_\epsilon}$ になります. 特に $p^C > e_\epsilon$ を満たす自然数 C を固定しておく, 2 項定理と $\varpi_\epsilon^{p^C} \in \varpi_\epsilon^{e_\epsilon} \mathcal{O}_{L_\epsilon} = p \mathcal{O}_{L_\epsilon}$ により $u_k^{p^C r_k} \in (1 + \varpi_\epsilon \mathcal{O}_{L_\epsilon})^{p^C} \subset 1 + p \mathcal{O}_{L_\epsilon}$ が成り立ちますので, 分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ の取り方によらず $\text{Log}_p^{(a)}(u_k^{p^C r_k}) = \text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) = \sum_{t=1}^\infty (-1)^{t-1} \frac{(u_k^{p^C r_k} - 1)^t}{t}$ は $p \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の元となります. 一方で対数関数 $\text{Log}_p^{(a)}$ の加法性から

$$\begin{aligned} \epsilon_k^m \left\{ \text{Log}_p^{(a)}(\epsilon_k) \right\}^n &= \epsilon_k^m \left\{ \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon^{\nu_k} u_k^{\frac{p^C r_k}{p^C r_k}}) \right\}^n \\ &= \epsilon_k^m \left\{ \nu_k \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon) + \frac{1}{p^C r_k} \text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) \right\}^n \quad \dots (b) \end{aligned}$$

となりますが, 中括弧の中身の p 進付値は k に関して有界 となります; 実際, $\nu_k \in \mathbb{Z}$ ゆえ $|\nu_k|_p \leq 1$ ですし, 既に注意したように $\text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) \in p \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ が成り立ちますから $|\text{Log}_p(u_k^{p^C r_k})|_p \leq p^{-1} \leq 1$ が従います. さらに r_k は p と素なので $|(p^C r_k)^{-1}|_p = p^C$ です. ゆえに $\left| \nu_k \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon) + \frac{1}{p^C r_k} \text{Log}_p(u_k^{p^C r_k}) \right| \leq \max \left\{ \text{Log}_p^{(a)}(\varpi_\epsilon), p^C \right\}$ となり, $\text{Log}_p^{(a)}(\epsilon_k)$ の p 進付値が k に依存しない値で上から抑えられます*20. 最後に, 当然 $|\epsilon_k^m|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ですから, $k \rightarrow \infty$ としたときに (b) が 0 に収束することが従います. $\square$

*20 この事実は [Col82, Lemma 6.3] の証明で (特に成り立つ理由への言及もなく) 既に用いられていました.

反例 1.25. 補題 1.23 の証明は一意化元 ϖ_ϵ の存在が鍵となっています. L_ϵ の分岐指数が無限の場合でも, $|\tilde{\varpi}|_p < 1$ となる L_ϵ の元を 1 つ選べば $\epsilon_k = \tilde{\varpi}^{\nu_k} u_k$ ($u_k \in \mathcal{O}_{L_\epsilon}^\times$) と表せますが, 一般には $\tilde{\varpi}$ の指数 ν_k がすべて整数になるように (分母が出ないように) することは 出来ない のです. このことを踏まえると $k \rightarrow \infty$ としたときに “急速に ν_k に分母が生じる” ような $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$ を考えると良からぬことが起こりそうです. 実際 $\tilde{\epsilon}_k = p^{k+p^{-2k}}$ により $\{\tilde{\epsilon}_k\}_{k=1}^\infty$ を定めると, 確かに $\tilde{\epsilon}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ となっていますが

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_k \operatorname{Log}_p^{(a)} \tilde{\epsilon}_k &= p^{k+p^{-2k}} \operatorname{Log}_p^{(a)} p^{k+p^{-2k}} = p^{k+p^{-2k}} (k + p^{-2k}) \operatorname{Log}_p^{(a)} p \\ &= p^{-k+p^{-2k}} \underbrace{(1 + kp^{2k})}_{\in \mathcal{O}_{L_\epsilon}} \operatorname{Log}_p^{(a)} p \end{aligned}$$

より $\operatorname{Log}_p^{(a)}(p) = a \neq 0$ なら $\tilde{\epsilon}_k \operatorname{Log}_p^{(a)} \tilde{\epsilon}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$ となってしまいます*21. 極限 $\lim'$ の定義で分岐に制限が課されているのは, この様な “望ましくない状況” を排除するためなのです.

【定理 1.22 の証明の概略】 分枝 a の多重ポリログ関数 $\operatorname{Li}_k^{p,(a)}(z)$ は $z = 1$ のまわりで $\operatorname{Li}_k^{p,(a)}(z) = f_0(z-1) + f_1(z-1) \operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1) + \dots + f_m(z-1) \{\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m$ $f_i(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j^{(i)} z^j$ ($i = 0, 1, \dots, m$) は $|z|_p < 1$ 上収束する a に依存しない 冪級数

という形に “漸近展開” されることが帰納的に証明出来ます ([Fur04, Proposition 2.11] を参照). 右辺に補題 1.23 を適用すると, $f_i(z-1)$ の高次の項と $\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)$ の積は $\lim'_{z \rightarrow 1}$ によって消えてしまいますから

$$\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in X(\mathbb{C}_p)}} \operatorname{Li}_k^{p,(a)}(z) = \lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in X(\mathbb{C}_p)}} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1) + \dots + a_0^{(m)} \{\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m \quad \dots \quad (\clubsuit)$$

が成り立ちます. 右辺の項で分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存するのは $\{\operatorname{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^j$ の部分だけですので, あとは $(\clubsuit)$ の右辺が $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = \dots = a_0^{(m)} = 0$ のときにのみ収束することを示せば十分です ([Fur04, Lemma 2.15] を参照). そのために, 例えば $|\alpha|_p < 1$ かつ $\operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha \neq 0$ なる $\alpha \in X(\mathbb{C}_p)$ を用いて $\epsilon_k = 1 + \alpha^k$ とおきましょう. これを $(\clubsuit)$ に代入すると

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Li}_k^{p,(a)}(\epsilon_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha^k + \dots + a_0^{(m)} \{\operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha^k\}^m \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_0^{(0)} + k a_0^{(1)} \operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha + \dots + k^m a_0^{(m)} \{\operatorname{Log}_p^{(a)} \alpha\}^m =: \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \end{aligned}$$

となります. 此処で級数の収束の一般論より

*21 $a = 0$ のとき (即ち $\operatorname{Log}_p^{(0)}(p) = 0$ のとき) も, 例えば $\tilde{\epsilon}_k = (p + p^2)^{k+p^{-2k}}$ とおけば, 矢張り $\{\tilde{\epsilon}_k\}_{k=1}^\infty$ は発散してしまいます.

$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ が収束 (コーシー列) $\Rightarrow$ 階差数列 $\{\Delta s_k = s_{k+1} - s_k\}_{k=1}^{\infty}$ が 0 に収束

が成り立ちますから, 特に $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ が収束するならば m 階階差数列 $\{\Delta^m s_k\}_{k=1}^{\infty}$ が 0 に収束する必要があります. ところが $\Delta^m s_k = (\Delta^m k^m) \times a_0^{(m)} \left\{ \text{Log}_p^{(a)} \alpha \right\}^m = m! a_0^{(m)} \left\{ \text{Log}_p^{(a)} \alpha \right\}^m$ と計算出来ますので, $\Delta^m s_k$ が 0 に収束するためには $a_0^{(m)} = 0$ である必要があります. 以下, 帰納的に $a_0^{(m-1)} = a_0^{(m-2)} = \dots = a_0^{(1)} = 0$ が示せるので, 題意が証明出来ました. $\square$

同様のテクニックを用いると, 許容指数に対して p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が “ちゃんと収束する” ことも示すことが出来ます;

定理 1.26 (p 進多重ゼータ値の収束性). 許容指数 $\mathbf{k}$ に対して $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ は (p 進多重ポリログ関数の分枝 a に依らない値に) 収束する.

【証明】^{*22} $\mathbf{k}$ が許容指数であることは, p 進多重ポリログ関数のコールマン反復積分表示

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) = (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})-1}} \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})}} \right]_0^z \quad (i_t \in \{0, 1\})$$

に於いて $\omega_{i_1} = \omega_1, \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})}} = \omega_0$ であることに注意しましょう. また, 積分定数の不定性の問題を見れば, コールマン反復積分は局所的には “冪級数の原始関数を取る操作” に他なりません. 積分定数のずれは $\lim'_{z \rightarrow 1}$ での収束性には何ら関係しないので, $\lim'_{z \rightarrow 1}$ での収束性だけを問題にするのであれば $\mathbb{D}_1^-(1) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-1|_p < 1\}$ で 局所的に 積分を計算して確認すれば十分です. ポイントとなるのは $\mathbb{D}_1^-(1)$ 上では ω_0 が

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} = \{1 + (z-1)\}^{-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n dz$$

と ^{べき}収束冪級数に展開出来る ということです.

さて, $\text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(z) := (-1)^{\text{dep}(\mathbf{k})} \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})-1}} \omega_{i_{\text{wt}(\mathbf{k})}} \right]_0^z$ と定めると, これも p 進多重ポリログ関数ですから, 定理 1.22 の証明とまったく同様に [Fur04, Proposition 2.11] を用いて $\mathbb{D}_1^-(1)$ 上で $\text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(z) = \sum_{i=0}^m f_i(z-1) \{ \text{Log}_p^{(a)}(z-1) \}^i$ ($f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} z^j$ は $|z|_p < 1$ 上定

^{べき}義された収束冪級数) と表せます. したがって, $\mathbb{D}_1^-(1)$ 上の収束冪級数 $\phi(z), \psi(z)$ が定数のずれを除いて一致することを $\phi(z) \sim \psi(z)$ という記号で表すことにすると

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) = \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \text{Li}_{\mathbf{k}'}^{p,(a)}(t) \frac{dt}{t} \right]_0^z \sim \sum_{i=0}^m \int_{\text{Col}}^{(a)} \tilde{f}_i(z-1) \{ \text{Log}_p^{(a)}(z-1) \}^i dz \quad \cdots (\spadesuit)$$

^{*22} 以下の証明は, 安田正大さんのコメントを受けて付けたものです.

が成り立ちます。但し $\tilde{f}_i(z-1) := \{1+(z-1)\}^{-1} f_i(z-1)$ は $\mathbb{D}_1^-(1)$ で収束する^{べき}冪級数です。次に紹介する補題 1.27 を (♠) の (コールマン) 積分に適用すると

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) \sim (z-1) \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^i h_k^{(i)}(z-1) \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^k$$

($h_k^{(i)}(z)$ は $|z|_p < 1$ で収束する^{べき}冪級数)

となるため、補題 1.23 より $\lim'_{z \rightarrow 1} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z) \sim 0$ が従います。 $\square$

補題 1.27. 任意の $|z|_p < 1$ で収束する^{べき}冪級数 $f(z)$ と任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $|z|_p < 1$ で収束する冪級数 $h_0(z), h_1(z), \dots, h_m(z)$ が存在して

$$\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} f(z-1) \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m dz \sim (z-1) \sum_{k=0}^m h_k(z-1) \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^k$$

が成立する。但し記号 $\sim$ は両辺が定数のずれを除いて一致することを表す。

【証明】 m に関する数学的帰納法によって証明します。 $f(z-1)$ を $f(z-1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-1)^j$

と表すことにすると、先ず $m=0$ のときは

$$\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} f(z-1) dz \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^{j+1}}{j+1} = (z-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^j}{j+1}}_{=: h_0(z) \quad \text{とおく}}$$

より題意が成り立ちます。 $m > 0$ のときは、部分積分法^{*23} *integration by part* によって

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{Col}}^{(a)} f(z-1) \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m dz &= \int_{\mathrm{Col}}^{(a)} \frac{d}{dz} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^{j+1}}{j+1} \right) \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m dz \\ &= (z-1) \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^j}{j+1} \right)}_{=: h_m(z-1)} \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^m \\ &\quad - \underbrace{\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z-1)^{j+1}}{j+1} \right) \cdot m \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^{m-1} \frac{dz}{z-1}}_{\sim (z-1) \sum_{k=0}^{m-1} h_k(z-1) \{\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^k \quad (\text{帰納仮定})} \end{aligned}$$

より成り立ちます。 $\square$

^{*23} 部分積分は導分のライプニッツ則の“逆操作”に過ぎないため、コールマン積分でも問題なく成り立ちます。

注意 1.28. 定理 1.26 の証明は、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の $z = 1$ での漸近展開の定数項を完全に無視して展開されていますが、(定理 1.22 の証明からも分かるように) この無視してしまった定数項こそが p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ に他なりません。局所的な積分だけを考えていては積分定数の不定性^{やは} がまったく制御出来ないため、矢張り“局所的に項別積分を計算する”という安易な方針では p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ を計算することは出来ず、きちんと大域的なコールマン反復積分を計算する必要があります。[BBK10] などで展開されているように、コールマン積分は^{しばしば} 屢々 タイヒミュラー点 TEICHMÜLLER point (フロベニウス作用による固定点^{つな}) を繋ぐ積分を介して計算されますが、今の状況では考えたいタイヒミュラー点 $0, 1$ がともに $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に於いて除外されている点であるため、この方針もなかなか一筋縄にはいかなさそうです。というわけで、 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ は、定義は出来たものの具体的に数値計算するのは難しい対象です。現在では安田正大さんの方法 (詳細は [安田 SS18a] を参照してください) など、 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ を数値計算するアルゴリズムが^{いく} 幾つか知られています。

§ 1.2.5 KZ 型 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の基本性質

p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ は、「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ にも負けず劣らず多彩な性質を持つ非常に魅力的な研究対象です。その中でも、「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ との比較の観点から最初に抑えておくべき性質をまとめておきましょう。

- ★ $\mathbf{k}$ が 許容指数 *admissible index* ならば $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ は $(\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}))$ に収束する。
定理 1.26, [Fur04, Theorem 2.18]

「実 / 複素」の場合と対応する性質です。定理 1.26 では反復コールマン積分を (定数項を無視して) 直接計算し、補題 1.23 を用いて示しましたが、[Fur04, Theorem 2.18] のように p 進ドリinfeldt 結合子の関数等式 (注意 2.11 を参照) から証明することも出来ます。

- ★ $\mathbf{k}$ が 許容的でない ときは $\lim'_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ は 収束したりしなかったり する。
収束する場合は (代数的に定義された) シャッフル正規化 p 進多重ゼータ値^{*24} $\zeta_p^{\text{KZ}, \text{sh}}(\mathbf{k})$ に収束する。

「実 / 複素」の世界では起こらない非常にミステリアスな現象です。個別の指数 $\mathbf{k}$ に対しては、原理的には p 進 KZ 方程式の基本解の関数等式 (補題 2.10 (1) を参照) と明

^{*24} 原田遼太郎さんの記事で紹介されている $\zeta^{\text{sh}}(w_{\mathbf{k}})$ [原田 SS18, Proposition 2.3] と全く同様に定義されます。

示公式 (定理 2.4 を参照) を用いて収束するか否かを判定することが出来ます ([Fur04, Example 2.23] を参照). 端的に説明を試みるならば, 次に紹介する 「 p 進」世界ならではの現象である $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$ によって, $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ を関数等式で書き直したものの “発散項” ($\{\text{Log}_p^{(a)}(z-1)\}^j$ の項) が消えてしまう場合に, “生き残った項” がちょうど p 進多重ゼータ値のシャッフル正規化 $\zeta_p^{\text{KZ},\text{m}}(\mathbf{k})$ の定義式と一致している, ということです. ただ, どのような指数 $\mathbf{k}$ に対して $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が収束/発散するかについて, 何か法則性が隠れているのかどうかは分かっておりません. [Fur04, Remark 2.24] では「許容的でない指数 $\mathbf{k}$ に対する $\lim'_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ の収束/非収束の問題は, 数論的に非常に深い何らかの性質を反映しているのではないか」という問題が提起されています.

★ p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ は (定義から $\mathbb{C}_p$ の元だが) 実は $\mathbb{Q}_p$ の元
[Fur04, Theorem 2.25]

「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ が, 単に複素数というだけではなく 実数であるという事実と対応する性質です (尤も「実 / 複素」の世界では, $\zeta(\mathbf{k})$ の級数としての定義から実数であることは当たり前ですが). 証明は, コールマン積分が絶対ガロワ群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の作用に関して同変的に振る舞うこと (Amnon BESSER と Rob DE JEU の論文 [BdJ03, Remark 2.3] で指摘されていますが, まあ構成から “当たり前” な気もします) と $\omega_0 = \frac{dt}{t}$, $\omega_1 = \frac{dt}{t-1}$ がともに $\mathbb{Q}_p$ 有理的な微分形式であることを用いて, 任意の $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の元 σ の作用によって (ω_0, ω_1 が固定されるため) $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が不変であることを示すことでなされます. 但し, 容易に想像出来るようにこの議論が機能するのは 分枝 a が $\mathbb{Q}_p$ の元のときのみです, 実際は $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の値の分枝非依存性 (定理 1.22) も暗に重要な役割を演じています.

★ 自然数 k に対して $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$ 「 p 進」世界では “ $\pi^2 = 0$ ”
[Fur04, Example 2.19 (a)]

「実 / 複素」の世界での “ $\zeta(2k) = \frac{B_k}{2(2k)!} (2\pi)^{2k}$ ” に対応する性質ですが 「 p 進」世界では $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k)$ が 0 になってしまうということは特筆すべきでしょう*25. このことは, コール

*25 “正標数多重ゼータ値” (「関数体」の世界での多重ゼータ値) でも同様の現象が観察されます. ちなみに $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k)$ が 0 となってしまうのは “ p 進」世界のゼータの特色” というよりも “ $\mathbb{C}_p$ という体では π^2 に相当する 周期 *period* を捉え切れていない” ことの顕われであると思われるべきかもしれません. 実際, “ π^2 (或いは π) に相当する p 進的な周期も捉えられるような “大きな環” を構成しよう” という着想に基づいて導入されたのが, ジャン-マルク・フォンテーヌ Jean-Marc FONTAINE の p 進周期環 B_{dR} なのですから.

マンの公式 $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = (1 - p^{-2k})^{-1} L_p(2k, \omega_p^{1-2k})$ (第3節の定理 3.24 を参照) と「奇指標 χ に対しては久保田-レオポルトの p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ は恒等的に 0 である」という事実から従います (注意 3.13 も参照; 法 p タイヒミュラー指標 ω_p は奇指標なので, 当然 ω_p^{1-2k} も奇指標です). ただ, 「本来 L 関数の 負の整数点 での値を補間していた久保田-レオポルトの p 進 L 関数の 正の整数点 での値と p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k)$ を結び付けて (このこと自体は非常に面白い現象だと思いますので, 第3節で詳しく解説します), 久保田-レオポルトの p 進 L 関数が恒等的に 0 になるという特殊事情を用いて $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$ を証明する」というのは, どうしても回り^{くど}回り諄い印象が拭えませんが, 多少なりとも“オーバーキル”な印象も受けます. 実際, コールマンの公式や久保田-レオポルトの p 進 L 関数といった“飛び道具”を用いずとも, ドリーニュが「実 / 複素」の世界でドリinfeld 結合子の 2-サイクル関係式 と 3-サイクル関係式 を用いて $\zeta(2k) = \frac{B_k}{2(2k)!} (2\pi)^{2k}$ を導き出した手法の「 p 進」版を辿ることで, (p 進ドリinfeld 結合子に対する) 2-サイクル関係式 と 3-サイクル関係式 から $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$ を証明することも出来るようです.

★ p が奇素数のとき, 自然数 k に対して $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1) \neq 0$ であることは $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-2k)) = 0$ と同値 [Fur04, Example 2.19 (b)]

任意の代数体 F に対してエタール・コホモロジー群 $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ が消滅することは F と p に対して レオポルト予想 LEOPOLDT conjecture が成り立つ ことと同値です ([NSW08, Theorem 10.3.6, Theorem 2.6.9] を参照). 一般に任意の整数 $m \neq 1$ のとき $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))$ が消滅することがペーター・シュナイダー Peter SCHNEIDER により予想されており ([Sch79, p. 192], [KNQ96, Conjecture (C_m)] を参照), m 捻りレオポルト予想 k -twisted LEOPOLDT conjecture などと呼ばれています. この予想は $m \geq 2$ の場合は (任意の代数体で) 成り立ち^{*26}, F が総実代数体の場合は m が負の奇数のときにも予想が成り立つことが知られています ([Sch79, Sektion 5, Collar 7] を参照). つまり $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$ が自明とならないことは, 最も難しい $m = -2k$ のときの (ある $\mathbb{Q}$ に対する) m 捻りレオポルト予想 (C_{-2k}) と関係しており, $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$ が数論的 (或いは岩澤理論的) に非常に深い背景を持つ p 進数であろうことが示唆されます.

$\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$ の非消滅性と $(-2k)$ 捻りレオポルト予想の同値性は, ^{やは}矢張りコールマンの公式 $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1) = (1 - p^{-2k-1})^{-1} L_p(2k+1, \omega_p^{-2k})$ を用いて $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$ を久保田-レオポルトの p 進 L 関数の特殊値 $L_p(2k+1, \omega_p^{-2k})$ に置き替えた上で (定理 3.24 を参照), 有理数体の岩澤主予想 IWASAWA main conjecture [MW84, Wil90] を介して p 進 L 関数とエタール・コホモロジー群 $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-2k))$ を結び付けることに

*26 本質的にアルマン・ボレル Armand BOREL 等による $K_{2m-2}(\mathcal{O}_F)$ の有限性の結果から従います.

よって示されます*²⁷. ちなみに久保田-レオポルトの p 進 L 関数の連続性 (クンマー合同式の一般化; 雑談 3.14 も参照) により, $k \equiv -k' \pmod{p-1}$ なる自然数 k' に対して $L_p(2k+1, \omega^{-2k}) \equiv L_p(1-2k', \omega^{2k'}) = \zeta(1-2k') \pmod{p}$ が成り立ちます. したがって p が正則素数であるか $(p-1) \mid 2k$ が成り立つときは $\zeta(1-2k') \not\equiv 0 \pmod{p}$ となるため $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1) = L_p(2k+1, \omega^{-2k}) \neq 0$ が成り立ちます.

最後に, 「実 / 複素」の世界でも $\zeta(2k+1)$ が超越数か という非常に難しい未解決問題がありますが, 「 p 進」世界でもその種の “解析的性質” については何ら分かっていません. [Fur07, Remark 2.20 (ii)] では, $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k+1)$ の非自明性を ドリーニュ-スレ指標 $\chi_{p,2k+1}^{\text{Soul}}: \mathcal{X}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p(2k+1)$ DELIGNE-SOULÉ character [Sou81, Section 1] に関する性質として再解釈されることを引き合いに出して, 「この種の “ p 進超越数論的問題” は代数的整数論の問題に帰着出来るのではないか」という問を提出しています.

§2 p 進結合子と知られている結果・予想など

本節では, KZ 型 p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ のより詳しい性質を調べるために, 最初に $[p]$ 進多重ゼータ値と切っても切れない関係にある $[p]$ 進 KZ 方程式 と $[p]$ 進 ドリinfeld 結合子 Φ_{KZ}^p について簡単に解説します (第 2.1 節). その後, $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ とは異なる文脈で導入された ドリーニュの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ と ドリーニュ結合子 Φ_{De}^p の概念を (やや “天下り” 的に) 導入し, 古庄さんの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ との関係について論じます (第 2.2 節). 最後の第 2.3 節では, これまでに導入してきた p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ や $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ について, 知られている結果や予想をまとめました.

§2.1 p 進 KZ 方程式と p 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$

本小節では, 「実 / 複素」の世界での多重ゼータ値の理論で重要な役割を演じていた KZ 方程式 および ドリinfeld 結合子 の 「 p 進版」を考察します. コールマン積分論を “ブラックボックス” として認めてしまえば, 議論の流れは 「実 / 複素」の場合と完全に並行的です (はらだりょうたろう). 本報告集の原田遼太郎さんの記事 [原田 SS18] と比較しながら読むと理解が深まるかと思えます (原田さんの記事 [原田 SS18] で詳しく解説されている部分は随時説明を省略し, 原田さんの記事の該当箇所を引用することにします).

*²⁷ より詳しくは, 有理数体の p 分岐岩澤加群 $\mathcal{X}_p = \text{Gal}(M_{\{p\}}/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$ ($M_{\{p\}}$ は p の外不分岐な $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の最大副 p アーベル拡大) のコホモロジー解釈により, $m \neq 0$ のときに $\mathcal{X}_p(m-1)^{\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})}$ が $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))$ のポントリャーギン双対と同型になります. 岩澤主予想は p 分岐岩澤加群 (の特性イデアル) と p 進 L 関数を結び付けるものなので, この同型と岩澤主予想を介して $L_p(2k+1, \omega^{-2k})$ の値とエタール・コホモロジー群 $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-2k))$ が結び付くのです. 詳細は [KNQ98, Theorem 3.1] を参照してください.

記号の規約

以下, $X(\mathbb{C}_p)$ 上の局所解析的関数^{*28} *locally analytic function* のなす環を $\mathcal{C}_{X(\mathbb{C}_p)}^{\text{la}}$ で表します. また, 各 $a \in \mathbb{C}_p$ に対し, $X(\mathbb{C}_p)$ 上の分枝 a のコールマン関数のなす環を $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ とします. 一般に可換環 R に対して, 2つの不定元 e_0, e_1 に関する R 係数非可換冪級数環を $R\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ で表し, 不定元 e_0, e_1 の空語を含む語全体および空語を含まない語全体をそれぞれ $\{e_0, e_1\}^\times, \{e_0, e_1\}^{\times \times}$ で表します.

定義 2.1 (p 進形式的 KZ 方程式, [Fur04, Definition 3.2]). 非可換冪級数値^{べき}の局所解析的関数 $G(e_0, e_1)(z) \in \mathcal{C}_{X(\mathbb{C}_p)}^{\text{la}}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ に関する微分方程式

$$\frac{d}{dz}G(e_0, e_1)(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)G(e_0, e_1)(z) \quad \cdots (\text{KZ})_p$$

を (形式的) p 進クニズニーク–ザモロドチコフ方程式 (p 進 KZ 方程式) *the (formal) p -adic KNIZHNIK–ZAMOLODCHIKOV equation* と呼ぶ.

勿論 $(\text{KZ})_p$ は, 原田さんの記事で紹介された KZ 方程式 [原田 SS18, Definition 3.1] の「 p 進」類似となっています. 原田さんの記事でも解説されていたように, KZ 方程式やドリソフェルト結合子の理論の中核を担っていたのが KZ 方程式の基本解の存在と一意性でした. 定理 2.2 は「 p 進」世界でもまったく同様の主張が成り立つことを主張するもので, この定理のお陰で「実 / 複素」の世界での KZ 方程式やドリソフェルト結合子の理論を, 形式的には「ほぼそのままの形で」「 p 進」世界に移植することが可能となるのです.

定理 2.2 (基本解の存在と一意性, [Fur04, Theorem 3.3, Proposition 3.7]). $a \in \mathbb{C}_p$ を固定する毎に $(\text{KZ})_p$ の解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z), G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z) \in \mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ で

$$G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} \quad (z \rightarrow 0), \quad G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z) \approx (1-z)^{e_1} \quad (z \rightarrow 1)$$

なる漸近挙動を満たすものが それぞれ唯一つ 存在する. これらを p 進 KZ 方程式の基本解 *fundamental solutions of p -adic KZ equation* と呼ぶ.

ここで z^{e_0} や $(1-z)^{e_1}$ は “形式的な級数展開”

$$\begin{aligned} z^{e_0} &= e^{e_0 \text{Log}_p^{(a)} z} := 1 + \frac{\text{Log}_p^{(a)} z}{1!} e_0 + \frac{(\text{Log}_p^{(a)} z)^2}{2!} e_0^2 + \cdots + \frac{(\text{Log}_p^{(a)} z)^n}{n!} e_0^n + \cdots \\ (1-z)^{e_1} &= e^{e_1 \text{Log}_p^{(a)}(1-z)} := 1 + \frac{\text{Log}_p^{(a)}(1-z)}{1!} e_1 + \cdots + \frac{\{\text{Log}_p^{(a)}(1-z)\}^n}{n!} e_1^n + \cdots \end{aligned}$$

^{*28} ^{ここ} 此处では $z = 0, 1, \infty$ で対数的極を持つことは特に要請していないため $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ とは違う記号にしましたが, あまり気にする必要はありません (結局 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ 係数の解しか考えないので).

で定まる $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))\langle e_0, e_1 \rangle$ の元で、記号 “ $\approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$ ” や “ $\approx (1-z)^{e_1} (z \rightarrow 1)$ ” の定義は [原田 SS18, Lemma 3.3] とまったく同様です. p 進対数関数を用いた定義であるため z^{e_0} や $(1-z)^{e_1}$ も p 進対数関数の分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存している ことには注意する必要がありますが、分枝 a のコールマン関数 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ の中で議論している以上誤解の恐れはないと思われるので a への依存性は記号の中に含めていません.

【定理 2.2 の証明の概略】 同様なので $G_0^{(a)}(e_0, e_1)$ についてのみ議論します.

[一意性について] $(\text{KZ})_p$ の解であるような $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))\langle e_0, e_1 \rangle$ の元で $\approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$ となるものが $G_0(e_0, e_1)(z)$, $H_0(e_0, e_1)(z)$ の 2 つ存在すると仮定すると、ライプニッツ則から $\boxed{\frac{d}{dz} \left[\{H_0(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0(e_0, e_1)(z) \right] = 0}$ が成り立ちます ([原田 SS18, Lemma 3.3] の証明とまったく同じ計算です). したがって $C(e_0, e_1) := \{H_0(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0(e_0, e_1)(z)$ は “定冪級数” (つまり $\mathbb{C}_p\langle e_0, e_1 \rangle$ の元) となりますが、 $G_0(e_0, e_1)(z)$, $H_0(e_0, e_1)(z)$ の何れも $z \rightarrow 0$ で同じ漸近挙動 $\approx z^{e_0}$ を示すことから $C(e_0, e_1)$ が 1 となることが確認出来ます ([原田 SS18, Lemma 3.3] の証明も参考にしてください).

[存在について] $(\text{KZ})_p$ の解 $G_0(e_0, e_1)(z)$ で $G_0(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$ を満たすものが存在するとして $G_0(e_0, e_1)(z) = P(e_0, e_1)(z)z^{e_0}$ によって $P(e_0, e_1)(z)$ を定めると、漸近挙動 $G_0(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} (z \rightarrow 0)$ の定義から $P(e_0, e_1)(z)$ は $P(e_0, e_1)(0) = 1$ を満たす $z = 0$ のまわりのリジッド解析的関数となります. そこで $P(e_0, e_1)(z) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} P_w(z)w$

とおいて $G(e_0, e_1)(z) = \left\{ 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} P_w(z)w \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} z\}^m}{m!} e_0^m \right\}$ を $(\text{KZ})_p$ の両辺に代入すると、 $P_w(z)$ に関する微分方程式の族

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z} P_{w'e_0}(z) - \frac{1}{z} P_{e_0w'}(z) \quad (w = e_0w'e_0, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z} P_{w'e_1}(z) \quad (w = e_0w'e_1, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z-1} P_{w'e_0}(z) - \frac{1}{z} P_{e_1w'}(z) \quad (w = e_1w'e_0, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z-1} P_{w'e_1}(z) \quad (w = e_1w'e_1, w' \in \{e_0, e_1\}^{\times})$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = 0 \quad (w = e_0)$$

$$\frac{d}{dz} P_w(z) = \frac{1}{z-1} \quad (w = e_1)$$

を得ます。したがって 分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ を固定する毎に 各 $P_w^{(a)}(z)$ を $\omega_0 = \frac{dz}{z}$ と $\omega_1 = \frac{dz}{z-1}$ の反復コールマン積分 によって (語 w の長さの短いものから順に) 構成することが出来るので、これらを代入し戻すことで所望の $(KZ)_p$ の解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ を得ます*29。 $\square$

注意 2.3. 定理 2.2 の主張のうち、特に $(KZ)_p$ の基本解の 一意性 は、後程定義する p 進ドリinfeld結合子の諸性質を導き出す際に中心的な役割を演じるわけですが、その証明が「実 / 複素」の世界での議論とまったく同じ手順になっている 点は注目に値するでしょう。と言うのも、「 p 進」世界でテイラー展開可能な関数 (つまり 局所解析的関数) f の (外) 微分 df が $X(\mathbb{C}_p)$ 上で恒等的に 0 であったとしても、そのことから f が局所定数関数 *locally constant function* であることしか帰結されないため、 $\mathcal{C}_{X(\mathbb{C}_p)}^{\text{la}} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ で解を考えている限り定理 2.2 の証明中の 二重下線部 の議論が破綻してしまう からです。それにも拘らずこの証明が機能しているのは 解を $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ に制限して 考えているから に他ならず、基本解の一意性の主張に於いてもコールマン積分論*30は重要な立ち回りを演じている のです。

定理 2.2 では、 $(KZ)_p$ の基本解の抽象的な存在定理を紹介しましたが、基本解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ を具体的に計算してみると $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ は p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p, (a)}(z)$ の “母関数” となっている ことが観察されます。基本解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ の明示式を紹介するために、ホフマン代数 (或いは e_0 と e_1 についての語) と指数の関係について整理しておきましょう。

ホフマン代数についての記号の規約

$\mathfrak{H}_{\text{III}} = (\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle, \text{III})$ を (シャッフル積に関する) ホフマン代数とするとき ([金子 SS18, 第 3 節 (10 ページ)] を参照), その部分代数 $\mathfrak{H}_{\text{III}} \supset \mathfrak{H}_{\text{III}}^1 \supset \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$ を $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}_{\text{III}} e_1$, $\mathfrak{H}_{\text{III}}^0 := \mathbb{Q} + e_0 \mathfrak{H}_{\text{III}} e_1$ で定めます。また, 射影 $\pi^i: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}}^i$ ($i = 0, 1$) を

$$\pi^1: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}} / \mathfrak{H}_{\text{III}} e_0 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}_{\text{III}}^1, \quad \pi^0: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}} / \langle e_1 \mathfrak{H}_{\text{III}} + \mathfrak{H}_{\text{III}} e_0 \rangle_{\mathfrak{H}_{\text{III}}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$$

で定めましょう。端的に言えば, e_0, e_1 の語の形式的な $\mathbb{Q}$ 線型和に対し, π^1 は「 e^0 で終わる語の項」を取り除く操作を表し, π^0 は「 e_1 で始まる語の項」と「 e_0 で終わる語の項」を取り除く操作を表しています。このとき, (許容的とは限らない) 指

*29 もちろん 分枝 a の コールマン積分を用いて構成しているため、最終的に得られる関数 $P_w^{(a)}(z)$ や $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ が分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存してしまうわけです。

*30 より具体的には「コールマン関数環 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ が 一致の定理を満たすように 構成されている」こと (命題 1.19 を参照)。

数と「 e_1 で終わる語」(つまり $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1$ の空語でない^{*31}モニック単項式)の間には

$$(k_1, k_2, \dots, k_r) \longleftrightarrow \underbrace{e_0^{k_r-1} e_1 \dots e_0^{k_2-1} e_1 e_0^{k_1-1} e_1}_{\text{べき}} \dots \text{(IW)}$$

という 1 対 1 対応があります (“*Index-Word correspondence*” の頭文字を取って (IW) と表記することにします; 指数の順序と語の**べき**順序が 逆転している ことに注意してください). この対応の下で, 指数 $\mathbf{k}$ に対応する語を $w_{\mathbf{k}}$, 語 w に対応する指数を $\mathbf{k}_w$ で表します. また, この 1 対 1 対応に基づき, $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1$ の (空語でない) モニック単項式 w に対して, w に含まれる e_0, e_1 の**総数**を $\text{wt}(w)$ と書いて w の **重さ** *weight* と呼び, w に含まれる e_1 の**総数**を $\text{dep}(w)$ と書いて w の **深さ** と呼ぶことにしましょう.

以下, $\mathfrak{H}_{\text{III}}^1$ の元 $h = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} h_w w$ に対して $\text{Li}_{\mathbf{k}_h}^{p,(a)}(z) := \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} h_w \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(z)$ と定めておきます (便宜的に $\text{Li}_{\emptyset}^{p,(a)}(z) = 1$ とおきます).

定理 2.4 (基本解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ の明示公式, [Fur04, Theorem 3.15]). $(\text{KZ})_p$ の基本解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times \times} J_{p,w}^{(a)}(z)w$ の係数 $J_{p,w}^{(a)}(z)$ は以下の通り;

(ケース 1) $w \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1$ (e_1 で終わる語) のとき $J_{p,w}^{(a)}(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(z)$

(ケース 2) $w = w' e_0^t$ ($t \geq 1, w' \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1$) のとき

$$J_{p,w}^{(a)}(z) = (-1)^{\text{dep}(w)} \sum_{0 \leq i \leq t} (-1)^i \text{Li}_{\mathbf{k}_{\pi^{-1}(w' \sqcup e_0^i)}}^{p,(a)}(z) \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} z\}^{t-i}}{(t-i)!}$$

(ケース 3) $w = e_0^t$ ($t \geq 0$) のとき $J_{p,w}^{(a)}(z) = \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} z\}^t}{t!}$

此処では、講演のときと同様に定理 2.4 の主張の中でも、特に $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ が p 進ポリログ関数の “母関数” であることを示唆する (ケース 1) の証明だけを簡単に紹介することになります. 残りのケースは発散項である $\text{Log}_p^{(a)} z$ が絡む項を丁寧に調べる必要があり、多少技巧的な証明となりますので、原論文 [Fur04, Theorem 3.15] の証明 (または [原田 SS18, Theorem 5.4] の証明) を参照してください.

【定理 2.4 (ケース 1) の証明の概略】 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times \times} J_{p,w}^{(a)}(z)w$ を $(\text{KZ})_p$ の両辺に代入して $w \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^1$ (“ e_1 で終わる語”) の係数を比較すると, w の “先頭の文字” に応

^{*31} 空語 $\emptyset$ は空指数 $\emptyset$ と対応すると定めます.

じて微分方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{dz} J_{p,e_0 w'}^{(a)}(z) = \frac{1}{z} J_{p,w'}^{(a)}(z) & (w = e_0 w', w' \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^1) \\ \frac{1}{dz} J_{p,e_1 w'}^{(a)}(z) = \frac{1}{z-1} J_{p,w'}^{(a)}(z) & (w = e_1 w', w' \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}^1) \\ \frac{1}{dz} J_{p,e_1}^{(a)}(z) = \frac{1}{z-1} & (w = e_1) \end{cases}$$

を得ますが, これは ($\frac{1}{z-1}$ の符号を除けば) p 進多重ポリログ関数を定義する微分方程式 に他なりません (命題 1.15 と比べてみましょう). したがって $w = e_0^{k_r-1} e_1 e_0^{k_{r-1}-1} e_1 \dots e_1 e_0^{k_1-1} e_1$ に対して, 命題 1.16 とまったく同様にして

$$\begin{aligned} J_{p,w}^{(a)}(z) &= \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \underbrace{\omega_1 \omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \omega_1 \dots \omega_1 \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_{r-1}-1} \omega_1 \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z \\ &= (-1)^r \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \underbrace{(-\omega_1) \omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \omega_1 \dots \underbrace{(-\omega_1) \omega_0 \dots \omega_0}_{k_{r-1}-1} \underbrace{(-\omega_1) \omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z \\ &= (-1)^{\text{dep}(w)} \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(z) \quad (\text{命題 1.17 (Li)}_{\text{Int}}^{p,(a)} \text{ より}) \end{aligned}$$

が成り立ちます (語の深さの定義から $\text{dep}(w) = r$ であることに注意しましょう). $\square$

注意 2.5. 「実 / 複素」の世界でも「 p 進」世界でも, 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ は“ $[p]$ 進 多重ポリログ関数の $z = 1$ での特殊値 $\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ ” として表されるのでした. そんな $[p]$ 進 多重ゼータ値の〈母体〉とも呼べる $[p]$ 進 多重ポリログ関数が KZ 方程式の基本解 $G_0(e_0, e_1)(z)$ の係数に現われる のですから, 安易に考えれば“極限 $\lim_{z \rightarrow 1} G_0(e_0, e_1)(z)$ ” の係数に $[p]$ 進 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ が現われる はずです; つまり “ $\lim_{z \rightarrow 1} G_0(e_0, e_1)(z)$ ” は $[p]$ 進 多重ゼータ値の 母関数 となることが期待されます. これが $[p]$ 進 ドリinfeld 結合子 ^{おおよ} の凡そのイメージです. とは言え $z = 1$ は $[p]$ 進 多重ポリログ関数や KZ 方程式の基本解 $G_0(e_0, e_1)(z)$ の定義域から外れていますので, 実際には $z = 1$ での漸近挙動を指定しながら $z = 1$ への極限を取る, という繊細な操作が必要となります. この操作をやりやすくするために, $z = 1$ での漸近挙動を指定した基本解 $G_1(e_0, e_1)(z)$ ^{あわ} も併せて考えているのです.

定義 2.6 (p 進ドリinfeld 結合子, [Fur04, Definition 3.12]). 非可換形式的冪級数環 $\mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の元 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) := \{G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ を p 進ドリinfeld 結合子 *the p -adic DRINFEL'D associator* と呼ぶ.

注意 2.7. 先ず p 進ドリinfeld結合子は 変数 z に依存しない定冪級数 (つまり $\mathbb{C}_p\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の元) となります. このことは, ライプニッツ則を用いた形式的計算によって $\frac{d}{dz} \left[\{G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \right] = 0$ となることから, コールマン関数に対する一致の定理 (命題 1.19) を用いて正当化されます. 詳細は [Fur04, Remark 3.9], [原田 SS18, Lemma 3.7] を参照してください. また, (基本解 $G_i^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ はそれぞれコールマン関数の分枝 a に依存するにも拘わらず) p 進ドリinfeld結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ は コールマン関数の分枝 a の取り方には 依存しません. というのも, 既に説明したようにコールマン関数は, (発散項として p 進対数関数 $\text{Log}_p^{(a)} z$ が現われる) $z = 0, 1, \infty$ を中心とした半径 1 の “開円盤” $\mathbb{D}_0^-(1), \mathbb{D}_1^-(1), \mathbb{D}_\infty^-(1)$ 以外の点のまわりでは a に依存しない収束冪級数展開を持ちます. 一方で $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ が z に依らないことは既に確認しましたので, 特に $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ を “ $\{G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)\}^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ の $z_0 \in \mathbb{C}_p \setminus \{\mathbb{D}_0^-(1) \cup \mathbb{D}_1^-(1) \cup \mathbb{D}_\infty^-(1)\}$ での値である” と考えると, これは a の取り方に 依らない値 となりますので, 結局 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ も コールマン関数の分枝 a に依らないことが従います (詳細は [Fur04, Theorem 3.10] を参照してください). 最後に, このあと紹介する明示公式 (定理 2.8) により $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ の係数がすべて $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ (の適当な線型和) で表されることが分かりますので, $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が $\mathbb{Q}_p$ の元であったことと併せて $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ が実際には $\mathbb{Q}_p\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の元であることも従います.

このようにして構成した p 進ドリinfeld結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ は, 期待通り p 進多重ゼータ値 (正確にはシャッフル正規化された p 進多重ゼータ値) の母関数となっています;

定理 2.8 (p 進ドリinfeld結合子の明示公式, [Fur04, Theorem 3.30]). p 進ドリinfeld結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ は シャッフル正規化された p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{w}}(\mathbf{k})$ の母関数となっている. より詳しくは, $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ を $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times \times}} I_p(w) w$

と展開したときの係数 $I_p(w)$ は以下のように計算される;

$$I_p(w) = \begin{cases} (-1)^{\text{dep}(w)} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w) & (w \in \mathfrak{H}_{\text{m}}^0 \text{ のとき}), \\ (-1)^{\text{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq i \leq s \\ 0 \leq j \leq t}} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_{\pi^0(e_1^i m e_1^{s-i} w' e_0^{t-j} m e_0^j)}) & \begin{pmatrix} w = e_1^s w' e_0^t, s, t \geq 0, \\ w' \in \mathfrak{H}_{\text{m}}^0 \text{ のとき} \\ ※ w' \text{ は空語でも良い} \end{pmatrix} \end{cases}$$

=: $\zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{w}}(\mathbf{k}_w)$ と定義

実際に p 進ドリinfeld結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ を計算する際には次の命題が用いられます.

命題 2.9 ([Fur04, Lemma 3.27]). 等式 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) = \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon)$ が成り立つ.

命題 2.9 の証明に用いられる主要な道具は、基本解 G_1 を G_0 で表示する関数等式 (補題 2.10 の (1)) と、極限操作に関する簡単な補題 (補題 2.10 の (2)) です.

補題 2.10. $(\text{KZ})_p$ の基本解 $G_0(e_0, e_1)(z)$, $G_1(e_0, e_1)(z)$ について以下が成立する.

- (1) $G_1^{(a)}(\underline{e_0}, \underline{e_1})(1 - z) = G_0^{(a)}(\underline{e_1}, \underline{e_0})(z)$ が成り立つ. [Fur04, Proposition 3.8]
(2) $\lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_0} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) = 1$ が成り立つ^{*32}. [Fur04, Lemma 3.26]

【補題 2.10 の証明】

- (1) $\tilde{z} := 1 - z$ と変数変換すると, $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(\tilde{z})$ は変数 $\tilde{z}$ に関する KZ 方程式 $(\text{KZ})_p^\sim$ の解となります. したがって $\frac{d}{d\tilde{z}} = \frac{dz}{d\tilde{z}} \frac{d}{dz} = -\frac{d}{dz}$ に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{z}} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(\tilde{z}) &= \left(\frac{e_0}{\tilde{z}} + \frac{e_1}{\tilde{z} - 1} \right) G_1^{(a)}(e_0, e_1)(\tilde{z}) \quad \cdots (\text{KZ})_p^\sim \\ \therefore -\frac{d}{dz} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z) &= \left(\frac{e_0}{1 - z} + \frac{e_1}{-z} \right) G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z) \end{aligned}$$

より, $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z)$ は $(\text{KZ})_p^{\leftrightarrow} : \frac{d}{dz} G(e_0, e_1)(z) = \left(\frac{e_1}{z} + \frac{e_0}{z - 1} \right) G(e_0, e_1)(z)$ という形の p 進 KZ 方程式の解であることが従います (右辺の係数の e_0 と e_1 が入れ替わっている点に注意しましょう). さらに $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ の漸近挙動に関する特徴付けから $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon) \approx \epsilon^{e_1}$ ($\epsilon \rightarrow 0$) が成り立ちますので, p 進 KZ 方程式の基本解の一意性 (定理 2.2 を参照) により, $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - z)$ は $(\text{KZ})_p^{\leftrightarrow}$ の基本解 $G_0^{(a)}(e_1, e_0)(z)$ と一致しなければなりません. 以上で題意が示されました^{*33}.

- (2) $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0}$ ($z \rightarrow 0$) より $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)z^{-e_0} = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\} \times \times} z \tilde{P}_{0,w}^{(a)}(z)w$

と表すことが出来ます ($\tilde{P}_{0,w}^{(a)}$ は $z = 0$ の近傍での収束べき冪級数です). したがって

$$\begin{aligned} \epsilon^{-e_0} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) &= \exp(-e_0 \text{Log}_p^{(a)} \epsilon) \{ G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) \epsilon^{-e_0} \} \exp(e_0 \text{Log}_p^{(a)} \epsilon) \\ &= \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n}{n!} e_0^n \right\} \left\{ 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\} \times \times} \epsilon \tilde{P}_{0,w}^{(a)}(\epsilon) w \right\} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n}{n!} e_0^n \right\} \end{aligned}$$

^{*32} ϵ^{-e_0} が左から掛かっていることに注意. 実際, $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon) \epsilon^{-e_0}$ は “ $\approx \epsilon^{e_0}$ ($\epsilon \rightarrow 0$)” の定義から $\epsilon \rightarrow 0$ で 1 に収束しますが, $\epsilon^{-e_0} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(\epsilon)$ は (証明からも分かるように) $\lim'_{\epsilon \rightarrow 0}$ でない収束しません.

^{*33} KZ 方程式の基本解の性質を調べる際に用いられる 基本解の一意性に基づく議論 の典型例です.

となりますが、^{ここ} 此処で右辺を展開して空でない語の係数を調べると、すべて $(\epsilon \rightarrow 0 \text{ で収束する項}) \times \epsilon^m \{\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n$ ($m \geq 1, n \geq 0$) という形の項の線型和となっていることが確認出来ます。したがって補題 2.23 によって、これらの項は $\lim'_{\epsilon \rightarrow 0}$ で 0 に収束するため、題意が従います (もちろん右辺の定数項は 1 なので)。□

【命題 2.9 の証明】 p 進ドリinfeld 結合子の定義式 (定義 2.6) および補題 2.10 より

$$\begin{aligned} \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon) &\stackrel{\text{定義 2.6}}{=} \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(1 - \epsilon) \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \\ &\stackrel{\text{補題 2.10 (1)}}{=} \left\{ \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(e_1, e_0)(\epsilon) \right\} \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \\ &\stackrel{\text{補題 2.10 (2)}}{=} 1 \cdot \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \end{aligned}$$

が成り立ちます。□

【定理 2.8 の証明の概略】 命題 2.9 の式の各項 $\epsilon^{-e_1}, G_0^{(a)}(e_1, e_0)(1 - \epsilon), \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ をそれぞれ $\mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の元として展開すると

$$\lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-\text{Log}_p^{(a)} \epsilon\}^n}{n!} e_1^n \right\} \left\{ 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\} \times \times} J_{p,w}^{(a)}(1 - \epsilon) w \right\} = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\} \times \times} I_p(w) w$$

となります。^{そこ} 其処で先ず $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$ の係数を比較してみますと、 w は e_0 で始まる語ですので、左辺の 二重下線部 (ϵ^{-e_1} の部分) の高次の項は w の係数に寄与し得ません。したがって

$$I_p(w) = \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} J_{p,w}^{(a)}(1 - \epsilon) \stackrel{\text{定理 2.4}}{=} (-1)^{\text{dep}(w)} \lim'_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}}} \text{Li}_{\mathbf{k}_w}^{p,(a)}(1 - \epsilon)$$

となりますが、右辺の極限值は p 進多重ゼータ値 $(-1)^{\text{dep}(w)} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w)$ の定義そのものなので、 $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$ の係数について題意が成り立つことが示されました。 $w \notin \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$ なる語の係数については、定理 2.4 の証明と同様の巧妙な手法によって計算されます。原論文 [Fur04, Theorem 3.15] の証明 ^{ある} (或いは [原田 SS18, 定理 Theorem 5.10]) を参照してください。□

注意 2.11. 対応 (IW) によって語 $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$ と対応する指数 $\mathbf{k}_w$ は許容的指数 *admissible index* であることが簡単に確認出来ますので、上記の計算は指数 $\mathbf{k}$ が 許容的 であるときに (KZ 型の) p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が $(\lim'_{z \rightarrow 1}$ の極限で) 収束することの別証明にもなっています。実際 [Fur04, Theorem 2.18] の証明では、上記の議論によって許容指数に対する $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の収束性が説明されています。

本小節の最後に、 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ がシャッフル積公式 *shuffle product formula* を満たすことを紹介しておきましょう。

定理 2.12 (KZ 型 p 進多重ゼータ値のシャッフル積公式, [Fur04, Corollary 3.46]). KZ 型 p 進多重ゼータ値 (およびそのシャッフル正規化) はシャッフル積公式を満たす; 即ち $\zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k} \boxplus \mathbf{k}') = \zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k}) \zeta_p^{\text{KZ}, \mathfrak{m}}(\mathbf{k}')$ が成り立つ.

【証明の概略】 原田遼太郎さんの記事 [原田 SS18, Remark 4.3] でも解説されているように, p 進多重ゼータ値 (のシャッフル正規化) がシャッフル積公式を満たすことと p 進ドリinfeld 結合子が 群元的元 *group-like element* であること, 即ち $\mathbb{C}_p$ 代数の射

$$\Delta: \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle; e_i \mapsto e_i \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} e_i \quad (i = 0, 1)$$

に対して $\Delta(\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)) = \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \hat{\otimes} \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ が成り立つことは同値ですので, 後者を示します. そこで $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} (\mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle)$ での KZ 方程式

$$\frac{d}{dz} \hat{G}(z) = \left(\frac{\Delta e_0}{z} + \frac{\Delta e_1}{z-1} \right) \hat{G}(z)$$

を考えると, $\Delta(G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z))$ と $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ は $\approx z^{e_0} \hat{\otimes} z^{e_0}$ ($z \rightarrow 0$) を満たす解であることが形式的な計算で確認出来るので (詳細は [Fur04, Proposition 3.43] の証明を参照), KZ 方程式の基本解の一意性^{*34}から両者は一致します. まったく同様に $\Delta(G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))$ と $G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ も ($\approx (1-z)^{e_1} \hat{\otimes} (1-z)^{e_1}$ ($z \rightarrow 1$)) を満たす解なので一致することが分かります. したがって

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)) &\stackrel{\text{定義 2.6}}{=} \Delta(G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} \Delta(G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)) \\ &= (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} \hat{\otimes} G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z)^{-1} \cdot (G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)) \\ &= (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \hat{\otimes} (G_1^{(a)}(e_0, e_1)(z))^{-1} G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z) \\ &= \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \hat{\otimes} \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \end{aligned}$$

が成り立ちます. □

§ 2.2 ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ とドリーニュの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$

本小節では, 古庄英和さんによって定義された p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ とは別の流儀で導入された ドリーニュの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ を, p 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_p^{\text{KZ}}(e_0, e_1)$ を用いたやや“天下り”的な方法で定義し, 古庄英和さんの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ との関係性を記述します. 本小節ではドリーニュによる p 進多重ゼータ値の理論の詳細には踏み込みませんので, 興味のある方は古庄さんの論文 [Fur07] や ÜnVER の論文 [Ünv13] をご参照ください (数論幾何学やモチーフの哲学に関する予備知識が不可欠な論文ですが).

^{*34} 係数環が複雑になりますが, 定理 2.2 とまったく同様の形式的な議論で正当化出来ます.

定義 2.13 (ドリーニュ結合子, [Fur07, Theorem 2.8], [De02]). 文字 e_0, e_1 に関する非可換冪級数 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1) \in \mathbb{Q}_p\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ を, 等式

$$\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) = \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1) \cdot \Phi_{\text{KZ}}^p\left(\frac{e_0}{p}, \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)^{-1} \frac{e_1}{p} \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)\right) \cdots (\text{KZD})_p$$

によって定め, ドリーニュ結合子 DELIGNE associator と呼ぶ.

ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ は, その名が示す通り (退化) 結合子 (degenerate) associator となっていることが証明されています (第 2.3 節も参照してください). そこで, p 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ の “許容的な語” $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$ の係数に (古庄英和さんの意味での) p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w)$ が現れていたことを真似て ドリーニュの多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ を次のように定義しましょう.

定義 2.14 (ドリーニュの p 進多重ゼータ値, [Fur07, Definition 2.7]). ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ を $\mathbb{Q}_p\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の元として展開した際の “許容的な語” $w \in \mathfrak{H}_{\text{in}}^0$ の係数を $(-1)^{\text{dep}(w)} \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}_w)$ と定める. 許容指数 $\mathbf{k}$ に対し, この手順で定まる p 進数 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ を ドリーニュの p 進多重ゼータ値 DELIGNE’s p -adic multiple zeta values と呼ぶ.

例 2.15 ([Fur07, Example 2.10]). 等式 $(\text{KZD})_p$ の両辺を展開して, 「深さが小さい語」(つまり, 含まれる e_1 の数が少ない語) から順に係数を比較することにより, 2 種の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ と $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ の関係が記述出来ます*35. 例えば深さが 1 のときは

$$\zeta_p^{\text{De}}(k) = \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \zeta_p^{\text{KZ}}(k) \quad (k \geq 2)$$

となることが簡単に確認出来ます. 深さが 2 のときは若干計算が繁雑になりますが, $k_2 \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} & \zeta_p^{\text{De}}(k_1, k_2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1, k_2) - \underbrace{(1 - \delta_{k_1,1}) \left(\frac{1}{p^{k_2}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_2)}_{\text{}} \\ & \quad - \underbrace{\sum_{i=0}^{k_1-2} (-1)^i \left(\frac{1}{p^{k_1-i}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \binom{k_2-1+i}{k_2-1} \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1-i) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_2+i)}_{\text{}} \\ & \quad - (-1)^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-2} \left(\frac{1}{p^{k_2-j}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right) \binom{k_1-1+j}{k_1-1} \zeta_p^{\text{KZ}}(k_1+j) \zeta_p^{\text{KZ}}(k_2-j) \end{aligned}$$

となることが直接計算によって確認出来ます。但し $\delta_{k_1,1} = \begin{cases} 1 & (k_1 = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (k_1 \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$ はク

ロネッカーのデルタ記号です; つまり上式の 下線部 は $k_1 = 1$ のときは 0 と見做しています。もちろん深さ 1 での関係式 $\zeta_p^{\text{KZ}}(k) = \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^{-1} \zeta_p^{\text{De}}(k)$ を右辺に代入して整理することで, KZ 型の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(k_1, k_2)$ を, 深さが 2 以下のドリーニュの p 進多重ゼータ値たち (の積) の $\mathbb{Q}$ 線型和で表すことも出来ます。

一般に深さが r のときには, 対応 (IW) によって許容指数 $\mathbf{k}$ に対応する語 $w_{\mathbf{k}}$ での等式 $(\text{KZD})_p$ の係数を比較すると

$$(-1)^r \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) = (-1)^r \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) + (-1)^r \frac{1}{p^{\text{wt}(\mathbf{k})}} \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) \\ + (\text{深さが } r \text{ 未満の } \zeta_p^{\text{KZ}} \text{ と } \zeta_p^{\text{De}} \text{ の積たちの } \mathbb{Q} \text{ 線型和})$$

という形になることは容易に確認出来ます。したがって, 指数 $\mathbf{k}$ の深さ r に関する帰納法によって $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}), \zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ のいずれも, 他方の p 進多重ゼータ値の (積の) $\mathbb{Q}$ 線型和で表せることが従います。その意味で [Fur07] では, $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ と $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ を “等しくはないが等価” “*not the same but equivalent*” と表現しています。但し, 非可換冪級数 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ の逆元 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)^{-1}$ の計算も容易ではありませんし, $(\text{KZD})_p$ の右辺を展開して $w_{\mathbf{k}}$ の係数を計算する際に “語 $w_{\mathbf{k}}$ の分割の仕方” に纏わる複雑な組合せ論的問題が生じるため, 深さ r が大きいときに $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ や $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ の一方を, 他方の p 進多重ゼータ値の (積の) $\mathbb{Q}$ 線型和で表す明示式を書き下すことは容易なことではありません。

雑談 2.16. 本小節では $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ を等式 $(\text{KZD})_p$ を用いて “天下り” 式に “定義” しましたが, もちろんドリーニュがあるとき突然 $(\text{KZD})_p$ という複雑怪奇な等式を思いついて, 徐に $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ を定義したわけではありません。それどころか, ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ の導入は寧ろ古庄英和さんによる p 進ドリinfeldt 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ の定義に先んじており (2002 年のアリゾナ・ウィンタースクールでドリーニュが出題した課題 [De02] の中で既に $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ の構成のアイデアが本質的に紹介されています), ドリーニュ自身も多大な貢献を果たした $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の 代数的基本群の理論 [De89] を背景としています。たとえば, $\mathbb{Q}$ 上の射影的代数多様体 $X_{/\mathbb{Q}}$ の (ℓ) 進エタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_{\ell})$ へのフロベニウス作用の特性多項式は, 本質的に X のハッセ–ヴェイユ・ゼータ関数の p 因子となっており, 数論的に極めて重要な不変量であることは良く知られ

35 $\Phi_^p(e_0, 0) = \Phi_*^p(0, e_1) = 0$, 即ち「 $\Phi_*^p(e_0, e_1)$ の e_0^s, e_1^t ($s, t \geq 1$) の項の係数はすべて 0」であることに気を付けましょう (* = KZ または De とします)。

ています。ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ は、非常に大雑把に言えばこの良く知られた構成の基本群版 (“非可換版”) を辿って得られるものです; より具体的には、本来 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ は「 $\vec{01} = 1_0 = \mathbf{0}$ と $\vec{10} = -1_1 = \mathbf{1}$ を繋ぐ “標準的なドラム道” *canonical de Rham path* $d_{\vec{01}, \vec{10}}$ への (クリスタリン) フロベニウスの作用を記述する冪級数」として定義されるもので、“物理的” な動機から導入された KZ 方程式をルーツとする $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ とはまったくと言って良いほど異なる背景を持つ対象なのです。定義 2.13 の式 $(\text{KZD})_p$ は、本当は出自を異にする 2 つの結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ と $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ の関係を記述する “非自明な等式” として捉えられるべきものです。ドリーニュ結合子 $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ やドリーニュの p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ についての詳細は古庄さんの論文 [Fur07, Definition 2.7] や Sinan ÜNVER の論文 [Ünv13] を参照してください。

雑談 2.17. 2 つの結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$, $\Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)$ を繋ぐ等式 $(\text{KZD})_p$ は非常に複雑な形をしていますが、実は “退化結合子の棲み家” である次数付きグロタンディーク-タイヒミュラー群 $\text{GRT}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \ltimes \text{GRT}_1(\mathbb{Q}_p)$ の積構造

$$\begin{aligned} (\alpha_2, g_2(e_0, e_1)) \circ (\alpha_1, g_1(e_0, e_1)) &= \left(\alpha_1 \alpha_2, g_1 \left(g_2(e_0, e_1) \frac{e_0}{\alpha_2} g_2(e_0, e_1)^{-1}, \frac{e_1}{\alpha_2} \right) \cdot g_2(e_0, e_1) \right) \\ &= \left(\alpha_1 \alpha_2, g_2(e_0, e_1) \cdot g_1 \left(\frac{e_0}{\alpha_2}, g_2(e_0, e_1)^{-1} \frac{e_1}{\alpha_2} g_2(e_0, e_1) \right) \right) \end{aligned}$$

と密接に関係しています; 実際この積 (の第 2 式) を用いると、等式 $(\text{KZD})_p$ は

$$\boxed{(p, \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)) = (p, \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1)) \circ (1, \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1))} \quad \cdots (\text{KZD})'_p$$

の第 2 成分を取り出したものと解釈出来ます。(次数付き) グロタンディーク-タイヒミュラー群 $\text{GT}/\mathbb{Q}$, $\text{GRT}/\mathbb{Q}$ については [古庄 16] で分かりやすく解説されていますので、是非参考になさってください ($\text{GRT}/\mathbb{Q}$ の積構造は定理 1.33(2), 系 2.14 で紹介されています)。

§ 2.3 知られている結果と予想

本小節では p 進多重ゼータ値の概説の締め括りとして、 p 進多重ゼータ値について知られている結果や予想などを、特に「実 / 複素」の世界の理論や「有限多重ゼータ値」の理論、或いは「正標数多重ゼータ値」(「関数体」の世界の多重ゼータ値) の理論との比較の観点を重視しつつ纏めます。

- ★ p 進 KZ 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ は $\mathbb{Q}_p \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の群元的元 *group-like element* であり、さらに $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1) \in \exp[\mathbb{L}_{\mathbb{C}_p}^\wedge, \mathbb{L}_{\mathbb{C}_p}^\wedge]$ が成り立つ ($\mathbb{L}_{\mathbb{C}_p}^\wedge$ はこの後登場しないので、定義は割愛します)。[Fur04, Proposition 3.43, Theorem 3.45]

この後紹介する 結合子関係式 *associator relation* の一部ではありますが, これらは KZ 方程式の基本解の一意性 (定理 2.2 参照) から容易に導き出せます. その事実を強調するため, 敢えて結合子関係式と分けて紹介しました. 尚, $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ が群元的元であることから シャッフル積関係式 *shuffle product formula* が従うことも既に注意した通りです (定理 2.12 を参照). ただ, 「実 / 複素」世界でのシャッフル積の “幾何的” 解釈である $\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)$ の積分表示の積分領域 $\Delta^{\text{wt}(\mathbf{k}_1)} \times \Delta^{\text{wt}(\mathbf{k}_2)}$ (但し $\Delta^k := \{(t_i)_{i=1}^k \mid 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1\}$) を標準単体 Δ^j の和に細分する」という考え方 (金子先生 なお の原稿 [金子 SS18, Section 3 の前半] も参照してください) が「 p 進」世界では最早通用しないため^{*36}, 「 p 進」世界での p 進多重ゼータ値のシャッフル積関係式は 結合子が群元的元であることの帰結 として導き出さざるを得ない, という点は注意しておくとも良いかもしれません.

★ 双対性 *duality*: $w \in \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$ に対して $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_{\tau(w)}) = \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}_w)$ が成り立つ. ただ 但し $\tau: \mathfrak{H}_{\text{III}}^0 \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{III}}^0$ は $e_i \mapsto e_{1-i}$ ($i = 0, 1$) で定義される反自己同型.

田中立志 [Ta04, 田中 07], 古庄英和

多重ゼータ値の双対性がドリinfeld 結合子の 2-サイクル関係式と同値であることは良く知られています. したがって (KZ 型) p 進多重ゼータ値の双対性は, 今や $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ の結合子関係式の帰結に過ぎませんが, まだ KZ 型 p 進多重ゼータ値が定義されて間もない時期に, 田中立志さんが修士論文で $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{K})$ に対して双対性が成り立つことを一早く指摘されていました. 田中さんの証明方法は 形式的結合子 *formal associator* と呼ばれる ホフマン代数係数の非可換冪級数 $\hat{\Phi}(e_0, e_1) \in \mathfrak{H}_{\text{III}} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ を用いる方法です. 形式的結合子とは, 大雑把に言えば “実値写像” $\zeta^{\text{III}}: \mathfrak{H}_{\text{III}} \rightarrow \mathbb{R}; w \mapsto \zeta^{\text{III}}(\mathbf{k}_w)$ によってドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}(e_0, e_1)$ が得られるような, 言わば “普遍的なドリinfeld 結合子” とでも呼ぶべき対象です ([田中 07, Section 3] を参照). 一方で形式的結合子の構成と p 進ドリinfeld 結合子の明示公式 (定理 2.8) を比較すると, $\hat{\Phi}(e_0, e_1)$ の “ p 進値写像” $\zeta_p^{\text{KZ, III}}: w \mapsto \zeta_p^{\text{KZ, III}}(\mathbf{k}_w)$ での像が p 進ドリinfeld 結合子 $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ と一致することは直ちに分かります. 田中さんは, 形式的結合子の段階で “2-サイクル関係式” に相当する関係式が成立することを直接確認することで, $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ も 2-サイクル関係式を満たすことを示しています. 一方で KZ 方程式の基本解の一意性の議論を巧みに用いた古庄英和さんの別証明も知られています (こちらも形式的で非常に分かりやすい証明だと思います; [田中 07, p.p. 173–174] も参照してください).

^{*36} コールマン反復積分はあくまで “コールマン積分を逐次的に実行する” 操作を表しているだけであり, 「実 / 複素」の世界のように 多重積分の逐次積分表示 としての解釈は与えられていなかったことに注意してください (「 p 進」世界での多重積分の困難性については複シャッフル関係式を紹介する際にも注意します).

- ★ ドリーニュ結合子 $(0, \Phi_{\text{De}}^p(e_0, e_1))$ の結合子関係式
Sinan ÜNVER [Ünv13, Section 7]

p 進ドリinfeld結合子 $(0, \Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1))$ の結合子関係式
古庄英和 [Fur07, Proposition 3.1]

「 p 進」世界での結合子関係式は、最初に Sinan ÜNVER によってドリーニュ結合子に対して証明されました。古庄英和さんは、最初は ÜNVER とは独立に（恐らく「実 / 複素」の世界でのドリinfeld結合子の結合子関係式の証明の「 p 進」類似を直接辿ることで） $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ の結合子関係式を証明することを計画していたようですが、[Fur07] では結局等式 $(\text{KZD})_p$ を用いて ÜNVER の結果に帰着することで $\Phi_{\text{KZ}}^p(e_0, e_1)$ の結合子関係式を導いています。尚、ドリーニュ結合子は形式的にはコールマン積分論を用いずに定義することが出来^{でき}ますが、ÜNVER の結果 [Ünv13] でも 5-サイクル関係式の証明でコールマン積分が用いられている点は注意しておきます。

- ★ 複シャッフル関係式 *double shuffle relation* Amnon BESSER–古庄英和 [BF06]
正規化複シャッフル関係式 *regularised double shuffle relation*
古庄英和–Amir JAFARI [FJ07]

(正規化された) 調和積関係式と (正規化された) シャッフル積関係式を結びつけることで簡単に得られる、「実 / 複素」の世界では良く知られた関係式ですが、「 p 進」の世界でもまったく同様の関係式が成り立ちます。——でも、ちょっと待ってください。「シャッフル関係式」の方はともかく^{*37}、「調和積関係式 *harmonic product formula, stuffle product formula*」は多重ゼータ値の 級数表示 を掛け合わせたものに対して“和の取り方を変える”ことで得られるものでした。しかるに「 p 進」世界では多重ゼータ値の“級数表示”は必ず発散してしまう (!!) のですから (命題 1.1 を参照)，“複シャッフル関係式”が成立するかどうかを議論する以前に、抑々「調和積関係式」などというものが「 p 進」世界で成立し得るのか という課題と真正面から対峙せねばなりません。

この「 p 進」世界ならではの困難を克服し、調和積関係式および複シャッフル関係式が「 p 進」世界でも成り立つことを示したのが Amnon BESSER と古庄英和の共同研究 [BF06] です。彼等は、(KZ 型) p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ が元々 p 進^{べき}冪級数を由来に持つ p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^p(z)$ の“ $z \rightarrow 1$ での極限”として与えられていたことに着目し、 p 進多

^{*37} ^{ここ} 此処ではシャッフル関係式については簡単に流してしまっていますが、シャッフル積関係式の成立も「 p 進」世界では（“結合子を経由しなければ得られない”という意味で）それほど明らかな関係式とは言えない、という点は改めて確認しておいた方が良いでしょう。

重ポリログ関数の段階で

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^p(z_1) \cdot \mathrm{Li}_{\mathbf{l}}^p(z_2) = \left(\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} \right) \left(\sum_{0 < m_1 < \dots < m_s} \frac{z_2^{m_s}}{m_1^{l_1} m_2^{l_2} \dots m_s^{l_s}} \right)$$

を計算して「調和積関係式」を導き出し，“解析接続”した上で，その“(z₁, z₂) → (1, 1) の極限”として KZ 型 p 進多重ゼータ値の「調和積関係式」を取り出そうと考えました。直観的にも非常に分かり易い戦略ですが，これを実行するためには

◎ 2 変数関数 “Li_k^p(z₁)Li_l^p(z₂)” の “解析接続” が必要

⇨ コールマン積分論の 多変数関数版 を構築しなければならない (!)

◎ 極限 “(z₁, z₂) → (1, 1)” の取り方に制限を付けないと発散してしまう (第 1.2.4 節 で説明した lim' の導入の過程を思い出しましょう)

⇨ 高次元 (多変数) の設定でどうやって “極限の取り方” に制限を課すか?

という 2 つの困難を克服する必要があります。前者の困難については，実は [BF06] の研究よりも以前に Amnon BESSER が [Bes02] に於いて，コールマン積分の “淡中解釈” に基づいたコールマン積分論の “多変数化” に成功しており，[BF06] でも BESSER の理論が縦横無尽に用いられています。後者の困難の克服こそが [BF06] の主たる目的の 1 つであり，彼等はドリーニュによる接基点 *tangential base points* の理論を “高次元化” し，極限 (z₁, z₂) → (1, 1) の取り方を “高次元化” した接基点を用いて指定することで，KZ 型 p 進多重ゼータ値の「調和積公式」を導き出すことに見事に成功しました (したがって，既に正当化されているシャッフル積公式と組み合わせることで，KZ 型 p 進多重ゼータ値に対する複シャッフル関係式が正当化されたこととなります)。古庄英和と Amir JAFARI の共同研究 [FJ07] は，[BF06] の結果を正規化された p 進多重ゼータ値に拡張したものです。

なお，[BF06, FJ07] が出版された後に，古庄英和さんによる「結合子関係式から正規化複シャッフル関係式が導かれる」という有名な結果 [Fur11, Theorem 0.2] が発表されました^{*38}。[Fur11] で採用されている戦略は非常に明快で，最初に結合子関係式 (より詳しくは五角形関係式) を用いてバー構成 *bar construction*^{*39} の段階で調和積関係式を証明しています。バー構成は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で定義されている対象ですので，その “(実数への) 実現” をとることで調和積関係式や (正規化) 複シャッフル関係式が従う，という絡繰りです。[Fur11] では “実数への実現” しか扱われていませんが，“ p 進実現” を考えると KZ 型の p 進多重ゼータ値の調和積関係式や (正規化) 複シャッフル関係式が導かれることは，バー構成とコールマン反復積分による $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\mathbf{k})$ の構成からほぼ明らかです。したがって [Fur11]

^{*38} 以降の説明は，山本修司さんからの質問コメント，指摘を受けて加筆しました。

^{*39} 非常に大雑把なイメージとしては，反復積分が満たす関係式 (例えばシャッフル積公式など) を，反復積分する前の “有理微分形式” の段階で扱えるように定式化したものがバー複体 (バー構成) の理論と言えるでしょう。詳細は，例えば [GF, Section 3.4] などを参照してください。

を用いれば, [BF06, FJ07] で展開された p 進積分論の難しい議論 (コールマン積分論や接基点の理論の高次元化) を回避して (正規化) 複シャッフル関係式を導出することが出来ます. ただ, 「 p 進」世界の中だけで調和積関係式や複シャッフル関係式がどのようにして導き出されるかを明らかにした [BF06, FJ07] は, 非常に直接的な証明で分かり易く, 現在に於いても大変意義のある結果だと思えます. また, [Fur11] でも多重ポリログ関数の調和積関係式をバー構成の文脈に持ち込むこと ([Fur11, (3.1), (3.2)] 式を参照) が非常に大きなステップになっていますので, 取り分け「 p 進」世界の (正規化) 複シャッフル関係式に於いて 多重ポリログ関数が重要な役割を演じている ことに何ら変わりはありません.

★ 次元予想: 数列 $\{d_k^p\}_{k=0}^\infty$ を漸化式 $d_{k+3}^p = d_{k+1}^p + d_k^p$, $d_0^p = 1$, $d_1^p = d_2^p = 0$ で定める (母関数は $\sum_{k=0}^\infty d_k^p t^k = \frac{1-t^2}{1-t^2-t^3}$). このとき, 重さが k の許容指数に関する p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ たち^{*40}で張られる $\mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Q}$ 線型部分空間 $\mathcal{Z}_k^p$ の次元は d_k^p だろう; 即ち $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^p \stackrel{?}{=} d_k^p$ が成り立つだろう.

古庄英和–山下剛 [Ya10, Conjecture 2]

「実 / 複素」世界の多重ゼータ値に対するザギエの次元予想 (金子先生^{ここ}の原稿 [金子 SS18, 予想 2.2] を参照) に対応する「 p 進」世界での次元予想です. 此处で定義されている次元の数列 $\{d_k^p\}_{k=0}^\infty$ は, ザギエ予想に登場する数列 $\{d_k^{\mathbb{R}}\}_{k=0}^\infty$ と $d_k^{\mathbb{R}} = d_{k+3}^p$ という関係にあります. これは, 「 p 進」世界特有の関係式 $\zeta_p^{\text{KZ}}(2) = \zeta_p^{\text{De}}(2) = 0$ により $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_2^p = 0$ になってしまう分, 漸化式の「初期条件」がザギエ予想のものとずれてしまうからです. 尚, 「実 / 複素」の世界では混合テイトモチーフの理論を用いることで次元予想の“上界”の不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}} \leq d_k^{\mathbb{R}}$ が示されていましたが (寺杣–DELIGNE–GONCHAROV の定理; 詳細は萩原啓さんの記事 [萩原 SS18, 定理 1.1] を参照してください), 「 p 進」世界でも対応する不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^p \leq d_k^p$ が山下剛さんによって証明されています [Ya10, Theorem 1.3]. 山下さんの証明方針は, Deligne–Goncharov の証明の「 p 進」版を辿るもので, 混合テイトモチーフの「 p 進実現」を考察する際に高度な p 進ホッジ理論 (“開多様体の p 進ホッジ理論”) が用いられています. 尚, 山下さんは Deligne–Goncharov に倣って “ p 進多重 L 値” の概念も定義した上で, 次元予想や上界の不等式の結果を “ p 進多重 L 値” にまで拡張しています ([Ya10, Theorem 1.4] を参照).

最後に, 「 p 進」世界の次元予想の数列 $\{d_k^p\}_{k=0}^\infty$ が, 小野雅隆さんの原稿 [小野 SS18] の予想 1.2.1 で紹介されている 有限多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z}_k^A$ の次元予想の数列 $\{d_k^A\}_{k=0}^\infty$ と

^{*40} 空間 $\mathcal{Z}_k^p$ の定義の際に, $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ の代わりに $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ を用いても構いません (p 進多重ゼータ値の“等価性”より; 例 2.15 を参照してください).

まったく同じもの となっていることに注意を喚起しておきましょう^{*41}。この“奇妙な符合”からも、「 p 進多重ゼータ値」の世界と「有限多重ゼータ値」の世界の間に何やら“密接な関係”があることが窺い知れるのですから。

- ★ 「実 / 複素」の世界の多重ゼータ値との関係: 重さが k の許容指数に関する (通常の) 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ たちで張られる $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 線型部分空間 $\mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}}$ に対し, 対応 $\phi_p = (\phi_{p,k})_k: \mathcal{Z}^{\mathbb{R}} := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{Z}^p := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k^p; \zeta(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k})$ (または $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$) は well-defined な $\mathbb{Q}$ 代数の全射準同型写像となるだろう^{*42}。また ϕ_p の核は $\zeta(2)$ で生成される部分 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}^{\mathbb{R}}\zeta(2)$ だろう (特に ϕ_p の核は素数 p に依存しない?)。 — *falklore?* 古庄英和の予想?

この予想は “ $\zeta_p(2k) = 0$ ” という「 p 進」世界特有の関係式を除いて「実 / 複素」世界の多重ゼータ値と「 p 進」世界の多重ゼータ値は まったく同じ振舞いをする こと、或いはより突っ込んだ表現をするならば「実 / 複素」の世界と「 p 進」の世界というまったく位相が異なる世界に棲む多重ゼータ値が“本質的に等価なもの”であることを主張する非常に大胆不敵な予想です。一応〈モチーフの哲学〉など、この予想を支える哲学的な根拠(?)は幾つかあるのですが、決定的な証拠があるわけでもなく、まだまだ解決にはほど遠い大予想です。ちなみに「実 / 複素」世界の多重ゼータ値と「有限多重ゼータ値」に対しても、この予想と非常に良く似た形で、核が $\mathcal{Z}^{\mathbb{R}}\zeta(2)$ であるような well-defined な $\mathbb{Q}$ 代数の全射準同型 $\rho: \mathcal{Z}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{Z}^A; \zeta_S^*(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_A(\mathbf{k})$ が存在することが予想されています (これが有名な金子-ザギエ予想 KANEKO-ZAGIER conjecture です; 詳しくは本報告集の小野さん [小野 SS18, 予想 2.1.3] および関さん [関 SS18] の解説記事を参照してください)。

この予想は“標数 0”の世界では解決の糸口すら見つかりませんが、“標数 p ”の多重ゼータ値 *positive characteristic multiple zeta values* の世界では、驚くべきことに対応する予想のかなりの部分が成り立つことが、最近 ^{チャンチュエー}張 介玉さんと ^{みしば よしのり}三柴善範さんの共同研究の中で示されました。非常に紛らわしいですが、“標数 p ”の多重ゼータ値とは (金子昌信さんと Don ZAGIER さんにより導入された)「有限多重ゼータ値」とはまったく別のもので、言うなれば「関数体」の世界の多重ゼータ値です。以下、 A を q 元体 $\mathbb{F}_q$ 上の多項式環 $\mathbb{F}_q[\theta]$ とし、 K をその商体とします。 K の“無限素点”に付随する付値 $|\cdot|_{\infty}$ (つまり $|\theta|_{\infty} = q$ を満たす付値) での K の完備化を $K_{\infty} = \mathbb{F}_q((1/\theta))$ とし、 K_{∞} の代数的閉包 $\overline{K}$ の $(1/\theta)$ 進完備化を $\mathbb{C}_{\infty}$ とします。関数体と代数体の間に強い類似性が見られること

^{*41} 小野さんの原稿では $\mathcal{Z}_k^A$ の予想次元を表す記号 d_k^A は定義されておらず、 $d_{k-3}^{\mathbb{R}}$ が用いられています。

^{*42} つまり「実多重ゼータ値の任意の $\mathbb{Q}$ 代数関係式に対し、対応する p 進多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 代数関係式が成立するだろう」ということ。

は古典的に良く知られていますが、リーマンゼータ値の「関数体類似」として、1935 年には Leonard CARLITZ [Car35] が カーリッツゼータ値 $\zeta_{A,\infty}(k) \in K_\infty$ の概念を導入してその性質を研究していました。カーリッツゼータ値の多重版として、2004 年頃に Dinesh S. THAKUR [Tha04, Section 5.10] が 正標数多重ゼータ値 $\zeta_{A,\infty}(\mathbf{k}) \in K_\infty$ の概念を導入しています*43。これを ∞ 進多重ゼータ値 と呼ぶことにしましょう。張–三柴は、 K の有限素点 v (A のモニック既約多項式に付随する付値のこと) に対して v 進多重ゼータ値 $\zeta_{A,v}(\mathbf{k}) \in K_v$ [ChaM17, Definition 6.1.1] を “ v 進カーリッツ星付多重ポリログ関数” を用いて定義し*44 (K_v は K の v に関する完備化です)、次の結果を証明しました。

定理 2.18 ([ChaM17, Corollary 6.4.3]). K_v の代数的閉包の v 進完備化 $\mathbb{C}_v$ への $\overline{K}$ の埋め込みを固定し、 ∞ 進多重ゼータ値 $\zeta_{A,\infty}(\mathbf{k})$ および v 進多重ゼータ値 $\zeta_{A,v}(\mathbf{k})$ の張る $\overline{K}$ 線型空間をそれぞれ $\overline{\mathcal{Z}}_\infty, \overline{\mathcal{Z}}_v$ とすると、 $\overline{\mathcal{Z}}_\infty \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}_v$; $\zeta_{A,\infty}(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_{A,v}(\mathbf{k})$ は well-defined な全射 $\overline{K}$ 線型写像*45である。

証明の核心を担うのは アンダーソン–タークルの $\langle t$ -モチーフ $\rangle$ の理論 *t-motives introduced by Greg W. ANDERSON and Dinesh S. THAKUR* という「関数体」の世界特有の $\langle$ モチーフ $\rangle$ 理論です。そのためもちろん彼等の証明を“標数 0”の世界に直接逆輸入することは出来ませんが、「関数体」の世界の多重ゼータ値^{なお}に対しても或る種の $\langle$ モチーフ $\rangle$ が主要な役割を演じていることは注目に値するでしょう。尚、既に指摘したように、彼等は t -モチーフの理論に加えて カーリッツ対数関数の「多重版」および「 v 進版」を主要な道具立てとして積極的に用いており、 $[p]$ 進多重ゼータ値の理論に於いて $[p]$ 進多重ポリログ関数が重要な役割を演じていたことと符合している点も見逃せません。

*43 金子–ザギエの有限多重ゼータ値 $\zeta_A(\mathbf{k})$ と記号まで紛らわしいですが、[ChaM17] の記法に倣って “ A ” の記号をローマン体で表記することにし、さらに下付き添字 ∞, v などをつけることで区別してみました。

*44 タークルも [Tha04, Section 5.10] で v 進多重ゼータ値を定義していますが、(両者に何らかの関係があることは期待されているものの) まったく同じものではないそうです。

*45 (三柴義範さんからのコメント) 張の直和性定理 [Cha14, Theorem 2.2.1. (1)] $\overline{\mathcal{Z}}_\infty \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \overline{\mathcal{Z}}_{\infty,k}$ ($\overline{\mathcal{Z}}_{\infty,k}$ は重さ k の ∞ 進多重ゼータ値の張る $\overline{K}$ 線型空間) により $\overline{\mathcal{Z}}_\infty$ には次数付き代数の構造が入りますが、 $\overline{\mathcal{Z}}_v$ に次数付き代数の構造が入るかどうかはまだ明らかではなく、特にこの全射が $\overline{K}$ 代数の準同型 であるかは分かっていません。また、この写像の核も完全には決定されていません ([ChaM17, Remark 6.4.4] も参照)。

★ p 進整性: 指数 $\mathbf{k}$ に対し $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbf{k})]}$ が成り立つ. 特に $p > \text{wt}(\mathbf{k})$ ならば $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}_p$ が従う. 但し $(p\mathbb{Z}_p)^{[\text{wt}(\mathbf{k})]}$ は $\left\{ \frac{p^j}{j!} \mid j \geq \text{wt}(\mathbf{k}) \right\}$ が生成する $\mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Z}_p$ 部分加群 (“PD^{*46}イデアル”と呼ばれています).

赤木和真–広瀬稔–安田正大 [AHY, 赤木 17]

Andre CHATZISTAMATIOU [Chat17, Corollary 5.5]

金子昌信–Don ZAGIER の有限多重ゼータ値への応用: $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ の法 p 還元と $\zeta_A(\mathbf{k})$ との関係, 有限多重ゼータ値の空間の次元の上界評価 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^A \leq d_k^A$ への応用
赤木和真–広瀬稔–安田正大 [AHY, 赤木 17] + David JAROSSAY [Jar15, (1.4.7)]

p 進多重ゼータ値に関する最近の進展の中でも最もホットな話題の 1 つです. p 進多重ゼータ値の “ p 進整性” に関しては, 当初から古庄英和さんが問題にされていました (古庄さんは $\zeta_p^{\text{KZ}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}_p$ と予想していたようです; [古庄 03, p.42 ⑫] などを参照) が, 近年 Andre CHATZISTAMATIOU^{*47} の研究と赤木和真, 広瀬稔, 安田正大の 3 氏による共同研究に於いて独立に同じ形の “ p 進整性” の結果が得られています.

[AHY] では p 進多重ゼータ値の p 進整性に留まらず, $\zeta_p^{\text{De}}(\mathbf{k})$ の “法 p 還元” と有限多重ゼータ値 $\zeta_A(\mathbf{k})$ を結び付け, p 進多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z}_k^p$ の次元評価についての山下剛さんの結果を用いることで有限多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z}_k^A$ の次元を評価することを試みています. その途中で “予想” として登場する, 或る種の調和和と (ドリーニュの) p 進多重ゼータ値の間の関係式 [Jar15, (1.4.7)] が, 近年 David JAROSSAY によって証明されたため, 両者の結果を合わせることで現在では $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^A$ の次元評価も得られているのです.

本項目のより詳しい内容に関しては, [AHY] の執筆者の 1 人である安田正大さんの記事 [安田 SS18b] で解説されています. この結果が生み出された背景や経緯についても詳しく書かれた, 1 つの大理論が生み出されるまでのドキュメントとしての側面も持つ大変興味深い記事です, 興味を持たれた方は, 本稿に引き続き是非安田さんの解説記事もお楽しみください. また, JAROSSAY の公式を応用した “一般化金子–ザギエ予想” の壮大な構想については, 関真一郎さんが矢張り本報告集の解説記事 [関 SS18] の中で熱く語っていらっしやると思いますので, そちらもお見逃しなく.

^{*46} フランス語 “puissances divisées” (divided power) にちなんだ名称. p の冪乗 p^n を $n!$ で割ったものを divided power と呼びます. “分母を持つ p 冪” 程度の意味です.

^{*47} 綴り字 “ch” はギリシア・アルファベットの χ (カイ, キー) のローマ字表記であるため, 発音を無理矢理カタカナ表記するのであれば “カチスタマチュ” といった感じになるようです.

§ 3 p 進 [多重] L 関数とコールマン型の公式

本節では p 進 [多重] ゼータ値の話題から少し離れて、 p 進 [多重] L 関数 p -adic [multiple] L -function について論じます。歴史的には (1 変数の) p 進 L 関数 (久保田–レオポルトの p 進 L 関数) $L_p(s, \chi)$ は、 p 進 [多重] ポリログ関数の “ $z = 1$ での値” として導入される (古庄さんの) p 進 [多重] ゼータ値よりもずっと以前に構成されており、既に 岩澤理論 IWASAWA theory など整数論の諸分野に多大な影響を与える存在でした。 p 進 L 関数の理論は、これまで概観してきた p 進 [多重] ゼータ値の理論とはかなり 趣 が異なるものの、それでいて大変魅力的なものとなっています。「ディリクレ L 関数の 負の整数点 での値を補間する “唯一の関数”」としての p 進 L 関数の “定義” (または特徴付け) の段階で、 p 進 [多重] ゼータ値の纏う雰囲気とは 些 か異なる印象を持たれる方が多いでしょう。しかしながら コールマンの公式 (定理 3.24) によって、「実 / 複素」の世界と同様に p 進 L 関数の 正の整数点 での値 が (古庄英和さんの意味での) p 進ゼータ値と結びつく (!) というのですから驚くより他にありません。本節ではそんな p 進 [多重] L 関数の織り成す魅惑の世界を存分に味わっていただければと思います。第 3.0 節では (1 変数の) p 進 L 関数の 補間性質 interpolation property による特徴付けを紹介します。第 3.1 節では、 p 進 [多重] L 関数を構成するために必要な p 進測度論 p -adic measure theory を概観し、第 3.2 節では古典的な 1 変数の場合の理論を若干詳しく考察します。第 3.3 節では、 p 進多重 L 関数に関する古庄英和、小森靖、松本耕二、津村博文による最近の共同研究 [FKMT17b] の概要を簡単に紹介します。

§ 3.0 「 p 進」世界で “ゼータ関数” をどう “定義” するか?

多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を特殊値として持つ オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 $\zeta(\mathbf{s})$ multiple zeta function of EULER–ZAGIER type は、複素 変数 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ に対して

$$\zeta(\mathbf{s}) := \zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s}) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \quad \dots \text{(EZ)}$$

で定義される (多変数) 複素関数で、 $\mathbb{C}^r$ の適切な領域 $\mathcal{D}_r$ で絶対収束し、積分表示を用いて $\mathbb{C}^r$ 全体へと有理型に解析接続されるのでした (詳細は小野塚友一さんの解説記事 [小野塚 SS18, Proposition 2.1] を参照; 本稿の第 3.3.1 でも触れています)。斯様な関数 $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ の 「 p 進」世界での対応物を考察するにはどうすれば良いのでしょうか? ——単に変数を $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_p^r$ や $\mathbf{s} \in \mathbb{C}_p^r$ のような 「 p 進」変数に取り替えるだけでは巧くいきそうにありません (命題 1.1 でも見たように、「 p 進」世界では $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$ であっても “ $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{k})$ ” は発散してしまうのですから)。一方で、今回は “指数” $\mathbf{s}$ を動かしたい のですから、指数が $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$ で固定された関数である 多重ポリ

ログ関数 $\text{Li}_k(z)$ を用いる、という手段も封じられています*48。斯くして「 p 進」世界で“ゼータ関数”の対応物を構成するのは、見た目よりもずっと難しい問題 となっていることが実感出来るかと思います。

ところで $r = 1$ のとき (つまり $s = (s)$ のとき) は、オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZ}}(s)$ は リーマンゼータ関数 RIEMANN zeta function $\zeta(s)$ に他なりません、その負の整数点での特殊値 は 関–ベルヌーイ数 SEKI–BERNOULLI number B_k による明示的な表示

示 $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$ ($k \geq 1$) を持っていたのでした。但し、^{ただ} 此処では関–ベルヌーイ数は母関数 $\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$ によって定義されるものを採用しています。特にリーマンゼータ関数の負の整数点での値は 有理数 となりますので、「実 / 複素」の世界でも「 p 進」の世界でも意味のある値となっています。

「 p 進」世界で“ゼータ関数”を“定義”する (^{ある} 或いは“特徴付ける”) 際に活躍するのが、(1 変数) 複素関数論でも非常に重要な役割を演じていた 一致の定理 identity theorem です (円盤上のリジッド解析的関数については定義 A.8 を参照してください)。

命題 3.1 (p 進一致の定理). 中心 a , 半径 $r > 0$ の円盤 $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ 上定義されたリジッド解析的関数 $f(z), g(z)$ を考える. 円盤 $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ に集積点を持つ点列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して $f(z_k) = g(z_k)$ ($\forall k \geq 1$) が成り立つならば, $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ 上のリジッド解析的関数として $f = g$ が成り立つ (複号同順).

【証明】 証明中に現れる複号は同順であるとします。以下では f と g を $f-g$ と 0 に取り替えて、円盤 $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ に集積点を持つ点列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して $f(z_k) = 0$ ($\forall k \geq 1$) を満たすような $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ 上のリジッド解析的関数が零関数であることを示します。また、適当に $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列に取り替えることで、 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \alpha \in \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ かつ $z_k \neq \alpha$ ($\forall k \geq 1$) が成り立つと仮定しても一般性を失いません。このとき f が零関数でないと仮定して矛盾を導きましょう。先ず $\alpha \in \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ であったことから、命題 A.11 によって f は点 $z = \alpha$ のまわりで ($\mathbb{D}_a^{\pm}(r) = \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ で収束する) テイラー展開

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n(z-\alpha)^n + c_{n+1}(z-\alpha)^{n+1} + c_{n+2}(z-\alpha)^{n+2} + \dots \quad (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_n \neq 0) \\ &= (z-\alpha)^n \{c_n + c_{n+1}(z-\alpha) + c_{n+2}(z-\alpha)^2 + \dots\} =: (z-\alpha)^n h(z) \end{aligned}$$

を持ちます (上記のような n の存在は、 f が零関数ではないという仮定によるものです)。此処

*48 ^{そもそも} 抑々 多重ポリログ関数 $\text{Li}_k(z)$ の「 p 進版」はあくまで p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_k^p(z)$ であって、“ p 進多重ゼータ関数”とは到底呼べませんよね。

で $h(z) = (z - \alpha)^{-n} f(z)$ は $h(\alpha) = c_n \neq 0$ を満たす $\mathbb{D}_\alpha^\pm(r)$ 上の解析的関数となります*49. 一方で $f(z_k) = 0$ かつ $z_k \neq \alpha$ より $h(z_k) = 0$ ($\forall k \geq 1$) が成り立ちます. したがって解析的関数の連続性から $h(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(z_k) = 0$ が従うはずですが, これは $h(\alpha) \neq 0$ であったことと矛盾します. したがって背理法により $f(z)$ が零関数であることが示されました. $\square$

注意 3.2. p 進ワイエルシュトラスの準備定理 *p-adic WEIERSTRASS preparation theorem* により, $\mathbb{Z}_p$ 係数の形式的冪級数 $f(T)$ は p の或る非負整数冪 p^μ と多項式 $g_f(T)$ で $g_f(T) \equiv T^{\text{ord}(g)} \pmod{p\mathbb{Z}_p}$ を満たすもの (特殊多項式 *distinguished polynomial* と呼ばれています), および $\mathbb{Z}_p[[T]]$ の可逆元*50 $u(T)$ の積 $\boxed{f(T) = p^\mu g_f(T) u(T)}$ の形に一意的に分解することが出来ます. $f(t)$ の零点は多項式 $g_f(T)$ の零点と一致するため, 特に有限個であることが従います. p 進 L 関数は $\mathbb{Z}_p[[T]]$ (或いは分母を少し付け加えたもの) の元として構成出来るため, p 進ワイエルシュトラスの準備定理を用いて命題 3.1 を証明することも出来ます ([落合 14, 命題 2.21] を参照). p 進ワイエルシュトラスの準備定理自体は, 所謂 “(ワイエルシュトラスの) 割り算定理” と p 進位相の完備性を用いた比較的簡単な代数的議論で証明出来るため (例えば [落合 14, 定理 2.13] を参照), p 進ワイエルシュトラスの準備定理を用いた証明の方が分かり易いと思われる方も多いかもしれませんが, 本稿では敢えて複素関数論での一致の定理の証明 [Ahl78, p.p.126–127] との比較を重視した証明を採用しました. 実際, 命題 3.1 の証明を [Ahl78, p.p.126–127] (の前半部) と見比べてみると, 殆んど同じ議論で証明が進んでいることが見て取れると思います. p 進数体 (の代数的閉包の完備化) $\mathbb{C}_p$ は, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の完備化であるという点で複素数体 $\mathbb{C}$ と非常に良く似通っているため (図 1 も参照), p 進解析 (「 p 進」世界での解析学) も最初は複素関数論との類似に着目して研究が進められました. そのため p 進解析を勉強すると, 複素関数論と非常に良く似た定理や命題を数多く見ることが出来ます.

一方で複素関数論と「 p 進」世界の解析の間の 超えることの出来ない壁 (複素解析的

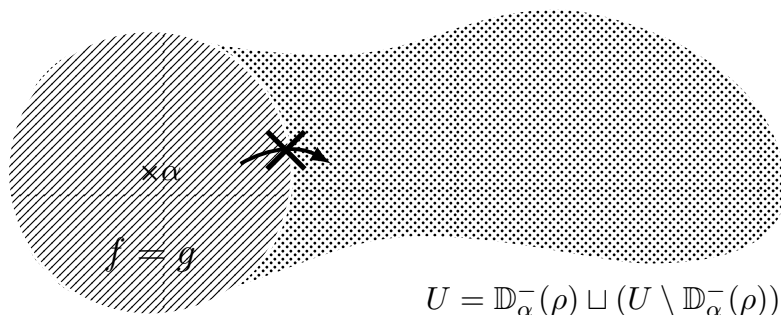


図 3 p 進一致の定理の証明の限界: “収束円盤” での結果をその外側に拡張することが出来ない

*49 実際, $|c_j|_p \rho^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ が成り立つならば $|c_{n+j}|_p \rho^j = \rho^{-n} \cdot |c_{n+j}|_p \rho^{n+j}$ も 0 に収束します. $h(z)$ の $(z - \alpha)^j$ の係数は c_{n+j} なので, $h(z)$ も $f(z)$ と同じ収束条件を満たすことが分かります.

手法の“限界”)も認識しておくことは非常に大切です。例えば複素関数論では、一致の定理は最終的に f, g が定義されている 領域 上での主張へと拡張されますが、「 p 進」世界では円盤上での主張から拡張することは出来ません。複素関数論では、最後に 連結性 *connectedness* の議論によって、 $f = g$ が成り立つ範囲を集積点 α でのテイラー展開の収束円盤から f, g の定義領域へと拡張していました (抑々“領域”という用語自体が 連結な開集合を指していました)。ところが「 p 進」世界は 完全不連結 *totally disconnected* な世界ですので (命題 A.6 を参照)、 f, g の定義されている開集合は 連結とはなりえず、したがって $f = g$ が成り立つ範囲を α を中心とする円盤の外に延ばすことが出来ないのです (図 3 も参照)。一致の定理は、複素関数論に於ける 解析接続 *analytic continuation* の理論の基礎付けを与える定理でした。第 1.2.3 節で「 p 進」世界では (素朴な意味での) 解析接続は出来ないことを解説しましたが、解析接続の理論の礎たる一致の定理を証明する際の (位相に纏わる) “限界” もまた、「 p 進」世界での解析接続の難しさを示唆しているのです。

さて、 p と $p-1$ は互いに素な整数なので、自然数 $\mathbb{N}$ の集合 $\{k \in \mathbb{N} \mid k \equiv 0 \pmod{p-1}\}$ は p の高い冪乗を幾らでも含みます。特にこの集合は $\mathbb{D}_0^-(1)$ の中に集積点 0 を持ちます。したがって、もし (適当な $r \geq 1$ に対して) $\mathbb{D}_0^-(r)$ 上定義された $s = 1$ でのみ 1 位の極を持つ p 進有理型関数 $\zeta_p: \mathbb{D}_0^-(r) \rightarrow \mathbb{C}_p$ で、各 $k \in \mathbb{N}, k \equiv 0 \pmod{p-1}$ に対して $(\mathbb{C}_p$ の部分体である $\mathbb{Q}$ での等式として)

$$\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k) \left(= -(1-p^{k-1})\frac{B_k}{k} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 0 \pmod{p-1} \quad \cdots (\text{IP})_\zeta$$

を満たすものが 存在するとしたら、斯様な関数 $\zeta_p(s)$ は $(\text{IP})_\zeta$ という性質を満たす 唯一つの $s = 1$ でのみ 1 位の極を持つ p 進有理型関数として特徴付けられる ことになります; 実際 p 進一致の定理 (命題 3.1) を $\mathbb{D}_0^-(r)$ 上の解析的関数 $(s-1)\zeta_p$ に適用することで一意性が導かれるのです。この $\zeta_p(s)$ は リーマンゼータ関数の負の整数点での特殊値を「 p 進的に」補間している ので、まさしく リーマンゼータ関数の「 p 進」世界での対応物 (“ p 進リーマンゼータ関数”) と呼ぶに相応しい対象であると言えるのではないのでしょうか?

等式 $(\text{IP})_\zeta$ は、関数 $\zeta_p(s)$ を “「 p 進」世界のリーマンゼータ関数” として特徴付けている性質と見做すことが出来るため、屢々 p 進ゼータ関数 (より一般には p 進 L 関数) の 補間性質 *interpolation property* と呼ばれます。もちろん補間性質 $(\text{IP})_\zeta$ や後の定理-定義 3.11 で紹介する $(\text{IP})_{\text{KL}}$ を満たすような ($s = 1$ でのみ 1 位の極を持つ) p 進有理型関数や p 進正則関数が 存在すること は まったく自明ではなく、したがって「 p 進」世界で“ゼータ関数”や“ L 関数”を考察する際には、まず p 進ゼータ関数 / p 進 L 関数の構成 自体が 非自明な問題 とな

*50 $\mathbb{Z}_p[[T]]$ の可逆元は、定数項が $\mathbb{Z}_p$ の単数であるものとして特徴付けられます ([落合 14, 補題 2.15] を参照)。

ります。この辺りの事情は、適当なディリクレ級数 (の有理型解析接続) を L 関数の“定義”とする「実 / 複素」世界の古典的な L 関数の理論とは大きく立場を異にしています。それどころか、補間性質 $(IP)_\zeta$ や $(IP)_{KL}$ を満たす関数を作り出さえすれば、それは (p 進一致の定理 3.1 により) “自動的に” p 進ゼータ関数 / p 進 L 関数になってしまうのですから、 p 進ゼータ関数 / p 進 L 関数の構成法は 複数存在し得る ことになります。実際、この後の第 3.2 節で紹介する 久保田–レオポルトの p 進 L 関数 KUBOTA–LEOPOLDT p -adic L -function に限っても、久保田–レオポルトが最初に提示した構成法 [KL64] (雑談 1.4 も参照してください) を筆頭に、AMICE–FRESNEL による方法 [AF72], “スティッケルベルガー元の極限” として構成する岩澤健吉のスティッケルベルガー構成 ([落合 14, 3.2.3 項] を参照), MAZUR によるベルヌーイ分布を用いた p 進測度論的構成 ([Ko77, Chapter II] を参照; 雑談 3.23 でも簡単に触れています), WASHINGTON によるフレヴィッツゼータ関数の特殊値の p 進補間を経由する方法 ([Was97, Section 5.2] を参照), 円単数のノルム整合系のコールマン冪級数を用いたコールマン–岩澤の構成 ([落合 14, 3.2.3 項], [坂内 02] を参照), さらにアイゼンシュタイン級数の定数項にディリクレ L 関数の負の整数点での特殊値が現われることに着目して、アイゼンシュタイン級数の合同式 (或いはそれを用いた極限操作により得られる p 進アイゼンシュタイン級数) を介して p 進 L 関数を構成する方法 ([Ser73, 長岡 SS05] を参照; p 進モジュラー形式 p -adic modular forms の理論の先駆けであり、後の Pierre R. DELIGNE と Kenneth A. RIBET による大理論 [DR80], [大下 SS14, 付録 C] のプロトタイプとも言える手法です) など、非常に沢山の構成法が知られています。これらの構成法にはそれぞれ長所短所があり、取り分け 岩澤理論 IWASAWA theory などの分野では、場面に応じて様々な構成法を使い分けることで、あの様な多彩な理論が展開されてきたと言っても過言ではないでしょう。第 3.2 節では数ある久保田–レオポルトの p 進 L 関数の構成法の中から、 p 進ゼータ関数の 正の整数点での特殊値 と第 2 節までで概観した (KZ 型) p 進ゼータ値 $\zeta_p^{KZ}(k)$ との関係を調べるのに非常に適した コブリッツの構成法 [Ko79, Ko80] を紹介します。

雑談 3.3. 補間性質 $(IP)_\zeta$ や定理-定義 3.11 で紹介する補間性質 $(IP)_{KL}$ による p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の特徴付けは「実 / 複素」世界では“まったく意味をなさない” ことには注意しておく必要があるでしょう。実際、 $g(s)$ を $\mathbb{C}$ 上の任意の正則関数として

$$f(s) = e^{g(s)} s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{s}{3}\right)^3 + \dots + (-1)^k \frac{1}{k} \left(\frac{s}{k}\right)^k}$$

と定めると、 $f(s)$ は 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $f(1-k) = 0$ を満たす整関数となります (WEIERSTRASS の無限乗積の理論; [Ahl78, Chapter 5, Theorem 7] を参照)^{*51}。したがって関数 $(1-p^{-s})\zeta(s) + f(s)$ もまた $(1-p^{-s})\zeta(s)$ と同じ「負の整数点での特殊値」を持つ、 $s=1$ でのみ 1 位の極を持つ有理型関数となります。関数 $f(s)$ は正則関数 $g(s)$ の選び方の分だけ任意性を持ちますので、リーマンゼータ関数と同じ「負の整数点での特殊値」を持つ複素有理型関数は 非可算無限個存在する こととなり、補間性質 $(IP)_\zeta$ (或いは $\mathbb{Z}$ の

部分集合 $\{1 - k \mid k \equiv 0 \pmod{p-1}\}$ での $(1 - p^{-s})\zeta(s)$ の特殊値) はリーマンゼータ関数をまったく特徴付けていません。斯くして「実 / 複素」の世界では (適切な) デイリクレ級数の有理型解析接続である ということ自体が「ゼータ関数である」ことを特徴付ける非常に重要な要素となるのです。一方の「 p 進」世界は、[多重] デイリクレ級数がまったく収束してくれない (命題 1.1) という意味で “ゼータ関数との相性が非常に悪い” 世界ですが、そんな「 p 進」世界では、我々が散々悩まされ続けてきた p 進位相の “悲劇的な” 性質 を逆手に取って “ゼータ関数の整数点での特殊値を p 進的に補間する” という性質のみでゼータ関数が特徴付けられる——この或る種の “逆転現象” は実に興味深いと思います。

§ 3.1 記号等の準備: p 進測度論速習コース

本小節は、本節の後半 (第 3.2 節および第 3.3 節) での議論で用いられる記号や諸概念の纏めです。特に p 進 L 関数の構成の際に非常に有用な p 進測度論 について若干詳しく説明しました。“1 変数版” の p 進測度論はコブリッツの論文 [Ko79] の Section 1 や書籍 [Ko80, Section 2] にも分かりやすく纏められていますので、是非参考になさってください。後程 “多変数版” の理論を展開することを見越して、本稿ではもう少し一般的な設定での解説を試みました ([MSw74, Section 7] に基づいています)。

第 3 節の記号の設定

以下では p は (簡単のため) 奇素数^{*52}とし、有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込み $\iota_\infty: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ および p 進数体の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込み $\iota_p: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ ($\subset \mathbb{C}_p$) を固定しておきます。また、ヘンゼルの補題 HENSEL's lemma ([Ko77, Theorem 2] を参照) により誘導される標準的な p 進指標 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mu_{p-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ を ω_p と表記し、法 p タイヒミュラー指標 TEICHMÜLLER character modulo p と呼びます (但し $\mu_{p-1} \subset \overline{\mathbb{Q}}^\times$ は 1 の $(p-1)$ 乗根全体のなす乗法群を表しています)。合成 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\omega_p} \mu_{p-1} \xrightarrow{\iota_p} \mathbb{C}^\times$ を介して、^{しばしば} 屡々 ω_p を導手 p のデイリクレ指標 $\omega_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ と見做すことがあります。 p 進指標 ω_p とデイリクレ指標を同一視する方法が、最初に固定した埋め込み $\iota_\infty: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ に依存していることは改めて強調しておきます。最後に、ヘンゼルの補題が誘導す

^{*51} 「 p 進」世界でもワイエルシュトラスの無限乗積の類似は存在しますが (例えば [Rob00, Chapter 6, Section 2.3, Theorem] を参照), 指定した無限個の点集合 $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ で零点を持つ無限乗積の収束条件は $|\alpha_k|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ となります (本質的に p 進ワイエルシュトラスの準備定理の帰結です)。「 p 進」世界では任意の $x \in \mathbb{Z}$ の p 進付値が 1 以下になってしまうので、 $\mathbb{Z}$ の無限部分集合に対して無限乗積の理論を適用することは出来ません。このような考察から、「 $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}_p$ に (位相的に) “どのような形で入っているか?” が「関数を整数点での値で特徴出来るか否か」を大きく左右していることが 窺い知れるでしょう。

る直積分解 $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ によつて $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対応する元を $(\omega_p(x), \langle x \rangle)$ で表すことにします; つまり $\langle x \rangle := x\omega_p(x)^{-1} \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ と定めます. $\langle x \rangle$ は^{しばしば} 岩澤の括弧記号 IWASAWA bracket と呼ばれます.

それでは p 進測度論の解説に移りましょう. 以下本小節では, アーベルな位相群 $\mathcal{G}$ は位数有限な開正規部分群の減少列 $\{\mathcal{N}_n\}_{n \geq 0}$ で $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{N}_n = \{0_{\mathcal{G}}\}$ を満たすものを持ち, さらに $\mathcal{G} \cong \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n$ と表されると仮定します (アーベル群 $\mathcal{G}$ の単位元を $0_{\mathcal{G}}$ としました). ^{ただ} 各有限商 $\mathcal{G}_n := \mathcal{G}/\mathcal{N}_n$ には離散位相を入れておき, 同型 $\mathcal{G} \cong \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n$ は位相群の同型であるとしています. このとき $\mathcal{G}$ はコンパクトかつ完全不連結な位相群となります. 実用上は $\mathcal{G} \cong (\text{有限アーベル群}) \times \mathbb{Z}_p^d$ の形の位相群^{*53}しか出て来ませんので, この形の位相群のみを想定して読み進めていただいてもまったく問題ありません.

定義 3.4 (分布と測度, [MSw74, Section 7, (7.1)] など). $\mathcal{K} (\subset \mathbb{C}_p)$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする. 位相アーベル群 $\mathcal{G}$ 上の関数 $\mu: \{\mathcal{G} \text{ のコンパクト開集合} \} \rightarrow \mathcal{K}$ が有限加法的性 *finite additivity* $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^k U_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(U_i)$ を満たすとき, μ を $\mathcal{G}$ 上の ($\mathcal{K}$ 値) 分布 *distribution* と呼ぶ. さらに, $\mathcal{G}$ の各コンパクト開集合 U に対して $|\mu(U)|_p$ が 有界 となるとき, μ を ($\mathcal{K}$ 値) 測度 *measure* と呼ぶ.

注意 3.5. $\mathcal{G}$ の任意のコンパクト開集合は, 部分集合族 $\{g + \mathcal{N}_n\}_{g \in \mathcal{G}, n \geq 0}$ の元の非交和として表されますので, μ の有限加法的性をチェックする際は任意の $g \in \mathcal{G}, n \geq 0$ に対して

$$\mu(g + \mathcal{N}_n) = \sum_{a \in \mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n+1}} \mu(g + a + \mathcal{N}_{n+1}) \quad \cdots \text{(DR)}$$

が成り立つことを確認すれば良いことになります. 等式 (DR) は 分布関係式 *distributivity relation* と呼ばれます.

さて, p 進分布 μ が与えられると

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G} \text{ 上の } \mathcal{K} \text{ 値局所定数関数} \} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ \phi = \sum_{g \in \mathcal{G}_n} \phi_g \mathbb{1}_{g + \mathcal{N}_n} \ (\phi_g \in \mathcal{K}) &\longmapsto \int_{\mathcal{G}} \phi d\mu := \sum_{g \in \mathcal{G}_n} \phi_g \mu(g + \mathcal{N}_n) \end{aligned}$$

によつて $\mathcal{G}$ 上の 局所定数関数 を分布 μ で積分することが出来ます (此处では $\mathbb{1}_U$ で開集合 U の特性関数を表しています). 一方で $\mathcal{G}$ 上の ($\mathcal{K}$ 値) 連続関数 ϕ は, 局所定数関数 (“階段関数”) の 極限 $\phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k$ として実現することが出来るため^{*54}, “ $\int_{\mathcal{G}} \phi d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{G}} \phi_k d\mu$ ”

^{*52} 本節の議論の大半は, 若干の修正の下で $p = 2$ のときも適用出来ます.

^{*53} この場合は $\mathcal{N}_n = \{0\} \times (p^n \mathbb{Z}_p)^d$ とすれば, 上記の条件をすべて満たします.

^{*54} 実際, $\mathcal{G}$ 上の $\mathcal{K}$ 値連続関数の空間 $C(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ の中で, $\mathcal{K}$ 値局所定数関数のなす $\mathcal{K}$ 線型部分空間が (上限ノルム $\|f\|_{\sup} := \sup_{g \in \mathcal{G}} |f(g)|_p$ に関して) 稠密であることが簡単に確認出来ます.

によって μ による積分を 連続関数 に拡張することが出来そうです. この極限が常に収束し, 収束値が関数列 $\{\phi_k\}_k$ の取り方に依らないことを保障するために μ が 測度 であること, 言い換えれば分布 μ の 有界性 が要請されます ([MSw74, Section 7, (7.1) Proposition] などを参照; 議論としては通常の測度論と大差ありません). このような事情から, p 進測度論を適用したい場面では 測度の有界性を確認すること が極めて重要な課題となるのです^{*55}.

雑談 3.6. $\mathcal{O}_K$ を K の整数環としますと, $\mathcal{O}_K$ 値分布はすべて (自動的に有界になるので) 測度となります. このとき, 対応

$$\{\mathcal{G}_n \text{ 上の } \mathcal{O}_K \text{ 値測度}\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K[\mathcal{G}_n]; \mu \mapsto \sum_{g \in \mathcal{G}_n} \mu(g + \mathcal{N}_n)g$$

の射影極限を取ることで, $\mathcal{G}$ 上の $\mathcal{O}_K$ 値測度全体のなす $\mathcal{O}_K$ 加群と $\mathcal{G}$ の $\mathcal{O}_K$ 係数 岩澤代数 *IWASAWA algebra* $\mathcal{O}_K[[\mathcal{G}]] := \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_K[\mathcal{G}_n]$ との間の全単射を得ます ([MSw74, Section 7, (7.2)] を参照)^{*56}. この対応を介して p 進測度を岩澤代数の元として捉えることが出来ます. この観点は, 取り分け 岩澤理論 *IWASAWA theory* で p 進 L 関数を “代数的な不変量” (岩澤加群の特性イデアルなど) と結び付ける際には極めて重要ですが, 本稿の目的のためには必要ないのでこれ以上立ち入らないことにします.

§ 3.2 1 変数の場合 — 久保田–レオポルトの p 進 L 関数とコールマンの公式

本小節では [FKMT17b] の原点とも言える 1 変数の p 進 L 関数とコールマンの公式に関する古典理論を解説します. 第 3.2.1 節では, ディリクレ L 関数の負の整数点での特殊値が (ハンケル経路積分を介して) 一般化関–ベルヌーイ数で表されることを復習した後に, それらを p 進補間する p 進正則関数 (自明指標の場合は $s = 1$ でのみ 1 位の極を持つ p 進有理型関数) である 久保田–レオポルトの p 進 L 関数の補間性質に基づく定式化を紹介します. 第 3.2.2 節では, コブリッツの p 進測度を用いた久保田–レオポルトの p 進 L 関数の構成法について解説します. 久保田–レオポルトの p 進 L 関数の構成に於いては, 特に自明指標やタイヒミュラー指標の冪乗に制限して論じる意義が感じられなかったため (寧ろこのような過剰な単純化は不要な弊害を招くだけなので), 一般のディリクレ L 関数に対して論じています. 第 3.2.3 節ではコールマンによる “レオポルトの公式の一般化” [Col82, Chapter VII] について解説しました. 補間性質からは 負の整数点での特殊値の様子しか分からないはずであった久保田–レオポルトの p 進 L 関数の 正の整数点での特殊値を p 進ポリログ関数の特殊値 (=“KZ

^{*55} 「非有界な分布」による積分論も Yuri MANIN などにより考察されていますが (局所解析的分布 *locally analytic distribution* の積分論など), 有界測度での積分論と比較すると矢張り扱いづらい印象は否めません.

^{*56} 実はこの対応は $\mathcal{O}_K$ 代数の同型となっており, 岩澤代数の元 x, y の積 xy は, 対応する測度 μ_x, μ_y の畳み込み積 $\mu_x * \mu_y$ convolution product $\int_{\mathcal{G}} f d(\mu_x * \mu_y) := \iint_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}} f(g + g') d\mu_x(g) d\mu_y(g')$ に対応します.

型 p 進ゼータ値”) と結び付ける大変興味深い結果です. 第 3.2.3 節では, KZ 型 p 進ゼータ値との関係を強調するため, タイヒミュラー指標の冪乗の場合に制限して解説し, 一般のディリクレ指標についての結果は簡単に紹介するに留めました (雑談 3.31 を参照). 尚, コールマンの公式については, 坂内健一さんが (何とコブリッツ測度もコールマン積分も用いない!!) 異なるアプローチからの証明を解説されている論説 [坂内 02] もあります. 本節の手法と比較検証してみるのは, それだけで非常に楽しい経験になるでしょうし, 得るものも非常に大きいと思いますので, 是非お手元にどうぞ^{ぜひ}*57.

§ 3.2.1 ディリクレ L 関数の特殊値と久保田–レオポルトの p 進 L 関数

導手 f_χ のディリクレ指標^{*58} $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, 無限級数 $L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ により定義される 1 変数複素関数 $L(s, \chi)$ を χ のディリクレ L 関数 DIRICHLET L -function と呼びます. 自明なディリクレ指標 $\mathbb{1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \forall n \mapsto 1$ に対するディリクレ L 関数 $\zeta(s) := L(s, \mathbb{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は リーマンゼータ関数 RIEMANN zeta function に他なりません. ディリクレ L 関数は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束する級数で, この範囲では メラン変換公式 MELLIN transformation formula $\int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt = n^{-s} \Gamma(s)$ を用いて

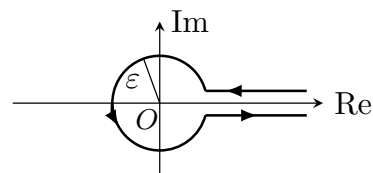
$$\begin{aligned} \Gamma(s) L(s, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \chi(m f_\chi - \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(m f_\chi - \alpha)t} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \chi(-\alpha) \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \underbrace{\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-f_\chi t})^m \right\}}_{\text{幾何級数}} t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \chi(-\alpha) e^{\alpha t} \cdot \frac{e^{-f_\chi t}}{1 - e^{-f_\chi t}} \right\} t^{s-1} dt = \chi(-1) \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) e^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1} \right\} t^{s-1} dt \end{aligned}$$

と積分表示出来ます^{*59}. 最後の式に現われる “被積分

関数” (の t 倍) を $\mathfrak{F}_\chi^0(t) := \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) t e^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1}$ とおき,

いわゆる

所謂 ハンケル積分経路 HANKEL contour (右図を参



ハンケル経路 HANKEL contour $\mathcal{C}_\epsilon$

*57 坂内さんの論説 [坂内 02] での p 進 L 関数の構成は, 円単数こそ表立って登場はしないものの, 実質的には コールマン–岩澤の構成 ([落合 14, 3.2.3 項] 参照) と等価です.

*58 自明なディリクレ指標 $\mathbb{1}$ は “導手 1 のディリクレ指標” と見做します.

*59 無限和と積分の交換可能性など, 積分計算の際に注意すべき細部はすべて認めて計算しています. 詳細は [Iwa72, Section 1] などを参照してください.

照) に沿って $\frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t} t^{s-1}$ を経路積分すると*60

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t} t^{s-1} dt &= \chi(-1)(e^{2\pi\sqrt{-1}s} - 1)\Gamma(s)L(s, \chi) \\ &= \chi(-1)e^{\pi\sqrt{-1}s} 2\sqrt{-1} \sin(\pi s) \Gamma(s)L(s, \chi) = (-1)^s \chi(-1) \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s)} L(s, \chi) \quad \cdots (\diamond) \end{aligned}$$

となります。但し^{ただ}此^{ここ}処では複素対数関数 $\log z$ の分枝を $0 \leq \text{Im}(\log z) < 2\pi$ としており、最後の等号では $e^{\pi\sqrt{-1}s} = (e^{\log(-1)})^s = (-1)^s$ とガンマ関数の関数等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

を用いました。メラン変換 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t} t^{s-1} dt$ は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して定義出来るので、この式は $L(s, \chi)$ の $\mathbb{C}$ への (有理型) 解析接続を与えています。また、 $L(s, \chi)$ が極を持ち得る点は $\Gamma(1-s)$ の零点であつて $L(s, \chi)$ の絶対収束域に入っていない $s=1$ のみです。そこで $s=1$ として $\frac{\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t}$ の留数を計算すると、 $\chi=1$ のときは 1 でそれ以外のときは 0 となります。したがって χ が非自明なディリクレ指標であれば $L(s, \chi)$ は正則関数となり、 χ が自明な指標 1 であれば $\zeta(s) = L(s, 1)$ は $s=1$ でのみ 1 位の極を持つ有理型関数となります。

解析接続の式 $(\diamond)$ を用いて $s=1-k$ でのディリクレ L 関数の特殊値が計算出来ます。

定義 3.7 (一般化関-ベルヌーイ数). 等式 $\mathfrak{F}_\chi^1(t) = \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)te^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{\chi,k} \frac{t^k}{k!}$ によって定義される代数的数 $\{B_{\chi,k}\}_{k=0}^{\infty} (\subset \mathbb{Q}(\text{Im } \chi))$ を 一般化関-ベルヌーイ数 *generalised SEKI-BERNOULLI number* と呼ぶ。自明指標 $\chi=1$ に対する一般化関-ベルヌーイ数は特に 関-ベルヌーイ数 *SEKI-BERNOULLI number* と呼ばれ、 $B_k := B_{1,k}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) と表記される。

注意 3.8. 2つの関数 $\mathfrak{F}_\chi^0(t)$ と $\mathfrak{F}_\chi^1(t)$ の 和を取る範囲の違い に注意してください。両者はディリクレ指標 χ が非自明であれば一致しますが (このときは $\mathfrak{F}_\chi(t)$ と略記します), 自明な指標 1 (導手は 1 と考えます) のときは $\mathfrak{F}^0(t) := \mathfrak{F}_1^0(t) = \frac{t}{e^t - 1}$, $\mathfrak{F}^1(t) := \mathfrak{F}_1^1(t) = \frac{te^t}{e^t - 1}$ と異なる関数を定めます (どちらも関-ベルヌーイ数 B_k の母関数として用いられる有名な関数です*61)。第 3.2.2 節で紹介するコブリッツの p 進測度は “母関数 $\mathfrak{F}_\chi^0(t)$ を p 進補間する” ような測度ですが、[Ko80, p. 24] の記述を見る限り、コブリッツは自明指標 1 のときに $\mathfrak{F}^0(t)$ と $\mathfrak{F}^1(t)$ が微妙に異なることには無頓着であるようです。本稿では、 $\mathfrak{F}^0(t)$ と $\mathfrak{F}^1(t)$ の^{むとんちゃく}違いに由来する諸問題について気付いた範囲で修正を^{ほどこ}施しました。

*60 この経路積分 *contour integration* は、経路の形から “マンドリン積分” *mandolin integral* とも呼ばれます。

*61 良く知られているように、2つの流儀ではベルヌーイ数 B_1 の値のみが異なり、 $\mathfrak{F}^1(t)$ を用いる流儀では $B_1 = +\frac{1}{2}$, $\mathfrak{F}^0(t)$ を用いる流儀では $B_1 = -\frac{1}{2}$ となります。ちなみに $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ です。

注意 3.9. 2つの関数 $\mathfrak{F}_\chi^0(t)$, $\mathfrak{F}_\chi^1(t)$ の間には $\mathfrak{F}_\chi^1(-t) = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)$ という関係があります; 実際

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\chi^1(-t) &= \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)(-t)e^{-\alpha t}}{e^{-f_\chi t} - 1} = \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)te^{(f_\chi-\alpha)t}}{e^{f_\chi t} - 1} \\ &\stackrel{f_\chi-\alpha \mapsto \alpha}{=} \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(f_\chi-\alpha)te^{\alpha t}}{e^{f_\chi t} - 1} = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)\end{aligned}$$

が成り立ちます. 特に χ が非自明なときは, 等式 $\mathfrak{F}_\chi(-t) = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi(t)$ の係数を比較することにより, χ が偶指標 *even character* (つまり $\chi(-1) = +1$ を満たすディリクレ指標) ならば $B_{\chi, 2m+1} = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), 奇指標 *odd character* (つまり $\chi(-1) = -1$ を満たすディリクレ指標) ならば $B_{\chi, 2m} = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) となることが従います. 一方 χ が自明な指標 $\mathbf{1}$ のときは $\mathfrak{F}^1(-t) = \mathfrak{F}^0(t) = \mathfrak{F}^1(t) - t$ が成り立つため, $B_1 = +\frac{1}{2}$ かつ $B_{2m+1} = 0$ ($m = 1, 2, \dots$) が従います.

命題 3.10 (ディリクレ L 関数の負の整数点での値). 任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$L(1-k, \chi) = -\frac{B_{\chi, k}}{k} \text{ が成り立つ (特に } L(1-k, \chi) \in \mathbb{Q}(\text{Im } \chi) \text{ が成り立つ).}$$

【証明】 解析接続の式 (◇) に $s = 1-k$ を代入して整理すると, 留数計算により

$$L(1-k, \chi) = (-1)^{k-1} \Gamma(k) \cdot \text{Res}_{t=0} \frac{\chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)}{t^{k+1}}$$

を得ます. 注意 3.9 の等式 $\mathfrak{F}_\chi^1(-t) = \chi(-1)\mathfrak{F}_\chi^0(t)$ と一般化関-ベルヌ-イ数の定義 3.7 から

$$L(1-k, \chi) = (-1)^{k-1} \Gamma(k) \cdot \text{Res}_{t=0} \frac{\mathfrak{F}_\chi^1(-t)}{t^{k+1}} = (-1)^{k-1} (k-1)! \cdot \frac{(-1)^k B_{\chi, k}}{k!} = -\frac{B_{\chi, k}}{k}$$

が従います. $\square$

以上の準備のもとで, 久保田-レオポルトの p 進 L 関数の存在定理を紹介しましょう.

定理-定義 3.11 (久保田-レオポルトの p 進 L 関数の存在と一意性, [KL64]). “開円盤” $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) = \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}\}$ 上で定義された $\mathbb{Q}_p(\text{Im } \chi)$ 値^{*62}正則関数 $L_p(s, \chi)$ (χ が自明指標 $\mathbf{1}$ のときは $s = 1$ でのみ 1 位の極を持つ $\mathbb{Q}_p$ 値有理型関数 $L_p(s, \mathbf{1})$) で, 以下の補間性質 (IP)_{KL} によって特徴付けられるものが唯一つ存在する;

$$L_p(1-k, \chi) = (1 - \chi\omega_p^{-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \chi\omega_p^{-k}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \cdots \text{ (IP)}_{\text{KL}}.$$

^{*62} 第 3.1 節冒頭で固定した埋め込み ι_∞, ι_p を用いて, χ を $\mathbb{C}_p$ 値指標 $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}_p$ とも見做しています.

注意 3.12. 第 3.0 節で導入した $\zeta_p(s)$ は、自明指標 $\mathbb{1}$ に対する p 進 L 関数 $L_p(s, \mathbb{1})$ に相当します。実際 $k \equiv 0 \pmod{p-1}$ のときは $\omega_p^{-k} = \mathbb{1}$ ですから、 $L_p(s, \mathbb{1})$ は $\{1-k \mid k \in \mathbb{N}, k \equiv 0 \pmod{p-1}\}$ に対して補間性質 $(\text{IP})_\zeta$ を満たしています。

注意 3.13. デイリクレ指標 χ が 奇指標 のときは、 k の偶奇と $\chi\omega_p^{-k}$ の (デイリクレ指標としての) 偶奇が異なるため、注意 3.9 によってすべての自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して $L(1-k, \chi\omega_p^{-k}) = -\frac{B_{\chi\omega_p^{-k}, k}}{k} = 0$ が成り立ちます。つまり χ が奇指標のとき、定理-定義 3.11 の補間性質 $(\text{IP})_{\text{KL}}$ は $\boxed{L_p(1-k, \chi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ が成り立つことを主張しています。一方で、当然 零関数 0 も $0(1-k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ を満たしますので、再び定理-定義 3.11 によって 奇指標 χ に対する久保田-レオポルト p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ は 零関数となる ことが従います。この事実は、第 1.2.5 節で紹介した (KZ 型の) p 進ゼータ値の重要な性質 $\zeta_p^{\text{KZ}}(2k) = 0$ が成り立つことの根拠としても用いられていました。

雑談 3.14 (クンマー合同式との関係)．久保田-レオポルトの p 進 L 関数の“補間性質 $(\text{IP})_{\text{KL}}$ を満たす唯一つの p 進正則関数 (或いは $s=1$ でのみ 1 位の極を持つ p 進有理型関数)”としての特徴付けについては、第 3.0 節でも簡単にアイデアを説明しましたが、それでも最初のうちは“人工的”で“回り^{くど}諄い”印象が拭い去れないでしょう。一体どのような経緯でこのような対象が考えられるようになったのでしょうか——？“ p 進 L 関数”なるものが考えられるようになった切っ掛けの中でも取り分け影響が大きかったものは、矢張り エルンスト・クンマー Ernst KUMMER によるベルヌーイ数の数論的性質の研究でしょう。クンマーは、正の偶数 k_1, k_2 が $k_1 \equiv k_2 \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ を満たすとき、 $\frac{B_{k_1}}{k_1}, \frac{B_{k_2}}{k_2}$ がともに p 進整数であって、合同式 $\boxed{\frac{B_{k_1}}{k_1} \equiv \frac{B_{k_2}}{k_2} \pmod{p}}$ が成り立つことを示しました (クンマーの合同式 KUMMER congruence)。クンマーの発見したこの合同式は、その後 p の高い冪乗を法とする合同式へと精密化されていきます；正の偶数 k_1 と k_2 が $k_1 \equiv k_2 \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ かつ $k_1 \equiv k_2 \pmod{p^{n-1}}$ を満たすとき、合同式 $(1-p^{k_1-1})\frac{B_{k_1}}{k_1} \equiv (1-p^{k_2-1})\frac{B_{k_2}}{k_2} \pmod{p^n}$ が成り立ちます。この段階に至ると、クンマーの合同式 (或いはその精密化) は“ベルヌーイ数間の合同式”というよりも、寧ろ“(p オイラー因子を除いた) リーマンゼータ関数の負の整数点での特殊値 間の合同式” $(1-p^{k_1-1})\zeta(1-k_1) \equiv (1-p^{k_2-1})\zeta(1-k_2) \pmod{p^n}$ であると見做す方が自然であると気が付くでしょう。さらには「 k_1 と k_2 が“ p 進的に近い”ほど $(1-p^{k_1-1})\zeta(1-k_1)$ と $(1-p^{k_2-1})\zeta(1-k_2)$ も“ p 進的に近づく”」という或る種の“ p 進的な 連続性”と表現すべき関係が明らかに存在していることにも気付くはずで、これらの傍証から「(適切な) 負

の偶数 k に対して $\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k)$ を満たす “ p 進連続関数 $\zeta_p(s)$ ” が存在するのではないか?」と期待してしまうのは無理からぬことでしょう. 久保田-レオポルトの p 進 L 関数 [KL64] は, 見方を変えるとベルヌーイ数の間に成り立つクンマーの “不思議な合同式” に “(p 進 L 関数の) 連続性” という形で意味付けをしたものである, と捉えることも出来るのです.

クンマー合同式と p 進ゼータ関数について興味を持たれた方は, 是非雑誌『数学セミナー』2018 年 1 月号の栗原将人さんの記事 [栗原 18] をご覧ください. 短い論説ではありますが, ベルヌーイ数の間の具体的な合同関係から p 進ゼータ関数の存在に迫る構成に自ずとわくわくさせられることは必定ですし, 示唆に富んだ記述が多く色々と発見があるのではないかと思います (蛇足ですが, サマースクールの本講演および本稿の標題は, 栗原さんの記事の印象的なタイトルに触発されて付けさせていただきました).

§ 3.2.2 コブリッツの p 進測度と p 進 L 関数

引き続き $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を導手 f_χ のディリクレ指標とします. コブリッツによる p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の構成は, レルヒ型ディリクレ L 関数の特殊値を p 進補間する というアイデアに基づいていますので, 先ずはレルヒ型ディリクレ L 関数を導入しましょう.

定義 3.15 (レルヒ型ディリクレ L 関数). $c \in \mathbb{N}$ とする. 導手 f_χ のディリクレ指標 χ と 1 の c 乗根 ξ に対して, ディリクレ級数 $L(s, \chi, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\xi^n}{n^s}$ で定義される複素関数を レルヒ型ディリクレ L 関数 DIRICHLET L -function of LERCH type (または 捩れディリクレ L 関数 twisted DIRICHLET L -function) と呼ぶ. χ が自明な指標 1 のときには $\zeta(s, \xi) := L(s, 1, \xi)$ と表記して レルヒ型リーマンゼータ関数 RIEMANN zeta function of LERCH type と呼ぶことにする.

レルヒ型ディリクレ L 関数 $L(s, \chi, \xi)$ は, ディリクレ L 関数 $L(s, \chi)$ を “1 の c 乗根 ξ で捻った” だけのものなので, $L(s, \chi)$ と非常に良く似た性質を持ちます. 例えば $L(s, \chi, \xi)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束し, 関数 $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t) := \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha)\xi^{\alpha t} e^{\alpha t}}{\xi^{f_\chi} e^{f_\chi t} - 1}$ のハンケル経路 $\mathcal{C}_\varepsilon$ に沿った “メラン変換” による表示 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)}{t} t^{s-1} dz = (-1)^s \chi(-1) \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s)} L(s, \chi, \xi)$ を持ちます. この積分表示により $L(s, \chi, \xi)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され, さらに $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(t) := \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)\xi^{\alpha t} e^{\alpha t}}{\xi^{f_\chi} e^{f_\chi t} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{\chi, \xi, k} \frac{t^k}{k!}$ によって “捩れ関-ベルヌーイ数” twisted SEKI-BERNOULLI number $B_{\chi, \xi, k}$ を定めると $L(1-k, \chi, \xi) = -\frac{B_{\chi, \xi, k}}{k}$ ($\forall k \geq 1$) が成り立ちます.

(第 3.2.1 節の計算とほぼ同様なので、各自計算してみてください). 最後に、良く知られた公

$$\text{式 } \sum_{\xi^c=1} \xi^n = \begin{cases} c & (c \mid n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \text{ により}$$

$$\sum_{\xi^c=1} L(s, \chi, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\xi^c=1} \xi^n \right\} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ c \mid n}}^{\infty} \frac{c\chi(n)}{n^s} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(cn)}{(cn)^s} = c^{1-s} \chi(c) L(s, \chi)$$

$$\therefore \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L(s, \chi, \xi) = \sum_{\xi^c=1} L(s, \chi, \xi) - \underbrace{L(s, \chi, 1)}_{=L(s, \chi)} = (c^{1-s} \chi(c) - 1) L(s, \chi) \quad \cdots (L_{\xi})_c$$

が成り立ちます. 注目すべきは $\xi \neq 1$ のときは $L(s, \chi, \xi)$ は 正則関数 となるため, デイリクレ L 関数をレルヒ型に“分解”する公式 $(L_{\xi})_c$ が, そのまま $L(s, \chi)$ が $s = 1$ でのみ持ち得る高々 1 位の極を“取り除く”操作になっている, という点でしょうか.

注意 3.16. 2つの関数 $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)$ と $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(t)$ の間には $\boxed{\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(-t) = \chi(-1) \mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t)}$ という関係が成り立っていますので (各自確認してみてください), $L(s, \chi, \xi)$ の負の整数点での特殊値は $L(1-k, \chi, \xi) = (-1)^{k-1} \chi(-1) \cdot \left(\mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t) \text{ の } \frac{t^k}{k!} \text{ の係数} \right)$ と表すことが出来ます. したがって

$$\begin{aligned} L(-k, \chi, \xi) &= \frac{(-1)^k \chi(-1)}{k+1} \cdot \left(\mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t) \text{ の } \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \text{ の係数} \right) \\ &= (-1)^{k+1} \chi(-1) \left(-\frac{\mathfrak{F}_{\chi, \xi^{-1}}^0(t)}{t} \text{ の } \frac{t^k}{k!} \text{ の係数} \right) \end{aligned}$$

が成り立ちますので, $\mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t) := -\frac{\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)}{t} = \sum_{\alpha=0}^{f_{\chi}-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^{\alpha} e^{\alpha t}}{1 - \xi^{\alpha} e^{\alpha t}} = \frac{\mathfrak{B}_{\chi, \xi, -1}}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{\chi, \xi, k} \frac{t^k}{k!}$

とおくと $\boxed{L(-k, \chi, \xi) = (-1)^{k+1} \chi(-1) \mathfrak{B}_{\chi, \xi^{-1}, k}}$ ($k \geq 0$) と表すことが出来ます. 2つ

のベルヌーイ数 $B_{\chi, \xi, k}$ と $\mathfrak{B}_{\chi, \xi, k}$ は, 等式 $\boxed{\mathfrak{B}_{\chi, \xi, k} = (-1)^k \chi(-1) \frac{B_{\chi, \xi^{-1}, k+1}}{k+1}}$ ($k \geq 0$)

によって結び付いています. コブリッツの p 進測度は おおざっぱ 大雑把に言えば “ベルヌーイ数 $\{\mathfrak{B}_{\chi, \xi, k}\}_{k=0}^{\infty}$ の母関数 $\mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t)$ ごと p 進補間する” ような p 進測度のことです. また, [FKMT17b, Definition 1.4] で定義されている $\mathfrak{B}(\mathbf{n}; \xi)$ は $\mathfrak{B}_{\mathbf{1}, \xi, n}$ を多重化したものです.

コブリッツの p 進測度は拍子抜けしてしまう程簡単に定義出来てしまう, 単純明快な形の p 進測度です. 以下自然数 $f \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{G}_f = \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{f, n} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/fp^n\mathbb{Z}$ とおきます. 自然数 f を $f = f_0 p^e$, $p \nmid f_0$ と分解しておく, 中国剰余定理により $\mathcal{G}_f = \mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{N}_n = \{0\} \times p^{e+n}\mathbb{Z}_p$ と表されます.

命題-定義 3.17 (コブリッツの p 進測度 μ_z , [Ko79, Section 1, Key example and Proposition 2], [Ko80, Chapter II, Section 2, Basic Example]). $\mathcal{K}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし, p 進数 $z \in \mathcal{K}$ を $|z^f - 1|_p \geq 1$ となるようにとる. このとき $\{x + \mathcal{N}_n\}_{x \in \mathcal{G}_f, n \geq 0}$ に対して $\mu_z(x + \mathcal{N}_n) := \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - z^{fp^n}}$ と定めると, μ_z は $\mathcal{G}_f$ 上の $\mathcal{K}$ 値 p 進測度となる. 但し $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$ は $x \equiv \tilde{x} \pmod{\mathcal{N}_n}$ かつ $0 \leq \tilde{x} < fp^n$ を満たす唯一つの整数とする.

【証明の概略】 $\mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n+1}$ の代表系として $\{\nu fp^n \mid 0 \leq \nu \leq p-1\}$ が取れるので, 等比数列の和の公式を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{p-1} \mu_z(x + \nu fp^n + \mathcal{N}_{n+1}) &= \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{z^{\tilde{x} + \nu fp^n}}{1 - z^{fp^{n+1}}} = \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - z^{fp^{n+1}}} (1 + z^{fp^n} + \dots + z^{(p-1)fp^n}) \\ &= \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - z^{fp^{n+1}}} \cdot \frac{1 - (z^{fp^n})^p}{1 - z^{fp^n}} = \mu_z(x + \mathcal{N}_n) \end{aligned}$$

となり, 分布関係式 (DR) が従います. 分布の有界性については, 仮定 $|z^f - 1|_p \geq 1$ から任意の n に対して $|z^{fp^n} - 1|_p \geq 1$ が成り立つことが容易に確認出来ますので, 先ず $z \in \mathbb{D}_0^+(1)$ の場合は

$$|\mu_z(x + \mathcal{N}_n)|_p = \left| \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - z^{fp^n}} \right|_p \leq |z|_p^{\tilde{x}} \leq 1 \quad (\forall x \in \mathcal{G}_f, \forall n \in \mathbb{N})$$

と評価出来ます. 次に $z \notin \mathbb{D}_0^+(1)$ のときは $|z^{fp^n}|_p > 1$ より $|1 - z^{fp^n}|_p = |z^{fp^n}|_p$ が成り立ちますので

$$|\mu_z(x + \mathcal{N}_n)|_p = \left| \frac{z^{\tilde{x}}}{1 - z^{fp^n}} \right|_p = |z|_p^{\tilde{x} - fp^n} \leq |z|_p^{-1} < 1 \quad (\forall x \in \mathcal{G}_f, \forall n \in \mathbb{N})$$

と評価出来ます. したがって μ_z は有界な分布となります. $\square$

一見すると“ L 関数の特殊値”とはかけ離れた対象のようにも見えるコブリッツの p 進測度ですが, 指数関数を積分するとレルヒ型ディリクレ L 関数の特殊値と結び付くというのですから驚きです. p 進測度 μ_z の定義に登場する z として“1 の c 乗根 ξ ”を考えるのがポイントです; ξ の位数 $c \neq 1$ が fp と素であれば, ξ が命題-定義 3.17 の条件 $|\xi^f - 1|_p \geq 1$ を満たすことは簡単に確認出来ます.

命題 3.18 ([Ko79, (1.8)]). $c \neq 1$ を fp と素な自然数とし, 或る非負整数 e_0 に対し χ の導手 f_χ が fp^{e_0} を割り切ると仮定する. このとき, 任意の非負整数 $k \geq 0$ に対して

$$\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) \pi_2(x)^k d\mu_\xi(x) = \mathfrak{B}_{\chi, \xi, k} = (-1)^{k+1} \chi(-1) L(-k, \chi, \xi^{-1})$$

が成り立つ. 但し π_2 は射影 $\mathcal{G}_f \cong \mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ を表す.

【証明の概略】 先ず p 進指数関数

$$\{t \in \mathbb{C}_p \mid |t|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\} \rightarrow \mathbb{C}_p; t \mapsto e^{\pi_2(x)t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi_2(x)t)^k}{k!} \cdots (\exp)$$

が t に関する p 進正則関数となることに注意しておきましょう (例えば [Ko77, p. 79], [Ko80, p. 14] などを参照). さて, $n \geq e_0$ のときに $fp^n = f_\chi d_n$ と表すことにしますと, p 進積分の定義と p 進測度 μ_ξ の定義 (命題-定義 3.17) から

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in \mathcal{G}_{f,n}} \chi(\tilde{x}) e^{\pi_2(\tilde{x})t} \mu_\xi(x + \mathcal{N}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=0}^{fp^n-1} \chi(\alpha) e^{\alpha t} \frac{\xi^\alpha}{1 - \xi fp^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{d_n-1} (\xi^{f_\chi} e^{f_\chi t})^j \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi fp^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\xi^{f_\chi} e^{f_\chi t})^{d_n}}{1 - \xi^{f_\chi} e^{f_\chi t}} \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi fp^n} = \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi^{f_\chi} e^{f_\chi t}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\xi e^t)^{fp^n}}{1 - \xi fp^n} \end{aligned}$$

と計算出来ます*63が, t の取り方から $|1 - e^t|_p < 1$ となるので, $|1 - \xi fp^n|_p^{-1} \leq 1$, $|\xi|_p = 1$ に注意すると

$$\left| \frac{1 - (\xi e^t)^{fp^n}}{1 - \xi fp^n} - 1 \right|_p = \left| \frac{\xi fp^n (1 - e^{fp^n t})}{1 - \xi fp^n} \right|_p \leq |1 - (e^t)^{fp^n}|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\xi e^t)^{fp^n}}{1 - \xi fp^n} = 1$ が成り立ちます. ゆえに等式

$$\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x) = \sum_{\alpha=0}^{f_\chi-1} \frac{\chi(\alpha) \xi^\alpha e^{\alpha t}}{1 - \xi^{f_\chi} e^{f_\chi t}} = \mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t)$$

を得ます. 最後に (exp) より $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) \pi_2(x)^k d\mu_\xi(x) \right) \frac{t^k}{k!}$ が成り立つことを踏まえて, 上式の両辺の t^k の係数を比較すると, 主張の等式を得ます. $\square$

雑談 3.19. 命題 3.18 の積分 $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) \pi_2(x) t^k d\mu_\xi(x)$ で, レルヒ型ディリクレ L 関数の特殊値 $L(-k, \chi, \xi)$ がそのまま出て来てくれたら嬉しかったのですが, 被積分関数の χ と k に依存した符号 $(-1)^{k+1} \chi(-1)$ が余計に掛かってしまったり ξ が ξ^{-1} になってしまっていたりするのが残念なところです. この余計な符号が生じてしまう原因は偏に積分 $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x) e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi(x)$ の計算結果が (特殊値の定義に適した $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^1(t)$ ではなく) $\mathfrak{F}_{\chi, \xi}^0(t)$ から構成した関数 $\mathfrak{H}_{\chi, \xi}(t)$ になってしまっているからです. そして命題-定義 3.17

*63 有理整数環 $\mathbb{Z}$ の元 α は, 対角埋め込み $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ によって $\mathcal{G}_f$ の元と見做しています. この解釈の下で, $\alpha \in \mathbb{Z}$ に対して $\pi_2(\alpha) = \alpha$ が成り立ちます.

に於いて、 $\mathcal{G}_{f,n}$ の元 x の代表元 $\tilde{x}$ として $x \equiv \tilde{x} \pmod{\mathcal{N}_n}$ かつ $0 \leq \tilde{x} \leq fp^n - 1$ を満たす整数を用いて μ_z を定義していることが、 $\chi(x)e^{\pi_2(x)t}$ を積分した際に $\mathfrak{H}_{\chi,\xi}(t) = -\frac{\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^0(t)}{t}$ が出て来てしまう最大の要因となっています。したがって、安直に考えると $\mathcal{G}_{f,n}$ の代表系を $1 \leq \tilde{x} \leq fp^n$ として 命題-定義 3.17 とまったく同様の手順で μ_z^1 を定義してしまえば、命題 3.18 と同じ計算によって $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x)e^{\pi_2(x)t} d\mu_\xi^1(x) = -\frac{\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^1(t)}{t}$ となるので、係数比較により余計な符号を取り除いた形の補間公式 $\int_{\mathcal{G}_f} \chi(x)\pi_2(x)^k d\mu_\xi^1(x) = L(-k, \chi, \xi)$ が得られそうです。著者が確認した限りでは、このような修正を施しても特に不具合は生じないように思われます。ただ、[FKMT17b] でも命題 3.17 の定義を採用しているため、文献を参照した際の混乱を避けるために、本稿でも符号のずれには目を瞑って [Ko79, Ko80, FKMT17b] などの流儀に合わせました。尚、 χ が 非自明なディリクレ指標 のときは $\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^0(t) = \mathfrak{F}_{\chi,\xi}^1(t)$ が成り立つため、注意 3.16 の等式 $\mathfrak{F}_{\chi,\xi}^1(t) = \chi(1)\mathfrak{F}_{\chi,\xi^{-1}}^0(t)$ を用いて計算すると積分 $\int_{\mathcal{G}_k} \chi(x)\pi_2(x)^k d\mu_\xi$ が “正しい L 値” $(-1)^{k+1}\chi(-1)L(-k, \chi, \xi^{-1}) = L(-k, \chi, \xi)$ を与えていることが確認出来ます。一方で χ が 自明な指標 1 のときは符号等のずれがどうしても残ってしまいますが、 μ_ξ を “足し合わせて” p 進 L 関数を構成する際には、このずれは巧く解消されます (定理-定義 3.11 の証明の概略をご覧ください)。

レルヒ型ディリクレ L 関数の特殊値を補間するような p 進測度 μ_ξ が構成出来たので、その “ p 進メラン変換” によってレルヒ型ディリクレ L 関数の “ p 進版” を構成することが出来ます。以下、 $\mathcal{G}_f$ の “単数群” を $\mathcal{G}_f^* = (\mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p^\times$ で表すことにします。また、合成写像 $\mathcal{G}_f^* \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\omega_p} \mathbb{Z}_p^\times$ のことも、同じ記号 ω_p で表すことにしましょう。最後に記号の乱用で、 $x \in \mathcal{G}_f^*$ に対して岩澤の括弧記号を $\langle x \rangle = \pi_2(x)\omega_p(x)^{-1} \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ と定義します。円盤上のリジッド解析的関数については定義 A.8 を参照してください。

補題 3.20. $\mathcal{G}_f^*$ の元 x と “開円盤” $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) := \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}\}$ の元 s に対して $\langle x \rangle^s := \text{Exp}_p(s \text{Log}_p(\langle x \rangle))$ と定める。このとき $\langle x \rangle^s$ は $x \in \mathcal{G}_f^*$ に関して連続であり、 $s \in \mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}})$ に関してリジッド解析的である。但し $\text{Exp}_p(x)$, $\text{Log}_p(x)$ はそれぞれ次のべき冪級数で定義される関数である；

$$\text{Exp}_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\text{Log}_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

【証明】 $\mathcal{G}_f^* \rightarrow \mathbb{C}_p; x \mapsto \langle x \rangle^s$ の連続性は

$$x \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \langle x \rangle \xrightarrow{\text{Log}_p} \text{Log}_p(\langle x \rangle) \xrightarrow{s \cdot -} s \text{Log}_p(\langle x \rangle) \xrightarrow{\text{Exp}_p} \text{Exp}_p(s \text{Log}_p(\langle x \rangle)) = \langle x \rangle^s$$

の各写像が連続であることから従います。 $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) \rightarrow \mathbb{C}_p; s \mapsto \langle x \rangle^s$ のリジッド解析性を調べるために、先ずは以下のことを思い出しましょう ([Ko77, Chapter IV, Section 1, Proposition] を参照);

★ 冪級数 $\text{Exp}_p(x)$ は $\mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}}) := \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\}$ 上で収束する。

★ $\mathbb{C}_p$ の整数環を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} (= \mathbb{D}_0^+(1))$ とおくと、 $\text{Exp}_p(x), \text{Log}_p(x)$ は特に $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ と $1+p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$

の間の位相同型写像を引き起こす; $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \xrightleftharpoons[\text{Log}_p]{\text{Exp}_p} 1+p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$.

したがって $s \text{Log}_p(\langle x \rangle) \in \mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}})$ が成り立つような s に対して $\langle x \rangle^s = \text{Exp}_p(s \text{Log}_p(\langle x \rangle))$ は収束します。 此処で $\text{Log}_p(\langle x \rangle) \in p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ であることから $|\text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p \leq p^{-1}$ が成り立つことに注意しますと、 $s \in \mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) (= \mathbb{D}_0^-(p^{1-\frac{1}{p-1}}))$ であれば

$$|s \text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p < p^{1-\frac{1}{p-1}} \cdot p^{-1} = p^{-\frac{1}{p-1}} \quad \therefore s \text{Log}_p(\langle x \rangle) \in \mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}})$$

より冪級数 $\langle x \rangle^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^n}{n!} s^n = 1 + \frac{\text{Log}_p(\langle x \rangle)}{1!} s + \frac{\{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^2}{2!} s^2 + \dots$ は確かに収束します。 $\square$

定義 3.21 (レルヒ型 p 進 L 関数, [Ko79, (1,10)]). $c \neq 1$ を pf と素な自然数とし、或る自然数 e_0 に対して χ の導手 f_χ が fp^{e_0} の約数となっていると仮定する。このとき、1 の c 乗根 $\xi \neq 1$ に対して $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}}) = \{s \in \mathbb{C}_p \mid |s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}\}$ 上のリジッド解析的関数 $L(s, \chi, \xi)$ を $L_p(s, \chi, \xi) := \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{-s} d\mu_\xi(x)$ で定義し、レルヒ型 p 進 L 関数 p -adic L -function of LERCH type と呼ぶ。

注意 3.22. 測度 μ_ξ の有界性より、或る正の定数 $M > 0$ が存在して $\mathcal{G}_f^*$ 上の任意の連続関数 f に対して $\left| \int_{\mathcal{G}_f^*} f(x) d\mu_\xi(x) \right|_p \leq M \sup_{x \in \mathcal{G}_f^*} |f(x)|_p$ が成り立ちます。また、任意の $x \in \mathcal{G}_f^*$ に対して $\chi \omega_p^{-1}(x) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ より $|\chi \omega_p^{-1}(x)|_p = 1$ となるので、良く知られた評価式 $|n!|_p > p^{-\frac{n}{p-1}}$ ([Ko77, p.79] 参照) および $|\text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p \leq p^{-1}$ と併せて評価式

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-s)^n}{n!} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^n d\mu_\xi \right|_p &\leq M |s|_p^n |n!|_p^{-1} \sup_{x \in \mathcal{G}_f^*} \underbrace{|\chi \omega_p^{-1}(x)|_p}_{=1} \underbrace{|\text{Log}_p(\langle x \rangle)|_p^n}_{\leq p^{-n}} \\ &< M |s|_p^n p^{\frac{n}{p-1}} \cdot p^{-n} = M (|s|_p \cdot p^{-\frac{p-2}{p-1}})^n \end{aligned}$$

を得ます. 右辺は $|s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}$ であれば $n \rightarrow \infty$ のときに 0 に収束するので, 結局

$$L_p(s, \chi, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \{\text{Log}_p(\langle x \rangle)\}^n d\mu_\xi(x)$$

も “開円盤” $\mathbb{D}_0^-(p^{\frac{p-2}{p-1}})$ 上のリジッド解析的関数となることが従います.

p 進測度 μ_z の定義 (命題-定義 3.17) から直ちに^{ただ}従う等式 $\mu_z(px + \mathcal{N}_{n+1}) = \mu_{z^p}(x + \mathcal{N}_n)$ を用いると, レルヒ型 p 進 L 関数の補間性質が形式的な計算により簡単に計算出来ます;

$$\begin{aligned} L_p(1-k, \chi, \xi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{k-1} d\mu_\xi(x) = \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \pi_2(x)^{k-1} \omega_p(x)^{1-k} d\mu_\xi(x) \\ &= \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(x) \pi_2(x)^{k-1} d\mu_\xi(x) - \int_{p\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(x) \pi_2(x)^{k-1} d\mu_\xi(x) \\ &= \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(x) \pi_2(x)^{k-1} d\mu_\xi(x) - \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-k}(px) \pi_2(px)^{k-1} \underbrace{d\mu_\xi(px)}_{=d\mu_{\xi^p}(x)} \\ &\stackrel{\text{命題 3.18}}{=} (-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1) \{L(1-k, \chi \omega_p^{-k}, \xi^{-1}) - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1} L(1-k, \chi \omega_p^{-k}, \xi^{-p})\} \end{aligned}$$

レルヒ型ディリクレ L 関数の特殊値の p 進補間に成功した今となつては, 目標であつた久保田-レオポルトの p 進 L 関数^{もはや} $L_p(s, \chi)$ は最早手中に取めたも同然です; と言うのも, レルヒ型 p 進 L 関数を “関係式 $(L_\xi)_c$ に沿って” 組み合わせれば良いのですから.

【定理-定義 3.11 の証明の概略】 $c \neq 1$ を pf と素な自然数として, p 進測度 $\tilde{\mu}_c := \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \mu_\xi$

の “ p 進メラン変換” で定まる関数

$$L_p(s, \chi) := \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^{1-s} - 1} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{-s} d\tilde{\mu}_c(x)$$

が補間公式 (IP)_{KL} を満たすことを確認します. 自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} L_p(1-k, \chi) &= \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^k - 1} \int_{\mathcal{G}_f^*} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{k-1} d\tilde{\mu}_c(x) \\ &\stackrel{\text{定義}}{=} \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^k - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \int_{\mathcal{G}_f} \chi \omega_p^{-1}(x) \langle x \rangle^{k-1} d\mu_\xi(x) = \frac{1}{\chi \omega_p^{-k}(c) c^k - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L_p(1-k, \chi, \xi) \end{aligned}$$

となりますので, 先程の $L_p(s, \chi, \xi)$ の補間公式を代入して計算を進めると

$$\begin{aligned} L_p(1-k, \chi) &= \frac{(-1)^k \chi \omega_p^{-k}(-1)}{\chi \omega_p^{-k}(c) c^k - 1} \left\{ \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L(1-k, \chi \omega_p^{-k}, \xi^{-1}) - \chi \omega_p^{-k}(p) p^{k-1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} L(1-k, \chi, \xi^{-p}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(L_\xi)_c}{\chi\omega_p^{-k}(e)c^k-1} \frac{(-1)^k \chi\omega_p^{-k}(-1)}{\chi\omega_p^{-k}(e)c^k-1} \\
& \cdot \{(\chi\omega_p^{-k}(e)c^k-1)L(1-k, \chi\omega_p^{-k}) - \chi\omega_p^{-k}(p)p^{k-1}(\chi\omega_p^{-k}(e)c^k-1)L(1-k, \chi\omega_p^{-k})\} \\
& = (-1)^k \chi\omega_p^{-k}(-1)(1 - \chi\omega_p^{-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \chi\omega_p^{-k})
\end{aligned}$$

と計算出来ます (c が p と素であるため, ξ が 1 以外の 1 の c 乗根を動くときに ξ^p も同じ集合の元を動くことに注意しましょう). したがって, 見かけ上は補間公式 (IP)_{KL} と符号 $(-1)^k \chi\omega_p^{-k}(-1)$ のずれが生じてしまっているように見えますが, 実際には符号のずれが生じていないことを確認しましょう. 先ず $\chi\omega_p^{-k}$ が非自明なときは注意 3.9 より k の偶奇と $\chi\omega_p^{-k}$ の (ディリクレ指標としての) 偶奇が一致しなければ $L(1-k, \chi\omega_p^{-k})$ は 0 となり, 偶奇が一致するならば $(-1)^k \chi\omega_p^{-k}(-1) = 1$ となるため, $\chi\omega_p^{-k}$ が非自明なときは補間公式に符号のずれが生じていないことが確認出来ました. 次に $\chi\omega_p^{-k}$ が自明な指標 $\mathbb{1}$ のときは, $(-1)^k \chi\omega_p^{-k}(-1) = (-1)^k = -1$ となるのは k が奇数のときだけです. そして $k=1$ のときは $1 - \chi\omega_p^{-k}(p)p^{k-1} = 1 - p^0 = 0$, $k \geq 3$ が奇数のときは $L(1-k, \chi\omega_p^{-k}) = \zeta(1-k) = 0$ となって (注意 3.9 を参照), 何れの場合も $L_p(1-k, \chi)$ の値は 0 になってしまうため, 矢張り符号のずれは生じていません. $\square$

雑談 3.23 (p 進測度論を用いた p 進 L 関数の構成について). 改めてコブリッツの p 進測度の構成を振り返ってみますと, その“簡明さ”には目を眩^{みは}るものがあります. p 進測度論を介した L 関数の構成は, 基本的には

- Step 1. 各整数点 k 毎に (より正確には各臨界点毎に), その点での L 関数の特殊値を補間する p 進分布 μ_k を構成する
- Step 2. 各分布 μ_k の有界性を証明する
- Step 3. 各分布 $\{\mu_k\}_k$ を “クンマー型合同式 $\mu_k \equiv x^{k-1}\mu_1$ ” (“水平方向の合同式” *horizontal congruence* と呼ばれています) を介して関係付ける

という, 大きく分けると 3 つのステップを経て実行されます. 例えば久保田–レオポルトの p 進 L 関数の場合は, 母関数表示 $\frac{te^{Xt}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(X) \frac{t^k}{k!}$ で定まる 関–ベルヌーイ多項式 SEKI–BERNOULLI *polynomial* $B_k(X)$ から構成される ベルヌーイ分布 BERNOULLI *distribution* $\mu_{B,k}(x + \mathcal{N}_n) = \frac{(fp^n)^{k-1}}{k} B_k\left(\left\{\frac{x}{fp^n}\right\}\right)$ を考察するのが一般的です ($\{x\}$ は有理数 x の “小数部分” を表す記号です). ベルヌーイ分布 $\mu_{B,k}$ に対する分布関係式 (DR) および補間公式は, 直接計算により簡単に確認出来ます. 但し $\mu_{B,k}$ は有界ではないことが簡単に示されてしまうため, Step 2 を完遂するためには $\mu_{B,k}$ を有界な測度となるように “修正” する必要があります. 斯様な修正は, p と素な自然数 $c \neq 1$ を用いて $\mu_{M,k}^{(c)}(x + \mathcal{N}_n) = \mu_{B,k}(x + \mathcal{N}_n) - c^k \mu_{B,k}(c^{-1}(x + \mathcal{N}_n))$ と定めることで実現されます.

この“修正”された p 進測度 $\mu_{M,k}^{(c)}$ は^{しばしば} 屡々 メイザー測度 MAZUR measure と呼ばれています。最後に Step 3 を経て各整数点毎に構成したメイザー測度 $\{\mu_{M,k}^{(c)}\}_k$ が“同じ p 進 L 関数”を表していることが正当化されるわけですが、このステップを完遂することは本質的に (一般化) 関-ベルヌーイ数の間の クンマー合同式 KUMMER congruence を証明することにはなりません ([Ko77, Theorem 5] も参照)。このように、 p 進測度論を用いた p 進 L 関数の構成は意外と手間のかかる作業が何段階にも渡って要求されるのが一般的ですが、コブリッツの p 進測度を用いた構成では、^ま 先ず 特殊値の 母関数ごと p 進補間してしまうことによって Step 1, Step 3 を回避しています。また、 p 進測度 μ_z の (あまりにもシンプルな) 定義から、Step 2 の 有界性の確認 も容易に出来てしまう点も注目に値します。 p 進 L 関数の構成について勉強した経験のある人であれば、誰もがコブリッツの p 進測度を用いた構成の簡明さに驚かれるのではないのでしょうか。

メイザー測度 $\{\mu_{M,k}^{(c)}\}_k$ を用いた p 進 L 関数の構成については [Ko77, Chapter II] が^ま 良く纏まっていて分かりやすいと思います (但し^{ただ} タイヒミュラー指標^{べき}の冪乗のケースしか扱われていません)。また、メイザー測度を用いた p 進 L 関数の構成は、 p 進測度論の文脈で構成するか岩澤代数の元として直接構成するかの違いを除けば、実質的に 岩澤健吉 Kenkichi IWASAWA による“スティッケルベルガー元の極限としての構成” [Iwa72] と等価なものです。スティッケルベルガー元 STICKELBERGER element は“部分ゼータ関数の特殊値の母関数”^{ゆいしよ} とでも呼ぶべき群環 $\mathbb{Q}[\mathcal{G}_n]$ の由緒正しい元であり、スティッケルベルガーの定理^い はスティッケルベルガー元が円分体のイデアル類群の零化元になっていることを主張しています。この定理は、解析的な量である“ L 関数の特殊値”と代数的な対象である“イデアル類群”の間に何らかの密接な関係があることを示唆する、^い 所謂 “岩澤理論的現象 IWASAWA theoretic phenomena” の典型例であると言えます。岩澤のスティッケルベルガー構成については [落合 14, 3.2.3 項] も参照してください。

§ 3.2.3 コールマン-レオポルトの公式

本小節では、コールマンによって証明された“久保田-レオポルトの p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の正の整数点での 特殊値と p 進ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$ の特殊値を結び付ける”公式 (コールマンの公式; 定理 3.24) の証明の概略を紹介します。以下第 1 節、第 2 節の記号を踏襲^{とうしゅう}します。即ち $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ および $a \in \mathbb{C}_p$ に対して、 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ で $X(\mathbb{C}_p)$ 上定義された分枝 a のコールマン関数の集合を表し、 $\text{Li}_k^{p,(a)}(z)$ で分枝 a の p 進ポリログ関数 (命題-定義 1.17) を表します。コールマンの公式の主張は実に明快です。

定理 3.24 (コールマンの公式, [Col82, Chapter I. (4), Chapter VII.]). k を 2 以上の自然数とすると, 等式 $L_p(k, \omega_p^{1-k}) = (1 - p^{-k}) \lim_{z \rightarrow 1}' \text{Li}_k^{p,(a)}(z) \stackrel{\text{定義 1.21}}{=} (1 - p^{-k}) \zeta_p^{\text{KZ}}(k)$ が成り立つ.

注意 3.25. コールマンの公式 (定理 3.24) に現れる項の逆数 $(1 - p^{-k})^{-1}$ が リーマンゼータ値 $\zeta(k)$ の p でのオイラー因子 と一致していることに注目しましょう. 久保田-レオポルトの p 進 L 関数はディリクレ L 関数の “ p でのオイラー因子を取り除いたもの” を p 進補間する関数であったので, 対応してコールマンの公式でも “KZ 型 p 進ゼータ値 $\zeta_p^{\text{KZ}}(k)$ の p でのオイラー因子” $(1 - p^{-k})^{-1}$ が取り除かれている, と解釈することが出来ます.

証明のアイデアは非常に単純明快で, 実質的に $L_p(k, \omega_p^{1-k})$ の定義に現れる p 進積分 $L_p(k, \omega_p^{1-k}) = \frac{1}{\omega_p^{1-k}(c) \langle c \rangle^{1-k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega_p^{-k}(x) \langle x \rangle^{-k} d\tilde{\mu}_c(x) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\tilde{\mu}_c(x)$ を定義に基づいて丁寧に計算するだけです*64. p 進測度 $\tilde{\mu}_c$ はコブリッツの p 進測度 μ_ξ を足し合わせたものですから, 先ずは x^{-k} という関数をコブリッツの p 進測度で積分するとどうなるかを調べておきましょう.

命題-定義 3.26 (過収束 p 進ポリログ関数, [Col82, Proposition 6.2]). 自然数 k に対し, 許容開集合 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上定義されたリジッド解析的関数 $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ で, $\text{Li}_k^{p,\dagger}(0) = \text{Li}_k^{p,\dagger}(\infty) = 0$ を満たし, さらに $\mathbb{D}_0^-(1)$ 上 $\text{Li}_k^p(z) - \frac{1}{p^k} \text{Li}_k^p(z^p) = \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ と一致するものが唯一つ存在する. 関数 $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ を 過収束 p 進ポリログ関数 *overconvergent p -adic multiple polylogarithm* と呼ぶ.

注意 3.27 ($\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ について).

- (1) コールマンの論文 [Col82] では $\ell_k^{(p)}(z)$ という記号が用いられています. かよう 斯様な関数の一意性は, リジッド解析的関数に対する一致の定理から従います.
- (2) 過収束 p 進ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ は, 第 A.2.3 節の意味で $(\{0, 1, \infty\}$ に沿った) 過収束関数 *overconvergent function* となっています.
- (3) [Fur07, Definicion 2.13] では, KZ 方程式の基本解 $G_0^{(a)}(e_0, e_1)(z)$ を “淡中解釈” を介して適切に修正し, その係数を取ることで過収束 p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ も定義しています.

*64 $f_{\omega_p} = p$ であることと $\mathcal{G}_p = \mathbb{Z}_p$ であることに注意しましょう.

【証明の概略】 先ず $a \in \mathbb{C}_p$ を任意に選んで $\text{Li}_0^{p,\dagger}(z) = \text{Li}_0^{p,\dagger,(a)}(z) = \frac{z}{1-z} - \frac{z^p}{1-z^p}$,
 $\text{Li}_k^{p,\dagger,(a)}(z) = \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \frac{1}{t} \text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(t) dt \right]_0^z$ ($k \geq 1$) と定めます*65. 以下, k に関する数学的帰納法によって $\text{Li}_0^{p,\dagger,(a)}(z)$ が定理の主張を満たすことを示します (このとき, リジッド解析的関数の一致の定理より $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z) := \text{Li}_k^{p,\dagger,(a)}(z)|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}^+(p^{-\frac{1}{p-1}})}$ が a に依らない関数となること が従います). 先ず $\text{Li}_0^{p,\dagger}(z)$ は明らかに $\text{Li}_0^{p,\dagger}(0) = 0$ を満たし, $w = \frac{1}{z-1}$ と変数変換すると $\text{Li}_0^{p,\dagger}(z) = -(w+1) + \frac{(w+1)^p}{(w+1)^p - w^p}$ となるため, $w = 0$ を代入して $\text{Li}_0^{p,\dagger}(\infty) = 0$ が従います. さらに $(w+1)^p - w^p = 1 - p\tilde{w}$, $|\tilde{w}|_p \leq \max_{1 \leq j \leq p-1} \{|w|_p^j\}$ と書けるため, $|w|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$, 即ち $|z-1|_p > p^{-\frac{1}{p-1}}$ であれば $\{(w+1)^p - w^p\}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (p\tilde{w})^k$ は確かに収束します; つまり $\text{Li}_0^{p,\dagger}(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}}))$ が成り立つことが示されました. 次に $\text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(z)$ が $\text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(0) = \text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(\infty) = 0$ を満たす $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上のリジッド解析的関数である仮定しましょう. このとき $\text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(z) \frac{dz}{z}$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上のリジッド解析的な微分形式となります. また $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}}) = \mathbb{D}_{\infty}^-(p^{\frac{1}{p-1}})$ は“開円盤”なので, “ポアンカレの補題” (この後の注意 3.28 を参照) によって $dF(z) = \text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)}(z) \frac{dz}{z}$ を満たす $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上のリジッド解析的関数 $F(z)$ が存在します. 一方で定義から $\text{Li}_k^{p,\dagger,(a)}(z)$ もまったく同じ形の微分方程式 $d\text{Li}_k^{p,\dagger,(a)}(z) = \text{Li}_{k-1}^{p,\dagger,(a)} \frac{dz}{z}$ を満たします. 特に $d(\text{Li}_k^{p,\dagger,(a)}(z) - F(z)) = 0$ が $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上で成り立つので, コールマン積分の性質 (定理 1.18 を参照) から $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z) - F(z)$ は大域的な定数関数となり, 特に $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z) = F(z) + (\text{大域的定数})$ が $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上のリジッド解析的関数となること が従います. 最後に, $\mathbb{D}_0^-(1)$ に制限したときの級数表示から $\text{Li}_k^{p,\dagger}(0) = 0$ となることは明らかです. また, 任意の自然数 c に対して等式 $(\text{Li}_{\xi})_c$ の“†版” (この後の定理 3.24 の証明で登場する式です) の両辺に $z = \infty$ を代入することで $\text{Li}_k^{p,\dagger}(\infty) = 0$ も従います. $\square$

雑談 3.28 (“開円板”に対する“ポアンカレの補題”). 中心 $a \in \mathbb{C}_p$, 半径 $r > 0$ の“開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a|_p < r\}$ 上のリジッド解析的関数は, $\mathbb{C}_p$ 係数の^{べき}冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,n}(z-a)^n$ であって, 任意の正の実数 $0 < \rho < r$ に対して $|a_{f,n}|_p \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ を満たすもののことでした (定義 A.8 (2) を参照). ^{かよう}斯様な $f(z)$ に対して定義される (形式的な) “原始関数” $F_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n+1} (z-a)^{n+1} (+\text{“積分定数”})$ もまた, “開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ 上

*65 この定義は $\text{Li}_k^{p,\dagger,(a)}(z) = \text{Li}_k^{p,(a)}(z) - \frac{1}{p^k} \text{Li}_k^{p,(a)}(z^p)$ と定めているのと等価です.

のリジッド解析的関数となります．実際，任意の $0 < \forall \rho < r$ に対して

$$\begin{aligned} |a_{F_f, n}|_p \rho^n &= |a_{f, n-1}|_p |n^{-1}|_p \rho^n \leq |a_{f, n-1}|_p p^{\lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor} \rho^n \\ &\leq |a_{f, n-1}|_p \left(\rho^{\frac{\log p}{\log \rho}} \right)^{\frac{\log n}{\log p}} \rho^n = |a_{f, n-1}|_p \left(\rho^{1 + \frac{1}{\log \rho} \frac{\log n}{n-1}} \right)^{n-1} \cdot \rho \end{aligned}$$

と評価出来ますが ($|n^{-1}|_p$ の評価については命題 1.14 の証明の議論も参考にしてください), $\rho < r$ であることと $n \rightarrow \infty$ としたときに $\frac{\log n}{n-1} \rightarrow 0$ となることから, 任意の

$\rho < \forall \rho' < r$ に対して或る (十分大きな) 自然数 N が存在して, $n > N$ のとき $\rho^{1 + \frac{1}{\log \rho} \frac{\log n}{n-1}}$ は ρ' で抑えられます．したがって $|a_{f, n-1}|_p (\rho')^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ であることから, $F_f(z)$ も同じ収束条件を満たすことが従います．同様の議論で, “開円環” $\{z \in \mathbb{C}_p | r < |z - a|_p < R\}$ 上のリジッド解析関数 $f(z)$ の “ a での留数” (即ち a に関するローラン展開の $(z - a)^{-1}$ の係数) が 0 であるならば, f の形式的な “原始関数” も同じ円環上のリジッド解析的関数を定めることが証明出来ます．この事実は [Col82] でも言及されていますが, その証明は割愛されていたため ^{ここ} 此処で補足しておきました．また上記の議論は, ^{はんすう} 反芻してみれば直ぐ ^す に分かりますが “閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r)$ (但し $r \in p^\mathbb{Q} = |\mathbb{C}_p^\times|_p$) には適用出来ません．

命題 3.29 ([Col82, Lemma 7.2]). 任意の $|z - 1|_p \geq 1$ なる p 進数 $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ に対して $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x) = \text{Li}_k^{p, \dagger}(z)$ が成り立つ．

【証明】 先ず $z \in \mathbb{D}_0^-(1) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ に対して, μ_z の定義 (命題-定義 3.17) から

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{x \in (\mathbb{Z}_p/p^N \mathbb{Z}_p)^\times} \tilde{x}^{-k} \mu_z(x + p^N \mathbb{Z}_p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=0 \\ p \nmid n}}^{p^N-1} n^{-k} \frac{z^n}{1 - z^{p^N}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z^{p^N}} \left\{ \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{z^n}{n^k} - \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{z^{pn}}{(pn)^k} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z^{p^N}} \left\{ \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{z^n}{n^k} - \frac{1}{p^k} \sum_{n=1}^{p^N-1} \frac{(z^p)^n}{n^k} \right\} \end{aligned}$$

が成り立ちますが, $|z|_p < 1$ を仮定していたので $\frac{1}{1 - z^{p^N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ となり, かつ右辺の中括弧の中身は過収束 p 進ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p, \dagger}(z)$ に収束するため (雑談 3.27 (1) を参照), 主張の等式が成り立ちます．

一般の $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ にこの等式を拡張するために クラスナー解析的関数 KRASNER's analytic function の理論 [Kra74] を用います． $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上のクラスナー解析的関数とは, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ 上の有理関数で $\mathbb{D}_1^-(1)$ にしか極を持たないものの (一様収束位相による) 極限として表される関数です． $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上のクラスナー解析的関数全体の集合は, 定義から

$$\mathbb{C}_p \{ (z - 1)^{-1} \} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - 1)^{-n} \mid |c_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\},$$

即ちアフィノイド領域 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上のリジッド解析的関数の集合と一致しています (例えば [Rob00, Chapter 6, Section 4.3, Theorem] を参照). 命題-定義 3.26 により $\text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^+(p^{-\frac{1}{p-1}})$ 上のリジッド解析的関数であるため, 特に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上クラスナー解析的. また, μ_z に関する積分の定義から $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x)$ は 1 の p 冪根にのみ極を持つ (z に関する) 有理関数の極限として実現されるため (上記の計算も参考にしてください), $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上のクラスナー解析的関数となります*66. 主張の等式の両辺に現われる関数は, 各々の定義域の共通部分 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ に集積点を持つような部分集合 $\mathbb{D}_0^-(1) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上で一致しているため, クラスナー解析関数に対する一致の定理 [Kra74, Section 3, Théorème d'unicité] により $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_z(x) = \text{Li}_k^{p,\dagger}(z)$ が $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{D}_1^-(1)$ 上でも成立することが従います ([Ko80, Chapter II, Section 5, Lemma 1] の議論も参考にしてください). $\square$

雑談 3.30. マーク・クラスナー Marc KRASNER の p 進解析的関数の理論は, ジョン・テイト John TATE による所謂 ^{いわゆる}リジッド解析幾何学 *rigid analytic geometry* の創設前に展開されていた理論で, 複素関数論に於ける ルンゲの近似定理 RUNGE's approximation theorem [Con78, Chapter VIII, 1.7 Runge's Theorem] に触発されて構築されたものです. ルンゲの近似定理は, $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 K 上 (正確には K を含む或る開集合上) 定義された正則関数が, K の外にのみ極を持つような有理関数によって (幾らでも良い精度で) 近似出来ることを主張する定理で, この定理に着想を得たクラスナーは 擬連結的部分集合 *sous-ensemble quasi-connexe* という $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ の部分集合のクラスを定義した上で, 擬連結集合の補集合にのみ極を持つ有理関数の一様収束極限で表される関数として 解析的元 *élément analytique* の概念を導入しました. 「有理関数で近似される」という非常に強い性質により, クラスナーの解析的元は一致の定理を満たすことが証明出来ます. クラスナーの理論とリジッド解析幾何学は見た目から大きく異なっており, 両者の関係は気になるところです. 森田康夫 [Mor78] によると, 係数体が代数的閉体かつ “極大完備 *maximally complete*” で, 考えている部分集合が “完備正則擬連結集合 *completely regular quasi-connected set*” であるという条件の下では両者は一致しますが, これらの仮定が満たされない場合には実際に理論に両者の間には ^{はら}ずれが生じるようです. クラスナーの理論は多変数化が困難であるなどの問題点 ^{ある}を孕んでいたことも手伝って, 現在では「 p 進」世界の幾何はテイトのリジッド解析幾何学 (或いはその拡張) に基づいて議論することが主流となっていますが, “複素関数論的な” 視点に基づくクラスナーの理論も直観的に受け入れやすいですし, 何より扱いやすいため, 今回のように何かと援用されることがあります.

*66 1 の p^N 乗根 ($N \geq 1$) ζ に対して $0 = \zeta^{p^N} - 1 \equiv (\zeta - 1)^{p^N} \pmod{p}$ が成り立つため, 任意の 1 の p 冪根は $\mathbb{D}_1^-(1)$ の元となることに注意しましょう.

【定理 3.24 の証明の概略】 命題 3.29 により

$$L_p(k, \omega_p^{1-k}) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} \underbrace{d\tilde{\mu}_c(x)}_{=\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} d\mu_\xi(x)} = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,\dagger}(\xi)$$

$$\stackrel{\text{命題-定義 3.26}}{=} \frac{1}{c^{1-k} - 1} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \left(\text{Li}_k^{p,(a)}(\xi) - \frac{1}{p^k} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi^p) \right) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right) \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi)$$

が成り立ちます (c が p と素であることから, ξ が 1 でない 1 の c 乗根を動くときに ξ^p も同じ集合の元を動くため, $\xi^p \mapsto \xi$ とおき直しました). 此处で $|z|_p < 1$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^p(\xi z) &= \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi z)^n}{n^k} = \sum_{\xi^c=1} \xi^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} = c \sum_{\substack{n=1 \\ c|n}}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{cn}}{(cn)^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} = c^{1-k} \text{Li}_k^p(z^c) - \text{Li}_k^p(z) \end{aligned}$$

と計算出来ます. コールマン関数の一致の定理 (命題 1.19) により, 上記の等式はコールマン関数の等式 $\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi z) = c^{1-k} \text{Li}_k^{p,(a)}(z^c) - \text{Li}_k^{p,(a)}(z) \cdots (\text{Li}_\xi)_c$ に拡張されるので, 特

に両辺の $\lim_{z \rightarrow 1}$ での極限をとると, コールマン関数の連続性 ([Col82, Corollary 7.1 (a)] を参照) から等式

$$\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi) = \lim'_{z \rightarrow 1} \left\{ c^{1-k} \text{Li}_k^{p,(a)}(z^c) - \text{Li}_k^{p,(a)}(z) \right\} = (c^{1-k} - 1) \zeta_p^{\text{KZ}}(k)$$

を得ます. これらを併せて, 所望の等式

$$L_p(k, \omega_p^{1-k}) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right) \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \text{Li}_k^{p,(a)}(\xi) = \frac{1}{c^{1-k} - 1} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right) \cancel{(c^{1-k} - 1)} \zeta_p^{\text{KZ}}(k)$$

が従います. □

雑談 3.31 (p 進 L 関数の正の整数点での特殊値). 本節では KZ 型 p 進ゼータ値との関係性を重視して, 自明指標 $\mathbf{1}$ に対するコールマンの公式 (定理 3.24) のみを紹介しましたが, コールマン自身は一般のディリクレ指標 χ に対して

$$L_p(k, \chi \omega_p^{1-k}) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^k} \right) g(\chi, \zeta_{f_\chi}) f_\chi^{-1} \sum_{\alpha=1}^{f_\chi-1} \bar{\chi}(\alpha) \text{Li}_k^{p,(a)}(\zeta_{f_\chi}^{-\alpha})$$

という形の公式を導き出しています ([Col82, Section I (3), Section VII] を参照). ^{ただ} 但し ζ_{f_χ} は (固定された) 1 の原始 f_χ 乗根で $g(\chi, \zeta_{f_\chi}) = \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \chi(\alpha) \zeta_{f_\chi}^{-\alpha}$ はガウス和です. 証明

の方針は、コブリッツ測度に関するフーリエ反転公式 [Ko79, Section 2. Lemma 2.] を用いて μ_ξ での p 進積分から χ の部分を“括り出し”て、残った p 進積分を p 進ポリログ関数を用いて表すというものです。定理 3.24 の証明を理解出来る方であれば原論文の証明を追うのも難しくはないと思いますので、是非挑戦してみてください。特に $k = 1$ での式

$$L_p(1, \chi) = - \left(1 - \frac{\chi(p)}{p} \right) \frac{g(\chi, \zeta_{f_\chi})}{f_\chi} \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \bar{\chi}(\alpha) \log_p(1 - \zeta_{f_\chi}^{-\alpha})$$

は レオポルトの公式 LEOPOLDT formula [Leo75] と呼ばれ、既にレオポルトによって (p 進解析的な手法で) 導出されていました。コブリッツの論文 [Ko79] の主目的の 1 つは、 p 進測度 μ_ξ を用いてレオポルトの公式の簡明な別証明を与えることだったのです。

尚、本節では p 進 L 関数の正の整数点での特殊値を p 進ポリログ関数を用いて表す方法について解説しましたが、 p 進ポリログ関数ではなく p 進対数的ガンマ関数 p -adic log gamma function を用いて表す研究もあります。コブリッツの論文 [Ko79] の冒頭部に主要な結果が良く纏められていますので、興味のある方はご参照ください ([Ko80] の方が読み易いかもしれません)。また、既に紹介しましたが、コールマンの公式に関しては坂内健一さんによるコブリッツの p 進測度を用いない証明 [坂内 02] もあります。

§ 3.3 多変数の場合 — 古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文の理論

本小節では、古庄英和, 小森靖, 松本耕二, 津村博文の 4 氏による“ p 進多重 L 関数”についての最近の結果 [FKMT17b] について紹介します。極めて複雑な式がこれでもかと言わんばかりに続々と登場する論文ではありますが、大筋としては第 3.2 節で紹介したコブリッツとコールマンの理論を非常に丁寧に多変数化したものであるため、予め要点さえ絞り込んでおけば彼等の結果の概要を掴むことは難しいことではありません。本小節では第 3.2 節の流れに沿いつつ、対応する [FKMT17b] の結果をあまり繁雑にならない程度に紹介したいと思います。

尚、この小節では記号を軽くするために 太字の記号 $\mathbf{s}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}$, etc..... で r 個の成分を持つベクトルを表す記法を用います。

§ 3.3.1 オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数の“特異点解消”とその特殊値

オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s}) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}}$ の「 p 進版」を構成するための準備段階として、まずは $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ の“負の整数点での特殊値”を考察しましょう。第 3.2.1 節の $\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t} = \frac{1}{e^t - 1}$ のメラン変換による解析接続を踏まえるならば、安直に考えると $\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t}$ の“反復積分”によって $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ の解析接続が出来るのではないかと期待されます。より

詳しくは、関数 $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t})$ (“ $:= \mathfrak{H}(\mathbf{t}; \mathbb{1})$ ”) を

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}) &:= \prod_{j=1}^r \mathfrak{H}_{1, \mathbb{1}}(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r) = \prod_{j=1}^r \left(-\frac{\mathfrak{F}^0(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)}{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r} \right) \\ &= \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - e^{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r}} = \frac{1}{1 - e^{t_1 + t_2 + \dots + t_r}} \cdot \frac{1}{1 - e^{t_2 + \dots + t_r}} \cdots \frac{1}{1 - e^{t_r}}\end{aligned}$$

と定めると、形式的には $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t})$ の“多重メルラン変換”による $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ の解析接続

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^r} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1} dt_1 \cdots dt_r = (-1)^{r+s_1+s_2+\dots+s_r} \left\{ \prod_{j=1}^r \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s_j)} \right\} \zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$$

が得られそうです ([FKMT17a, (2.1)] の式変形も参照; 第 3.2.1 節でメルラン変換の際に用いた関数 $\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t}$ ではなく、その (-1) 倍 $\mathfrak{H}_{1, \mathbb{1}}(t) := -\frac{\mathfrak{F}^0(t)}{t}$ を用いているため、積分表示に $(-1)^r$ のずれが生じてしまっています). ただ、実際にはこの“積分表示”による解析接続は意味を持ちません; 非積分関数 $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1}$ が ($\mathbf{t}$ の関数として) 原点 O で発散してしまうことから、そのままでは左辺の $\varepsilon \rightarrow 0$ での極限は収束しません. また、 $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ の正しい解析接続は ジャオジャンギアン 趙 健強 *Jianqiang ZHAO* の研究や 秋山茂樹 秋山茂樹、江上繁樹 江上繁樹、谷川好男 谷川好男の共同研究で得られていますが、彼等の結果によると抑々点 $-\mathbf{k}$ は軒並み $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ の極に位置してしまうので、解析接続した $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ に安直に $\mathbf{s} = -\mathbf{k}$ を代入するだけではあまり意味のある値は得られません. オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数の解析接続と極の位置の同定についての詳細は、小野塚さんの記事 [小野塚 SS18, Proposition 2.1] を参照してください.

この状況で “ $\zeta_{\text{EZ}}(-\mathbf{k})$ ” として意味のある値を導出する手法は幾つか考えられますが (本報告集の小野塚さん、小見山さんの解説記事 [小野塚 SS18, 小見山 SS18] も参照してください), [FKMT17a] では先ずオイラー–ザギエ型多重ゼータ関数そのものではなく オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数 *multiple zeta function of EULER–ZAGIER–LERCH function* $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$ に取り替えることで、そのままでは意味をなさない上記の解析接続の式に意味を持たせることを考察しました. 実際、第 3.3.2 節で導入する関数 $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1}$ は $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ が $\xi_j \neq 1$ ($1 \leq \forall j \leq r$) を満たすときに ($\mathbf{t}$ の関数として) 原点 O のまわりで解析的になることを用いると、上記の解析接続の式が $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$ に対しては意味を持ちます (第 3.3.2 節の (♡) を参照). そして [FKMT17a, Section 3] では、レルヒ型ゼータ関数を用いたリーマンゼータ関数の“極を取り除く”操作 $\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi \neq 1}} \zeta(s, \xi) = (c^{1-s} - 1)\zeta(s) \cdots (L_\xi)_c$

に触発されて “ $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(\mathbf{s}) := \lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{(c-1)^r} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)' } \zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$ ” という気持ち^{*67}で ([FKMT17a,

^{*67} もちろん かよう 斯様な極限を取るためにはパラメータ c が 実数を動く ように拡張する必要があるため、実際には母関数 $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t})$ を “実数パラメータ c を用いて修正したもの” $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; c)$ [FKMT17a, Definition 1.9] を用いて特異点解消が実行されています. 小見山さんの解説記事 [小見山 SS18, 定義 1.1] も参照してください.

Section 3, 冒頭部] も参照) オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数の 特異点解消 *desingularisation* を実行することを試みました. 彼等が構成した 特異点解消オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 *desingularised multiple zeta function of EULER–ZAGIER type* $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(s)$ (または $\zeta_{\text{FKMT}}(s)$) は $\mathbb{C}^r$ 上の 整関数 となるため, $-\mathbf{k}$ での値も定義可能である, というわけです. そして, 構成から $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(-\mathbf{k})$ の値は各 $\zeta_{\text{EZL}}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})$ の値から計算されるはずなので, コブリッツの p 進測度を用いて 各特殊値 $\zeta_{\text{EZL}}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})$ を p 進補間するような測度が構成出来る ならば, それらを足し合わせて “極限 $c \rightarrow 1$ を取る” ことで晴れて “ p 進多重 L 関数” が得られるだろう, と期待されます. この戦略に基づいて “ p 進多重 L 関数” $L_p(\mathbf{s}, \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ を構成した論文が [FKMT17b] です. なお, (「実 / 複素」の世界で構成された) 特異点解消多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(s)$ の解析的な性質等は, 小見山尚こみやま なおさんの解説記事 [小見山 SS18] に良く纏められていますので, 原論文 [FKMT17a] と併せて是非参考になさってください.

雑談 3.32. 論文 [FKMT17a, FKMT17b] では, 多重ゼータ関数の定義式 (EZ) の n_j をより一般の 線形形式 *linear form* $\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 + \dots + \gamma_j m_j$ に取り替えることで定義される 一般化オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma})$ *generalised multiple zeta function of EULER–ZAGIER type* (もしくはその “レルヒ型” への拡張) の設定で議論が展開されています. $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ の場合が本稿で扱われているケースです.

§ 3.3.2 “ p 進多重 L 関数” の定義 — 積測度の積分として

第 3.3.2 節では, オイラー–ザギエ–レルヒ型ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi})$ の復習から始めて, 第 3.2.2 節と並行した議論により “ p 進多重 L 関数” $L_p(\mathbf{s}, \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ が構成されることを概観します.

1 の冪根のなす群についての記号の規約

以下では自然数 c に対し μ_c で 1 の c 乗根のなす乗法群を表し, 記号

$$\begin{aligned} \star (\mu_c^r)' &:= \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \in \mu_c^r \mid \xi_j \neq 1 \ (1 \leq \forall j \leq r)\} \\ \star (\mu_c^r)'' &:= \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \in \mu_c^r \mid \xi_j \xi_{j+1} \cdots \xi_r \neq 1 \ (1 \leq \forall j \leq r)\} \end{aligned}$$

を断りなく用います.

定義 3.33 (オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数). 自然数 $c \neq 1$ と $\boldsymbol{\xi} \in \mu_c^r$ に対し, 多重ディリクレ級数 $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r} \frac{\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \cdots \xi_r^{m_r}}{m_1^{s_1} (m_1 + m_2)^{s_2} \cdots (m_1 + m_2 + \dots + m_r)^{s_r}}$ で定義される複素関数を オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数 *multiple zeta function of EULER–ZAGIER–LERCH type* と呼ぶ.

オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$ も、通常のオイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZ}}(\mathbf{s})$ と同様に領域 $\mathcal{D}_r := \{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r \mid \text{Re}(s_{r-j+1} + \dots + s_r) > j \ (1 \leq \forall j \leq r)\}$ で絶対収束します。また $\boxed{\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)'}$ のときは、ハンケル経路 $\mathcal{C}_\varepsilon$ の直積 $\mathcal{C}_\varepsilon^r$ 上での

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) &:= \prod_{j=1}^r \left(-\frac{\mathfrak{F}_{1,\xi}^0(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)}{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r} \right) = \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - \xi_j \exp(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)} \\ &= \frac{1}{1 - \xi_1 e^{t_1 + t_2 + \dots + t_r}} \cdot \frac{1}{1 - \xi_2 e^{t_2 + \dots + t_r}} \cdots \frac{1}{1 - \xi_r e^{t_r}} \end{aligned}$$

の“多重メラン変換”による表示

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^r} \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}^{-1}) t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1} dt_1 \cdots dt_r = (-1)^{r+s_1+\dots+s_r} \left\{ \prod_{j=1}^r \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-s_j)} \right\} \zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi}) \cdots (\heartsuit)$$

を持ち、特に $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\xi})$ は $\mathbb{C}^r$ 上に 整関数 として解析接続されます ([FKMT17a, Theorem 2.1] 参照)。また

$$\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1, k_2, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r} \mathfrak{B}((k_1, k_2, \dots, k_r); \boldsymbol{\xi}) \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} \frac{t_2^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{t_r^{k_r}}{k_r!}$$

により“捩れ多重関–ベルヌーイ数” *twisted multiple SEKI–BERNOULLI number* $\{\mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})\}_{\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r, \boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)' } \subset \mathbb{Q}(\{\xi_j\}_{j=1}^r)$ を定義すると、オイラー–ザギエ–レルヒ型ゼータ関数の負の整数点での特殊値が $\zeta_{\text{EZL}}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}) = (-1)^{r+\text{wt}(\mathbf{k})} \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}^{-1})$ と表されます (計算の詳細は [FKMT17a, Theorem 2.1] を参照してください)。

ところで関数 $\mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi})$ は、実質的に第 3.2 節で登場した $\mathfrak{H}_{1,\xi}(t)$ の積ですが、一方で $\mathfrak{H}_{1,\xi}(z)$ 自体を“ p 進補間”してしまう測度がコブリッツの p 進測度 μ_ξ でした。したがってコブリッツ測度の 積測度 が $\mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi})$ を p 進補間するであろうことは容易に想像が付くでしょう。

命題 3.34 ([FKMT17b, Proposition 1.15]). $c \neq 1$ を p と素な自然数とし、 $\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)'$

とする。このとき $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の測度 $\mu_\xi := \prod_{j=1}^r \mu_{\xi_j}$ と $\mathbf{t} \in (\mathbb{D}_0^-(p^{-\frac{1}{p-1}}))^r$ に対して

$$\int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^r e^{(t_j + t_{j+1} + \dots + t_r)x_j} d\mu_\xi(\mathbf{x}) = \mathfrak{H}_r(\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) \quad \left(= \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - \xi_j e^{t_j + t_{j+1} + \dots + t_r}} \right)$$

が成り立つ。特に両辺を $\mathbf{t}$ に関して ^{べき} 冪級数展開して係数比較することで

$$\int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^r (x_1 + \dots + x_j)^{k_j} d\mu_\xi(\mathbf{x}) = \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}) \quad (= (-1)^{r+\text{wt}(\mathbf{k})} \zeta_{\text{EZL}}(-\mathbf{k}; \boldsymbol{\xi}^{-1}))$$

が成り立つことも従う。

したがって、これらを“足し合わせて”出来る測度 $\tilde{\mu}_c := \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \mu_\xi$ を

$$(\mathbb{Z}_p^r)' := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}_p^r \mid p \nmid (x_1 + \dots + x_j) \ (1 \leq j \leq r)\}$$

上で“ p 進多重メラン変換”したもののこそが“ p 進多重ゼータ関数”と呼ぶに相応しい対象であると言えるでしょう.

定理-定義 3.35 (p 進多重 L 関数, [FKMT17b, Definition 1.16, Theorem 2.1]). $c \neq 1$ を p と互いに素な自然数とし, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r$ とする. $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_p^r$ に関する p 進正則関数

$$L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c) := \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^r \langle x_1 + x_2 + \dots + x_j \rangle^{-s_j} \omega_p^{a_j}(x_1 + x_2 + \dots + x_j) d\tilde{\mu}_c(\mathbf{x})$$

を p 進多重 L 関数 p -adic multiple L -function と呼ぶ. $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ は以下の“補間公式”を満たす; $\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ に対して

$$L_p(-\mathbf{k}; \omega_p^{\mathbf{k}}; c) = \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \mathfrak{B}(\mathbf{k}; \xi) + \sum_{d=1}^r \left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\rho \in \mu_c^r \\ 1 \text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \mathfrak{B}(\mathbf{k}; {}^\rho \xi).$$

ただ
但し ${}^\rho \xi := (\rho_j \rho_{j+1} \dots \rho_r \xi_j)_{j=1}^r = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_r \xi_1, \rho_2 \dots \rho_r \xi_2, \dots, \rho_r \xi_r)$ とする.

この“補間公式”は、被積分関数にタイヒミュラー指標 ω_p が残らない“最も簡単な場合”の積分を計算したものです. 積分計算自体は、命題 3.3.2 とほぼ同様なので大したことはないのですが、“ p 進多重メラン変換”の際に積分領域を $(\mathbb{Z}_p^r)'$ に制限していることから

$$\mathbb{Z}_p^r \setminus (\mathbb{Z}_p^r)' = \bigcup_{i=1}^r \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p^r \mid p \mid (x_1 + x_2 + \dots + x_i)\}$$

での積分値を除外する必要があります. そのために公式

$$1 - \frac{1}{p} \sum_{\rho_i=1}^p \rho^{x_1+\dots+x_i} = \begin{cases} 1 & (p \nmid (x_1 + \dots + x_i) \text{ のとき}) \\ 0 & (p \mid (x_1 + \dots + x_i) \text{ のとき}) \end{cases}$$

を利用しているのですが、これらの積を展開して整理する計算が非常に鬱陶しく、“補間公式”を徒らに複雑にするのに一役買ってしまったままです. 計算の詳細は原論文をご参照ください. 本来ならば、固定した $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r$ と任意の $\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ に対して $L_p(-\mathbf{k}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ を計算したいところですが、その場合 $\omega_p^{a_j}$ で“捻った”タイプの“一般化捩れ多重ベルヌーイ数(?)”も考察する必要が生じ、計算がさらに繁雑になることは疑いようがありません.

雑談 3.36. p 進多重 L 関数 $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ が構成された恩恵として 多重クンマー合同式 *multiple KUMMER congruence* が導かれます; 即ち $1 \leq j \leq r$ および $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ に対して $k_j \equiv l_j \pmod{(p-1)p^{N_j-1}\mathbb{Z}}$ ($1 \leq j \leq r$) が成り立っているならば、合同式 $L_p(-\mathbf{k}; \omega_p^{\mathbf{k}}; c) \equiv L_p(-\mathbf{l}; \omega_p^{\mathbf{l}}; c) \pmod{p^{\min\{N_j \mid 1 \leq j \leq r\}}}$ が従います ([FKMT17b, Theorem 2.1]). この合同式自体は p 進多重 L 関数 $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ の $\mathbf{s}$ に関する連続性の帰結に

過ぎませんが、両辺が定理-定義 3.35 のような“あられもない姿”をしているため、結果として一般化多重ベルヌーイ数 $\mathfrak{B}(\mathbf{k}; \xi)$ の極めて複雑な線型和の間の合同式が得られたことになります。[FKMT17b] の Example 2.12, 2.13, 2.14 に 2 変数および 3 変数の場合の多重クンマー合同式の例が明示的に示されていますので、興味のある方はご参照ください。

§ 3.3.3 コールマン型公式 — p 進多重星付ポリログ関数の特殊値との関係

コールマンの公式 (定理 3.24) の証明を思い返せば、 $\prod_{j=1}^r \langle x_1 + \dots + x_j \rangle^{-k_j}$ を $\tilde{\mu}_c$ で積分すれば“ p 進多重 L 関数の 正の整数点”での特殊値を (捻られた) “ p 進多重ポリログ関数”の特殊値として表すことが出来るのではないかと誰もが期待されることでしょう。実際その通りの方針で多重 p 進 L 関数のコールマン型の公式が得られますが、多重化された文脈では単なる p 進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,(a)}(z)$ ではなく p 進捩れ多重星付ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$ が登場するのは非常に興味深い現象のように思えます。

定義 3.37 (p 進捩れ多重星付ポリログ関数. [FKMT17b, Theorem-Definition 3.32]). c を自然数とし、 $\xi \in \mu_c^r$ とする。べき冪級数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(\xi; z) := \sum_{0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} z^{n_r}$ は $|z|_p < 1$ で絶対収束する。関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(\xi; z)$ は (分枝 a の) コールマン反復積分により $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j)^{-1} \mid (1 \leq j \leq r)\}$ 上のコールマン関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$ に“解析接続”される (後述)。関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$ を p 進捩れ多重星付ポリログ関数 p -adic twisted multiple star-polylogarithm と呼ぶ。

実際、 $|z|_p < 1$ で $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(z)$ は微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{p,*}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, \xi_r; z) \\ = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{p,*}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, \xi_r; z) & (k_r \geq 2 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{z(1 - \xi_r z)} \text{Li}_{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}}^{p,*}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-2}, \xi_{r-1} \xi_r; z) & (k_r = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_1^{p,*}(\xi; z) = \frac{\xi}{1 - \xi z}$$

を満たすため、 $X_{\xi}(\mathbb{C}_p) := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\{0, \infty\} \cup \{(\xi_j \dots \xi_r)^{-1}\}_{j=1}^r)$ 上定義された有理微分形式 $\omega_0(t) = \frac{dt}{t}$, $\omega_{[1]}(t) = \frac{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r}{1 - \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r t} dt$, $\omega_{[j]}(t) = \frac{1}{t(1 - \xi_j \dots \xi_r t)} dt$ ($2 \leq j \leq r$) の

$$\text{コールマン反復積分 } \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z) = \left[\int_{\text{Col}}^{(a)} \underbrace{\omega_{[1]} \omega_0 \dots \omega_0}_{k_1-1} \underbrace{\omega_{[2]} \omega_0 \dots \omega_0}_{k_2-1} \dots \underbrace{\omega_{[r]} \omega_0 \dots \omega_0}_{k_r-1} \right]_0^z$$

より、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*}(\xi; z)$ は $X_{\xi}(\mathbb{C}_p)$ のコールマン関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p,*,(a)}(\xi; z)$ へと“解析接続”されます ([FKMT17b, Lemma 3.31] も参照)。

命題 3.29 と対応して、コブリッツ測度の適切な積測度での $\prod_{j=1}^r \langle x_1 + \dots + x_j \rangle^{-k_j}$ の積分と p 進捩れ多重星付ポリログ関数が結び付きます。

定理 3.38 ([FKMT17b, Theorem 3.5, Theorem 3.35, Theorem 3.36]). c を p と素な

自然数, $\xi \in \mu_c^r$ とし, $\hat{\mu}_\xi := \prod_{j=1}^r \mu_{\xi_j \dots \xi_r, z}$ とおく. このとき次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^r (x_1 + x_2 + \dots + x_j)^{-k_j} d\hat{\mu}_{\xi, z} &= \frac{1}{p^r} \sum_{\substack{\alpha \in \{1, \dots, p-1\}^r \\ \rho \in \mu_c^r}} \rho^{-\alpha} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(\rho \xi; z) \\ &= \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(\xi; z) + \sum_{d=1}^r \left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\rho \in \mu_c^r \\ 1 \text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(\rho \xi; z). \end{aligned}$$

ただ
但し $\rho^{-\alpha} = \prod_{j=1}^r \rho_j^{-\alpha_j}$, $\rho \xi = (\rho_1 \xi_1, \rho_2 \xi_2, \dots, \rho_r \xi_r)$ とする.

注意 3.39. 定理 3.38 の等式で表される z の関数を $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, \dagger}(\xi; z)$ と表すことにしますと ([FKMT17b] の記号では $\ell_{\mathbf{k}}^{p, \star}(\xi; z)$ と表記されています), 関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, \dagger}(\xi; z)$ はアフィノイド領域 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \bigcup_{j=1}^r \mathbb{D}_{(\xi_j \xi_{j+1} \dots \xi_r)^{-1}}(1)$ よりも少し“広い”領域でのリジッド解析的関数 (つまり 過収束なりリジッド解析的関数) となることが [FKMT17b, Theorem 3.22] で示されています. また $|z|_p < 1$ では冪級数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, \dagger}(\xi; z) = \sum_{\substack{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r \\ p \nmid n_1, \dots, p \nmid n_r}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}} z^{n_r}$ で表され

ます ([FKMT17b, Definition 3.4] も参照). $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, \dagger}(\xi; z)$ を 過収束 p 進捩れ多重星付ポリログ関数 *overconvergent p -adic twisted multiple star-polylogarithm* ([FKMT17b] では p 進リジッド捩れ多重星付ポリログ関数 *p -adic rigid twisted multiple star-polylogarithm*) と呼びましょう. $\mathbf{k}$ の深さが 1 の場合は $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, \dagger}(z)$ は命題-定義 3.26 の過収束 p 進ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p, \dagger}(z)$ と同じものとなります.

なお, 定理 3.38 の証明の流れは命題 3.29 と同様です; 先ず第一段階として“開円盤” $\mathbb{D}_0^-(1) := \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$ で, 冪級数表示を介して主張の等式が成立することを示します. また, 等式のどの辺の関数もクラスナー解析的関数であることは簡単に確認出来るので, クラスナー解析関数の一致の定理 [Kra74, Section 3, Théorème d’unicité] により主張の等式が $(\{\xi_j \dots \xi_r\}^{-1})_{j=1}^r$ を中心とする“小さい開円盤”を除いた領域上の) リジッド解析的関数の等式として成立することが従います.

注意 3.40 (p 進多重星付ポリログ関数が登場する理由). 例えば $r = 2$ かつ $|z|_p < 1$ のときに定理 3.38 の p 進積分を計算すると, $\mu_{\xi_1 \xi_2 z}, \mu_{\xi_2 z}$ の定義 (命題-定義 3.17) から

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} x_1^{-k_1} (x_1 + x_2)^{-k_2} d\mu_{\xi_1 \xi_2 z}(x_1) d\mu_{\xi_2 z}(x_2) \\ &= \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{m_1=0 \\ p \nmid m_1}}^{p^{N_1}-1} \sum_{\substack{m_2=0 \\ p \nmid (m_1+m_2)}}^{p^{N_2}-1} \frac{1}{m_1^{k_1} (m_1 + m_2)^{k_2}} \frac{(\xi_1 \xi_2 z)^{m_1}}{1 - (\xi_1 \xi_2 z)^{p^{N_1}-1}} \frac{(\xi_2 z)^{m_2}}{1 - (\xi_2 z)^{p^{N_2}-1}} \end{aligned}$$

となり, いかにも “ $\text{Li}_{k_1, k_2}(\xi_1, \xi_2; z)$ ” に似た形の式が現れます. ところが, 2 番目の総和記号の和に課せられた条件 $p \nmid (m_1 + m_2)$ は m_1 が p と素な数であれば $m_2 = 0$ でも成り立ちます. したがって $n_1 = m_1, n_2 = m_1 + m_2$ とすると, 右辺は “ $n_1 \leq n_2$ かつ $p \nmid n_1, p \nmid n_2$ ” なる組 (n_1, n_2) を渡る和になります. したがって, 最終的な計算結果として $\text{Li}_{k_1, k_2}^{p, \star, \dagger}(\xi_1, \xi_2; z) = \sum_{\substack{0 < n_1 < n_2 \\ p \nmid n_1, p \nmid n_2}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} z^{n_2}$ ではなく星付の p 進多重ポリログ関数

$$\text{Li}_{k_1, k_2}^{p, \star, \dagger}(\xi_1, \xi_2; z) = \sum_{\substack{0 < n_1 \leq n_2 \\ p \nmid n_1, p \nmid n_2}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} z^{n_2} \text{ が出来て来ってしまうのです.}$$

ただ, この説明はあくまで「積分の計算をしてみたら星付になった」という結果論を述べただけです. この後の定理 3.41 で, $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ の正の整数点での特殊値が $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(z; \xi)$ の特殊値で表されることを概観しますが, 元々は 星付でない 多重ゼータ関数 $\zeta_{\text{EZL}}(\mathbf{k}; \xi)$ の特殊値を “補間する” p 進多重 L 関数 $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ の “正の整数点での特殊値” に何故 星付の p 進多重ポリログ関数の特殊値が現れるのか, という理論的・哲学的な背景はまだ解き明かされていません.

これを用いて $L_p(\mathbf{s}; \omega_p^{\mathbf{a}}; c)$ に対するコールマン型公式は導かれます.

定理 3.41 (p 進多重 L 関数に対するコールマン型公式, [FKMT17b, Theorem 3.40, Theorem 3.41]). $c \neq 1$ が p と素な自然数ならば $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$ に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} L_p(\mathbf{k}; \omega_p^{-\mathbf{k}}; c) &= \frac{1}{p^r} \sum_{\substack{\alpha \in \{1, \dots, p-1\}^r \\ \rho \in \mu_c^r, \xi \in (\mu_c^r)''}} \rho^{-\alpha} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(\rho \xi; 1) \\ &= \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(\tilde{\xi}; 1) + \sum_{d=1}^r \left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\rho \in \mu_c^r \\ 1 \text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{p, \star, (a)}(\rho \tilde{\xi}; 1) \end{aligned}$$

ただし $\tilde{\xi} = \left(\frac{\xi_j}{\xi_{j+1}}\right)_{j=1}^r$, $\rho \tilde{\xi} = \left(\frac{\rho_j \xi_j}{\xi_{j+1}}\right)_{j=1}^r$ ($\xi_{r+1} = 1$ とする) とし, $\rho^{-\alpha}, \rho \xi$ は定理 3.38 と同じものであるとする.

なお、 $\xi \in (\mu_c^r)''$ であるときには、 $z = 1$ は右辺に現われるすべての p 進振れ多重星付ポリログ関数 $\text{Li}_k^{p,*(a)}(\xi; z)$ の“リジッド解析的な部分”に位置するため、コールマン関数の性質から右辺の値はコールマン関数の分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ には依存しないことを最後に注意しておきます。

注意 3.42 (p 進多重 L 関数の理論の今後の課題について). 論文 [FKMT17b] の最大の課題は“非特異化”のために補助的に用いられた c の情報が p 進多重 L 関数 $L_p(s, \omega_p^a; c)$ の中に残ってしまっていることです. 1 変数の場合は“ c に依存する部分を分離する公式” $(L_\xi)_c, (\text{Li}_\xi)_c$ が存在していたため、割合簡単に“ c の情報に依存する部分”を切り出すことが出来ましたが、多変数の場合は多種多様なコブリッツ測度 μ_ξ の積測度で複雑な多重積分を実行しているため、“ c (或いは μ_c^r) の影響する部分”を分離することは到底期待出来ません (多重 L 関数がオイラー積を持たないこととも関係しているはずです). そこで、[FKMT17b] では「実 / 複素」の世界での特異点解消 [FKMT17a] の戦略を真似て $L_p(s; \omega_p^a; c) = \sum_{\xi \in (\mu_c^r)'} L_p(s; \omega_p^a; \xi)$ のパラメータ c を $\mathbb{Z}_p$ に拡張し (このこと自体は、測度 $\tilde{\mu}_c$ のアミース変換で得られる冪級数 $g_c(T)$ のパラメータ c が“ p 進補間可能”なことを用いて実現されています; [FKMT17b, Theorem 1.24] を参照してください), その上で “ $L_p^{\text{des}}(s; \omega_p^a) = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{(c-1)^r} L_p(s; \omega_p^a; c)$ ” なる極限を取ることを考えようとしています. ところが、一般にこのような極限操作を実行すると p 進測度論の範疇から完全に逸脱してしまいますので、抑々所望の極限が存在するかどうかは明らかではなくなってしまう [FKMT17b, Problem 1.31]. また、仮にこの極限が (奇跡的にリジッド解析的な関数に) 収束したとしても、“ $L_p^{\text{des}}(s; \omega_p^a)$ ” は $\zeta_{\text{EZ}}(s)$ に適当な因子を掛けて特異点解消したもの (或いは $\zeta_{\text{EZ}}(s)$ の適当な線型和を取って極を消したもの) である $\zeta_{\text{EZ}}^{\text{des}}(s)$ の負の整数点での特殊値を補間したもの、という位置付けになってしまいますので、それがどのような幾何的意味 (或いは 岩澤理論的意味^{*68}) を持つかは未知数と言わざるを得ません.

とは言え、 p 進多重 L 関数と呼ぶに相応しい対象を構成する道筋を開拓した [FKMT17b] の意義は測り知れません. 今後は [FKMT17b] の手法のさらなる改良 (特に パラメータ c を取り去る 方向への改良) や、或いは別のアプローチからの“より良い” p 進多重 L 関数の構成 (または “定義”) などの研究が待たれます. [FKMT17b] という革新的な結果が出て来たことで、 p 進多重 L 関数の研究は漸く黎明期にさしかかったと言っても過言ではないでしょう. まだまだやるべき課題は山のように残されていると思いますので、我こそはと思われる方には是非とも積極的に p 進多重 L 関数の研究に参戦してこの地平を切り開いていっていただきたいと願いつつ、筆をおくことにしたいと思います.

^{*68} 岩澤理論と言えば“代数的対象”と“解析的对象”の結び付きを探究する分野です. もし“解析的对象”として“ p 進多重 L 関数”が活躍するような岩澤理論が考えられるとするならば、対応する“代数的対象”は何で

付録 A p 進解析に関する補遺

この付録 A は、本稿を読む上で躓きやすい「 p 進」世界ならではの現象 (特に「実 / 複素」世界での直観を裏切る現象) について簡単に纏めたものです。本稿を読み進めている中で適宜参照していただければと思います。此处では本稿を読むために必要とされる最小限の事項を紹介するに留め、アフィノイド空間の定義など (リジッド解析幾何学の) 進んだ内容には一切踏み込んでいません。「 p 進」世界の解析、幾何学に興味を持たれた方は [BGR84, Rob00, 加藤 13] などの文献を当たってください。第 A.1 節では、距離空間の一種である 超距離空間 *ultra metric space* の位相的性質 (特に「円盤が開かつ閉集合であること」や「完全不連結性」など) について纏めています。第 A.2 節では、本稿で登場する様々な“ p 進関数”の概念を、定義を中心に簡単に纏めました。

§ A.1 超距離空間の位相的特徴

「 p 進」世界 $\mathbb{C}_p$ の構成に用いられる p 進付値 $|\cdot|_p$ は、 $\mathbb{C}_p$ に 超距離空間 の構造を与えます。まずは一般に超距離空間の定義を紹介しましょう。

定義 A.1 (超距離と超距離空間). 集合 X 上の関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が以下の (M1), (M2), (UM3) を満たすとき, d を X 上の 超距離 *ultra metric* (または 非アルキメデスの距離 *nonarchimedean metric*) と呼ぶ;

(M1) $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) (対称性) $\forall x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$,

(UM3) (強三角不等式 *strong triangle inequality*)

$\forall x, y, z \in X$ に対し $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

集合 X と超距離 d の組 (X, d) を 超距離空間 *ultra metric space* と呼ぶ。

注意 A.2. 定義 A.1 の条件 (M1), (M2) と

(M3) (三角不等式 *triangle inequality*) $\forall x, y, z \in X$ に対し $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ を満たす関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が (通常の意味での) 距離関数 *distance function* でした。条件 (UM3) から明らかに (M3) が従いますので、超距離は距離関数の一種であり、超距離空間は距離空間の一種となります。したがって、超距離空間は距離空間の満たす性質は

しょうか—? 実際, そんな“代数的対象”の候補と目されるものとして, 代数的 K 理論や代数的基本群の理論といった分野からのアイデアも反映しつつ“円単数の高次版”と表現すべき対象が幾つか構成されています (スーレ元 SOULÉ *element* [Sou81] やアンダーソン・伊原の高次円単数 *higher cyclotomic element* [AI90, Section 2.6, Definition] など). こういった“高次の”代数的な元と多重ゼータ値が交錯する“岩澤理論”が展開出来たら——そんなことを想像するだけでもワクワクしてきませんか?

すべて満たしますが、以下でも観察するように、強三角不等式 (UM3) が我々の (「実 / 複素」の世界 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ で培^{つちか}ってきた) 直観を裏切る現象を次々と引き起こすのです (!!)

例 A.3. $X = \mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p$ (またはその中間体) とし, $d_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $d_p(x, y) := |x - y|_p$ によって定義すると, (X, d_p) は超距離空間となります (d_p が超距離の公理を満たすことは [Ko77, Chapter I, Section 2] を参照).

注意 A.2 で見たように, 超距離空間 (X, d) は距離空間ですので, 中心が $a \in X$ で半径が r の “開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ や “閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ が定義され, 『任意の点 $x \in U$ に対して x を中心とした “開円盤” $\mathbb{D}_x^-(\varepsilon)$ が U に含まれるような正の整数 $\varepsilon > 0$ が存在する』を満たす部分集合として X の開集合 U が定義されます (勿論閉集合は「開集合の補集合」として定義します). この様に, 超距離空間には自然に距離空間としての位相が入りますが, その位相的な性質は, 我々が慣れ親しんできた「実 / 複素」世界の距離空間のイメージをととはかけ離れたものとなっています.

補題 A.4. 超距離空間 (X, d) に於いて以下が成り立つ;

- (1) $r > 0$ のとき “閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ は距離位相に関して閉かつ開集合である;
- (2) “開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ は距離位相に関して閉かつ開集合である;
- (3) “(閉または開) 円盤” $\mathbb{D}_a^\pm(r)$ の点 b に対して $\mathbb{D}_a^\pm(r) = \mathbb{D}_b^\pm(r)$ が成り立つ (複号同順), 即ち “円盤の点はすべて中心” である;

証明は何れも 強三角不等式の練習問題 程度のものなので, 「 p 進」世界に慣れるためにも先ずは自分で証明を付けてみることをお勧めします.

【証明】 距離空間の位相の定義および一般論により, $\mathbb{D}_a^-(r)$ が X の開集合であり, $\mathbb{D}_a^+(r)$ が X の閉集合であることは直ちに從います.

- (1) “閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r)$ の任意の元 b に対し, b を中心とする “開円盤” $\mathbb{D}_b^-(r)$ を考えましょう. このとき任意の $x \in \mathbb{D}_b^-(r)$ に対して

$$d(x, a) \stackrel{(\text{UM3})}{\leq} \max\{\underbrace{d(x, b)}_{< r}, \underbrace{d(b, a)}_{\leq r}\} \leq r$$

より $x \in \mathbb{D}_a^+(r)$ が從います. 即ち $\mathbb{D}_b^-(r) \subset \mathbb{D}_a^+(r)$ より $\mathbb{D}_a^+(r)$ は開集合となります.

- (2) “開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ の境界の元 $x \in \partial \mathbb{D}_a^-(r)$ を任意に選びましょう. 部分集合の境界の定義から, 特に $\mathbb{D}_a^-(r)$ と x を中心とする半径 r の “開円盤” $\mathbb{D}_x^-(r)$ の共通部分は空集合

ではありません. そこで $\mathbb{D}_a^-(r) \cap \mathbb{D}_x^-(r)$ の元 z を 1 つ選ぶと

$$d(x, a) \stackrel{\text{(UM3)}}{\leq} \max\{\underbrace{d(x, z)}_{< r}, \underbrace{d(z, a)}_{< r}\} < r$$

より $x \in \mathbb{D}_a^-(r)$ が従います. 即ち $\partial \mathbb{D}_a^-(r) \subset \mathbb{D}_a^-(r)$ が成り立っているため, 位相空間の一般論により $\mathbb{D}_a^-(r)$ は閉集合となります.

- (3) “閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r)$ の場合を示します (“開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ の場合も同様です). 点 $b \in \mathbb{D}_a^-(r)$ を中心とする半径 r の閉円盤 $\mathbb{D}_b^+(r)$ の任意の元 x に対して

$$d(x, a) \stackrel{\text{(UM3)}}{\leq} \max\{\underbrace{d(x, b)}_{\leq r}, \underbrace{d(b, a)}_{\leq r}\} \leq r$$

より $x \in \mathbb{D}_a^+(r)$, 即ち $\mathbb{D}_b^+(r) \subseteq \mathbb{D}_a^+(r)$ を得ます. 点 a と点 b を入れ替えて, まったく同じ議論を展開することにより $\mathbb{D}_a^+(r) \subseteq \mathbb{D}_b^+(r)$ も従います. $\square$

注意 A.5. 通常の距離空間での開円盤, 閉円盤の定義を踏襲していることから, 便宜上 $\mathbb{D}_a^-(r), \mathbb{D}_a^+(r)$ もそれぞれ “開円盤” “閉円盤” と呼んでしまうことが少なくありませんが, 超距離空間では何れも閉かつ開集合であるため, この呼称が位相的な実態をあまり良く反映していないという点には注意が必要です. また補題 A.4 (1), (2) を組み合わせることで, 例えば 円環領域 $A_a[r, R) := \{x \in X \mid r \leq d(x, a) < R\}$ など閉かつ開集合となることが分かります. このように超距離空間に於いては非常に沢山の部分集合が “閉 closed” かつ “開 open” 集合となるため, 頻繁に登場する “閉かつ開集合” のことを屢々 *clopen set* などと呼称したりもします. この点だけを見ても, 超距離空間が (ユークリッド距離空間に慣れ親しんだ) 我々の直観を大いに裏切る存在であると実感出来るでしょう.

次の命題は, 超距離空間の極めて特徴的かつ “様々な問題を誘発する” 性質を表しています.

命題 A.6. 超距離空間 (X, d) は 完全不連結 *totally disconnected* である; 即ち 2 点以上を含む X の部分集合で連結なものは存在しない.

【証明】 超距離空間 X の部分集合 M で, 相異なる 2 点 x, y を含むものを考えましょう (M には X の相対位相を入れておきます). このとき (超) 距離の性質 (M1) により $r := d(x, y) > 0$ は (0 ではない) 正の数となります. そこで $U := M \cap \mathbb{D}_x^-(\frac{r}{2})$, $V = M \setminus U$ とおくと, 定義から $x \in U, y \notin U$ (つまり $y \in V$) であり, かつ補題 A.4 (1) により U は M の (相対位相に関する) 閉かつ開集合であるため, 特に $V := M \setminus U$ も開集合となります. したがって M は空でない開集合 U, V の非交和 $M = U \sqcup V$ として表されてしまうため, 連結ではありません. $\square$

雑談 A.7. 命題 A.6 は「超距離空間 X の点 x を含む連結成分は 1 点集合 $\{x\}$ である」ことを主張しています。ただ、一般には 1 点集合 $\{x\}$ は開集合とは限りません; 寧ろ (任意の) 1 点集合 $\{x\}$ が開集合となる場合は、 X の位相が 離散位相 *discrete topology* になってしまうため、位相空間としてはあまり面白くないものとなってしまいます。例 A.3 の位相空間 (X, d_p) は 1 点集合が開集合ではないような超距離空間の典型例を与えています。

§ A.2 $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の関数について

本節では、本稿第 1.2 節に登場する $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ (或いはその部分集合) 上の様々な関数について解説します。第 A.2.1 節では円盤 $\mathbb{D}_a^\pm(r)$ 上のリジッド解析的関数について簡単に纏めています。第 A.2.2 節では、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ の剰余円盤による非交和としての表示を用いて、点 $0, 1, \infty$ で対数的極を持つ $X(\mathbb{C}_p)$ 上の局所解析的関数を定義します。第 A.2.3 節では $X(\mathbb{C}_p)$ 上の (より正確には $X(\mathbb{C}_p)$ の還元 $X_{\overline{\mathbb{F}}_p} = \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の管 $]X_{\overline{\mathbb{F}}_p}[$ に対する $\{0, 1, \infty\}$ に沿った) 過収束リジッド解析的関数を、ピエール・ベルテロ *Pierre BERTHELOT* [Ber96] にしたがって定義します。

§ A.2.1 円盤上のリジッド解析的関数

以下では、超距離空間 $(\mathbb{C}_p, d_p)$ 上の円盤 $\mathbb{D}_a^\pm(r)$ 上の“解析的関数”について、簡単に考察します。 p 進付値の値群が $|\mathbb{C}_p^\times|_p = p^{\mathbb{Q}}$ であったことを思い出しておきましょう。

定義 A.8. 点 $a \in \mathbb{C}_p$ を中心とする円盤 $\mathbb{D}_a^\pm(r)$ を考えよう。

- (1) $r \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p$ に対して $|\xi|_p = r$ を満たす $\xi \in \mathbb{C}_p^\times$ を 1 つ選ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\} &:= \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{\xi^{-1}(z-a)\}^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid |c_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\} \\ &= \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid |a_n|_p r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\} \end{aligned}$$

とおくと、任意の $x \in \mathbb{D}_a^+(r)$ に対して $f(x)$ は収束する ($\mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\}$ は $|\xi|_p = r$ を満たす元 ξ の取り方に依らない)。そこで“閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r)$ 上のリジッド解析的関数 *rigid analytic function* を $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(r)) \stackrel{\text{定義}}{=} \mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\}$ の元として定める。

- (2) $r > 0$ に対して

$$\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^-(r)) := \varprojlim_{\substack{(0 <) \rho < r \\ \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^\times|_p}} \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(\rho))$$

$$= \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid \begin{array}{l} |a_n|_p \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ (\forall \rho < r, \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^{\times}|_p) \end{array} \right\}$$

の元を“開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ 上のリジッド解析的関数と定める。但し、1 行目では制限写像 $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(\rho')) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(\rho)); f \mapsto f|_{\mathbb{D}_a^+(\rho)}$ ($\rho < \rho' < 1$ かつ $\rho, \rho' \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^{\times}|_p$) に関する射影極限を考えている。

定義 A.8 (1) の収束^{べき}冪級数環 $\mathbb{C}_p\{\xi^{-1}(z-a)\}$ に於いて、 $a=0$ かつ $\xi=1$ としたもの

$$\mathbb{C}_p\{z\} := \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in \mathbb{C}_p[[z]] \mid |c_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

は特に テイト代数 TATE algebra と呼ばれています*69。テイト代数は“単位閉円盤” $\mathbb{D}_0^+(1)$ 上のリジッド解析的関数のなす関数環と解釈されるべき対象ですが、位相環*70として見ても非常に素性の良い環になっています (ネーター性、すべてのイデアルが閉集合であることなど)。

注意 A.9 (リジッド解析的関数について)。

- (a) $r \notin p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^{\times}|_p$ のときも、定義 A.8 (1) の 1 行目の流儀で $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(r))$ を定義することが可能ですが、一方でこの場合は“閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r)$ の“縁” $\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a|_p = r\}$ が空集合となっているため、集合としては $\mathbb{D}_a^+(r)$ は“開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ と一致します。したがって $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^+(r)) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^-(r))$ が成り立つ筈です。実際、値群 $|\mathbb{C}_p^{\times}|_p = p^{\mathbb{Q}}$ が $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で稠密であることを用いて、両者の定義が一致していることが確認出来ます。
- (b) 定義 A.8 (2) の定義は一見分かりにくいですが、“開円盤”が“閉円盤の増大列” $\mathbb{D}_a^-(r) = \bigcup_{\substack{\rho < r \\ \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^{\times}|_p}} \mathbb{D}_a^+(\rho)$ として表されることに着目し、「 $\mathbb{D}_a^-(r)$ に含まれるどの“閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(\rho)$ に制限しても $\mathbb{D}_a^+(\rho)$ 上のリジッド解析的関数になるような関数」として“開円盤” $\mathbb{D}_a^-(r)$ 上のリジッド解析的関数を特徴付けようとしているのです。
- (c) 非常に粗^{あら}っぽいイメージを述べるのであれば、我々は円盤上の解析的関数を“収束するテイラー展開を持つ関数”として定義しようとしているわけです。定義 A.8 ではまさに“ $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ 上で収束するテイラー展開を集めたもの”として $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r))$ を構成しており、「実 / 複素」世界での解析的関数の定義と照らし合わせてみても受け入れ易い

*69 最近ではテイト代数の記号として $\mathbb{C}_p\langle T \rangle$ や $\mathbb{C}_p\langle\langle T \rangle\rangle$ を用いることが多いですが ([BGR84] では $\mathbb{C}_p\langle T \rangle$ が、[加藤 13] では $\mathbb{C}_p\langle\langle T \rangle\rangle$ が用いられています)、本稿ではこれらの記号は非可換多項式環や非可換冪級数環に用いているため、テイト代数には異なる記号 $\mathbb{C}_p\{z\}$ を用いて区別することにしました。

*70 テイト代数には通常ガウスノルム $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right\|_{\text{Gauss}} := \sup_{n \geq 0} |c_n|_p$ で位相を入れますが、最大値の原理 *maximum modulus principle* [BGR84, Section 5.1.4, Proposition 3] によりガウスノルムは上限ノルム $\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{z \in \mathbb{D}_0^+(1)} |f(z)|_p$ と一致しますので、どちらのノルムで考えても等価となります。

定義であると言えるでしょう。唯、^{ただ}「実 / 複素」の世界では“解析的関数”と言えば単に“(定義域の) 各点でテイラー展開が可能である関数”のことを指すのが一般的ですが、リジッド解析的関数は“各点でテイラー展開可能な関数”の中でも 特別なもの であることは意識しておくべきでしょう; 例えば、補題 A.4 の証明からも明らかなように任意の $(0 <) \rho < r$ に対して“閉円盤” $\mathbb{D}_a^+(r)$ は非交和 $\mathbb{D}_a^+(r) = \mathbb{D}_a^-(\rho) \sqcup A_a[\rho, r]$ に分割することが可能です (但し ^{ただ} $A_a[\rho, r] := \{z \in \mathbb{C}_p \mid \rho \leq |z - a|_p \leq r\}$)。したがって、例えば関数 $f(z) := \begin{cases} 0 & (z \in \mathbb{D}_a^+(\rho) \text{ のとき}), \\ 1 & (z \in A_a[\rho, r] \text{ のとき}) \end{cases}$ なども $\mathbb{D}_a^+(r)$ 上の各点で

テイラー展開可能な関数となります。円盤を開集合の非交和に分割する方法は幾らでも考えられますし、各成分上毎に“テイラー展開可能な関数”も (定数関数を含め) 無数に存在しますので、上記のような構成を考えただけでも“ $\mathbb{D}_a^\pm(r)$ の各点でテイラー展開可能な関数”が ^{たくさん}あまりにも沢山存在することが観察されます。こんなものをすべて考えてしまうと収拾がつかみませんので、円盤上の“解析的関数”として 円盤全体で収束する冪級数関数 のみを採用する という立場で導入されたのが“リジッド”解析的関数の概念と言えます。尚、^{なお}「実 / 複素」世界で“解析的関数”とされていた“(考えている集合の) 各点でテイラー展開可能な関数”は、「 p 進」世界では (リジッド解析的関数と区別して) 局所解析的関数 *locally analytic function* と呼ばれています。

雑談 A.10 (テイト代数の極大スペクトルとしての“閉円盤”とリジッド幾何学). テイト代数 $\mathbb{C}_p\{z\}$ に対して ヒルベルトの弱零点定理 HILBERT's *weak Nullstellensatz* の類似が成り立ちます ([BGR84, Section 7.1.1, Proposition 3] 参照); 即ち $\mathbb{C}_p\{z\}$ の極大イデアルは、すべて $z - x$ (^{ただ}但し $x \in \mathbb{D}_0^+(1)$) の形の 1 次式で生成される単項イデアルとして表されます。したがって、 $\mathbb{C}_p\{z\}$ のすべての極大イデアルを集めた集合を $\mathrm{Spm} \mathbb{C}_p\{z\}$ と表すことにすると (極大スペクトル *maximum spectral*), (集合としての) 全単射

$$\mathrm{Spm} \mathbb{C}_p\{z\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_0^+(1); \mathbf{m}_x = (z - x) \mapsto x$$

を得ます (極大スペクトル $\mathrm{Spm} \mathbb{C}_p\{z\}$ に適切に位相を入れることで同相写像にもなります)。つまり (リジッド解析的な) 関数環から“単位閉円盤”という空間が「復元」出来るわけですが、これは代数幾何学に於いてアファイン空間 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ が n 変数多項式環 $\mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_n]$ のスペクトルとして構成されたこと

$$\mathrm{Spec} \mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n; \mathbf{m}_x := (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \mapsto x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と酷似しています。代数幾何学 (スキーム論) では、多項式環の商環のスペクトル $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_n]/I$ (或いは一般の可換環のスペクトル $\mathrm{Spec} R$) である アファイン

ンスキーム *affine scheme* を“空間”の構成要素とし、これらの“貼り合わせる”としてより一般的な“空間”(スキーム)を実現していましたが、リジッド幾何学でも(多変数)テイト代数の商環の極大スペクトル $X = \text{Spm } \mathbb{C}_p\{z_1, z_2, \dots, z_n\}/I$ (とその上の構造層 $\mathcal{O}_X$ の組)である アフィノイド^{*71}空間 *affinoid space* の“貼り合わせ”としてリジッド解析空間 *rigid analytic space* が構成されます。このように、テイトのリジッド幾何学はアレキサンデル・グロタンディーク Alexander GROTHENDIECK によるスキーム論の影響を色濃く反映したものとなっています。

ちなみにリジッド幾何学では、これまでも何度も登場してきた「 p 進」位相の引き起こす弊害によって構造層 $\mathcal{O}_X$ が素朴な方法では構成出来ないという問題が生じます(関数の“貼り合わせ”構造を抽象化した概念が層でしたから、関数が容易には“貼り合わない”「 p 進」世界で層を考えるのが難しいのもむべなるかな、といったところでしょうか)。そんなスキーム論では現れなかった問題を解消するために、テイトの h 構造 *h-structure* やらグロタンディーク位相 GROTHENDIECK topology やらを用いて“開集合を制限する”必要があります。その辺りも非常に面白い話題なのですが……完全に話題が逸れてしまいますので、これ以上深入りするのは止めましょう。興味を持たれた方は [加藤 13, 第 3,4 章] や [BGR84, Chapter 8,9] をご参照ください。

以下では $\frac{d}{dz}z = 1$ と正規化された導分に関する冪級数の(形式的な)項別微分を考えます。冪級数 $f(z)$ に対して $f^{(n)}(z) := \frac{d^n f}{dz^n}(z)$ と表すことにしましょう。次の命題は、円盤上のリジッド解析関数が各点のまわりでテイラー展開可能であること(つまり局所解析的関数であること)を保障するものです。

命題 A.11 (円盤上のリジッド解析的関数の局所解析性). 円盤 $\mathbb{D}_a^\pm(r)$ 上定義されたりジッド解析的関数 $f(z)$ と $b \in \mathbb{D}_a^\pm(r)$ に対して、^{べき}冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = f(b) + f'(b)(z-b) + \frac{f''(b)}{2!} (z-b)^2 + \dots$$

は $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^\pm(r))$ の元を定め、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$ が成り立つ(複号は同順とする). 特に $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^\pm(r)) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_b^\pm(r))$ が成り立つ。

^{*71} 接尾辞 -oid はギリシア語の -οειδής「...の形 ^{エイドス} εἶδος をしている」に由来し、「...のような」「...に似ている」という意味になります。つまりアフィノイド空間とは「アフアイン(アフィン)っぽい空間」というニュアンスで付けられた名称です。

【証明】 以下複号は同順とします. 先ず $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-a)^j \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r))$ の n 階導分

$f^{(n)}(z) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j!}{(j-n)!} a_j(z-a)^{j-n}$ も $\mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ 上のリジッド解析的関数となることが確認出

来ます; 実際 $\rho \leq r, \rho \in p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_p^{\times}|_p$ なる実数 ρ に対して $|a_j|_p \rho^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ が成り立つならば,

$$\underbrace{\left| \frac{j!}{(j-n)!} \right|_p}_{\leq 1} |a_j|_p \rho^{j-n} \leq \rho^{-n} \cdot |a_j|_p \rho^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \text{ より } f^{(n)}(z) \text{ も } f(z) \text{ と同じ収束条件を満たし}$$

ます. したがって $b \in \mathbb{D}_a^{\pm}(r)$ に対して $f^{(n)}(b)$ は収束し, $\tilde{\rho} := \max\{|b-a|_p, \rho\}$ とおくと

$$\left| \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \right|_p \rho^n \stackrel{(\text{UM3})}{\leq} \rho^n \sup_{j \geq n} \underbrace{\left| \binom{j}{n} \right|_p}_{\leq 1} |a_j(b-a)^{j-n}|_p \leq \tilde{\rho}^n \sup_{j \geq n} \{|a_j|_p \tilde{\rho}^{j-n}\} = \sup_{j \geq n} \{|a_j|_p \tilde{\rho}^j\}$$

が成り立ちます. この不等式の右辺は $n \rightarrow \infty$ とすると $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p \tilde{\rho}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p \tilde{\rho}^n = 0$

となるので, 結局 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$ が $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$ の元となることが分かります. 形式的冪

級数として等式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$ が成り立つので, f も $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$ の元となるこ

とが従います. 最後に a と b の役割を入れ替えて議論することで, $\mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$ の任意の元が $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r))$ の元となることも証明出来るので, $\mathcal{A}(\mathbb{D}_a^{\pm}(r)) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_b^{\pm}(r))$ が成り立ちます. $\square$

§ A.2.2 $X(\mathbb{C}_p)$ 上の (対数的極を持つ) 局所定数関数

本小節では p 進対数写像の分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ を固定しておきます (つまり p 進対数関数 $\text{Log}_p^{(a)}: \mathbb{C}_p^{\times} \rightarrow \mathbb{C}_p^{\times}$ として $\text{Log}_p^{(a)}(p) = a$ を満たす局所解析的関数を考えます). さて, (リジッド解析的) 射影曲線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ に対して 還元写像 *reduction map* (または 特殊化写像 *specialisation map*)

$$\text{red}: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p); x \mapsto \begin{cases} x & (\text{mod } \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p} = \mathbb{D}_0^-(1)) \quad (x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \mathbb{D}_0^+(1) \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考えましょう (但し $\overline{\mathbb{F}}_p$ は p 元体 $\mathbb{F}_p$ の代数的閉包とします). 任意の $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p) = \overline{\mathbb{F}}_p \cup \{\infty\}$ の元 $\bar{x}$ の還元写像に関する逆像 $\text{red}^{-1}(\{\bar{x}\})$ が, a の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ への任意の持ち上げ $\tilde{x}$ を中心とする半径 1 の “開円盤” $\mathbb{D}_{\tilde{x}}^-(1)$ となることは, 還元写像の定義から簡単に確認出来ます. この “開円盤” を $\bar{x}$ に関する 剰余円盤 *residual disk* と呼び $]\bar{x}[:= \text{res}^{-1}(\{\bar{x}\})$ と表します. すると $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ は剰余円盤の非交和として表されることが簡単に確認出来ます; $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \bigsqcup_{\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)}]\bar{x}[$.

この構造を用いて, 任意の $a \in \mathbb{C}_p$ に対して $X(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の (分枝 a の対数的極を持つ) 局所解析的関数の環 $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ を, 各剰余類 $\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ に対して定ま

る関数環 $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$ の直積 $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) = \prod_{\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)} \mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$ として定めます. 各 $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$

は以下のように定義されます; 実数 $0 < r < 1$ に対し, 点 $x_0 \in \{0, 1, \infty\}$ を中心とする円環

$$A_{x_0}(r, 1) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}_p \mid r < |z - x_0|_p < 1\} & (x_0 \in \{0, 1\} \text{ のとき}) \\ \{z \in \mathbb{C}_p \mid 1 < |z|_p < r^{-1}\} & (x_0 = \infty \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{上のリジッド解析的関数}$$

$\mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1))$ は

$$\mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1)) = \begin{cases} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - x_0)^n \mid \begin{array}{l} |a_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ |a_n|_p r^n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right\} & (x_0 \in \{0, 1\} \text{ のとき}) \\ \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \mid \begin{array}{l} |a_n|_p r^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ |a_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right\} & (x_0 = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表されますので, これを用いて $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$ を

$$\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x) := \begin{cases} \mathcal{A}(\bar{x}) = \mathcal{A}(\mathbb{D}_x^-(1)) & (\bar{x} \neq 0, 1, \infty \text{ のとき}), \\ \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1)) \left[\text{Log}_p^{(a)}(z - x_0) \right] & (\bar{x} = x_0 \in \{0, 1\} \text{ のとき}), \\ \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{A}(A_{\infty}(r, 1)) \left[\text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right) \right] & (\bar{x} = \infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

と定めます. 但し^{ただ}帰納極限は制限写像 $\mathcal{A}(A_{x_0}(r', 1)) \rightarrow \mathcal{A}(A_{x_0}(r, 1)); f \mapsto f|_{A_{x_0}(r, 1)}$ ($r < r'$) に関して取っています. 点 $\bar{x} = 0, 1, \infty$ に於ける局所関数環 $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x)$ は, 剰余円盤 $\bar{x}$ 上の過収束関数 (次小節 A.2.3 も参照) に, 点 $x_0 = 0, 1, \infty$ で発散する対数関数 $\text{Log}_p^{(a)}(z - x_0)$ (または $\text{Log}_p^{(a)}\left(\frac{1}{z}\right)$) を“発散項”として添加して得られる環です. 第 1.2.3 節で導入したコー

ルマン関数のなす環 $\mathcal{A}_{\text{Col}}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ は, ^{おおざっぱ}大雑把には “ $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ の元の反復コールマン積分によって得られるもの” のなす $\mathcal{A}_{\log}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p))$ の部分環として定義されます.

なお, 局所解析的な微分 1 形式の加群 $\Omega_{\log}^{(a)}(X(\mathbb{C}_p)) = \prod_{\bar{x} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)} \Omega_{\log}^{(a)}(U_x)$ もまったく同様に^{ただ}して定義されます (各剰余類では $\Omega_{\log}^{(a)}(U_x) = \mathcal{A}_{\log}^{(a)}(U_x) dz$ と定めます).

§ A.2.3 $X(\mathbb{C}_p)$ 上の過収束関数

本小節では $X(\mathbb{C}_p)$ 上の過収束関数 *overconvergent function* のなす環 $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ を定義します. p 元体の代数的閉包 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 上定義された射影直線から $0, 1, \infty$ の 3 点を取り除いた空間 $X_{\bar{\mathbb{F}}_p} := \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の還元写像による逆像を $]X_{\bar{\mathbb{F}}_p}[:= \text{red}^{-1}(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}) \subset X(\mathbb{C}_p)$ と書き, $X_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ の $X(\mathbb{C}_p)$ に^おける管 *tube* と呼びます. 集合としては, $]X_{\bar{\mathbb{F}}_p}[$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ から $0, 1, \infty$ に於ける剰余円盤を取り除いた空間

$$]X_{\bar{\mathbb{F}}_p}[= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\mathbb{D}_0^-(1) \cup \mathbb{D}_1^-(1) \cup \mathbb{D}_\infty^-(1)) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p = 1, |z - 1|_p = 1\}$$

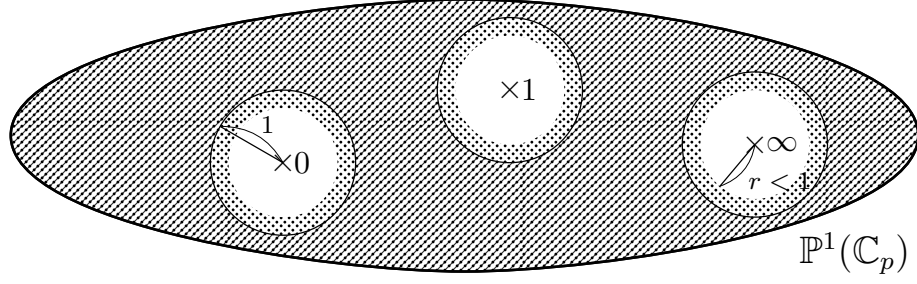


図 4 過収束関数の収束域: $0, 1, \infty$ の剰余円盤の内側まで収束域が入り込んでいる

と一致し, アフィノイド代数

$$\mathbb{C}_p \left\{ z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1} \right\} := \left\{ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=-\infty}^0 b_m (z-1)^m \left| \begin{array}{l} |a_n|_p \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \\ |b_m|_p \xrightarrow{m \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right. \right\}$$

の極大スペクトルとして表されるアフィノイド空間となります. 実数 $0 < r < 1$ に対して

$$U_r := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\mathbb{D}_0^+(r) \cup \mathbb{D}_1^+(r) \cup \mathbb{D}_\infty^+(r)) = \{z \in \mathbb{D}_0^-(r^{-1}) \mid |z|_p \geq r, |z-1|_p \geq r\}$$

によって $X(\mathbb{C}_p)$ の部分集合 U_r を定めると, $\{U_r\}_{0 < r < 1}$ は $]X_{\mathbb{F}_p}[$ の基本厳近傍系 *fundamental system of strict neighborhood* [Ber96, Définition (1.2.1)] を形成しており, 各 U_r 上のリジッド解析的関数環は

$$\mathcal{A}(U_r) = \left\{ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=-\infty}^0 b_m (z-1)^m \left| \begin{array}{l} |a_n|_p \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \\ |b_m|_p \rho^n \xrightarrow{m \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right. (0 < \forall \rho < r) \right\}$$

で表されます. そこで, $X(\mathbb{C}_p)$ 上の $(\{0, 1, \infty\}$ に沿った) 過収束関数 *overconvergent function* を, 環

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p)) &:= \Gamma(]X_{\mathbb{F}_p}[, j^\dagger \mathcal{O}_{]X_{\mathbb{F}_p}[}) := \lim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{A}(U_r) \\ &= \left\{ f(z) \in \mathbb{C}_p \left[\left[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1} \right] \right] \mid \text{或る } 0 < r < 1 \text{ が存在して } f(z) \in \mathcal{A}(U_r) \right\} \end{aligned}$$

によって定めます ($j^\dagger$ は $j:]X_{\mathbb{F}_p}[\hookrightarrow X(\mathbb{C}_p)$ に対して定まるベルテロの過収束切断関手 *overconvergent section functor* [Ber96, (2.1.1.1)] です). 関数環 $\mathcal{A}^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ の元は, 取り除かれた点 $0, 1, \infty$ の剰余円盤の“少し内側”まで収束域が入り込んでいるような関数であるため (図 4 を参照), 「 $]X_{\mathbb{F}_p}[$ 上のリジッド解析的関数で) より広い範囲で収束するもの」というニュアンスで“過収束”の名が付けられています.

($\{0, 1, \infty\}$ に沿って) 過収束な微分 1 形式の加群 $\Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p))$ もまったく同様に

$$\begin{aligned} \Omega^\dagger(X(\mathbb{C}_p)) &:= \Gamma(]X_{\mathbb{F}_p}[, j^\dagger \Omega_{]X_{\mathbb{F}_p}[}^1) := \lim_{r \rightarrow 1^-} \Omega(U_r) \\ &= \left\{ f(z) dz \in \mathbb{C}_p \left[\left[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1} \right] \right] dz \mid \text{或る } 0 < r < 1 \text{ が存在して } f(z) \in \mathcal{A}(U_r) \right\} \end{aligned}$$

によって定めます.

参考文献

- [赤木 17] 赤木和真. The integrality of p -adic multiple zeta values: joint work with M. Hirose, S. Yasuda (日本語). 数理解析研究所講究録『多重ゼータ値の諸相』, **2015**, 53–64, 2017.
- [荒川金子 10] 荒川恒男, 金子昌信. 多重ゼータ値入門 (MI レクチャーノート), 第 23 巻. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2010.
- [大下 SS14] 大下達也. 非可換岩澤主予想の証明 —解析的な部分について—. 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』報告集, 第 I 巻, 401–482, 2014.
- [落合 14] 落合理. 岩澤理論とその展望 (上) (岩波数学叢書). 岩波書店, 2014.
- [小野塚 SS18] 小野塚友一. 多重ゼータ関数の解析接続と負の整数点での極限值. 本報告集, 2018.
- [小野 SS18] 小野雅隆. 「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ. 本報告集, 2018.
- [金子 SS18] 金子昌信. 多重ゼータ値導入 —定義から正規化まで—. 本報告集, 2018.
- [加藤 13] 加藤文元. リジッド幾何学入門 (岩波数学叢書). 岩波書店, 2013.
- [加藤中井 16] 加藤文元, 中井保行. 天に向かって続く数. 日本評論社, 2016.
- [川崎 SS18] 川崎菜穂. Yamamoto 積分表示と積分級数等式. 本報告集, 2018.
- [栗原 18] 栗原将人. p 進ゼータの世界へ. 数学セミナー, **675 (51–1)**, 8–13, 2018.
- [河野 09] 河野俊丈. 反復積分の幾何学 (シュプリングァー現代数学シリーズ). 丸善出版, 2009.
- [小見山 SS18] 小見山尚. 特異点解消法と繰り込み法. 本報告集, 2018.
- [関 SS18] 関真一郎. 「 $\mathcal{F}$ -有限多重ゼータ値」から「 $\widehat{\mathcal{F}}$ -有限多重ゼータ値」へ: ただし, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$. 本報告集, 2018.
- [田中 07] 田中立志. p 進多重ゼータ値の双対性について. 数理解析研究所講究録『多重ゼータ値の研究』, **1549**, 169–176, 2007.
- [長岡 SS05] 長岡昇勇. Serre’s p -adic modular forms (日本語). 第 13 回整数論サマースクール『Hilbert 保型形式』報告集, 2005.
- [坂内 02] 坂内健一. p -進ポリログと p -進 L -関数. 数理解析研究所講究録『「整数論のこの主題、自分はこう考える」若手発表会』, **1256**, 97–130, 2002.
- [萩原 SS18] 萩原啓. 「多重ゼータ値」から「モチヴィック多重ゼータ値」へ. 本報告集, 2018.
- [原田 SS18] 原田遼太郎. KZ 方程式と KZ 結合子. 本報告集, 2018.
- [原 18] 原隆. p 進数体をめぐる冒険: p 進距離が紡ぎ出す甘美なる世界. 数学セミナー, **684 (57–10)**, 31–37, 2018.
- [古庄 03] 古庄英和. Introduction to p -adic multiple zeta values (日本語). 数理解析研究所講究録『代数的整数論とその周辺』, **1324**, 33–46, 2003.

- [古庄 16] 古庄英和著 (小谷久寿, 新甫洋史記述). 結び目と Grothendieck–Teichmüller 群 (MI レクチャーノート), 第 68 巻. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2016.
- [森田 81] 森田康夫. P 進 L 関数入門 (I): Kummer の合同式と Kubota–Leopoldt の仕事. 数理解析研究所講究録『 P 進 L 関数と代数体の整数論』, **411**, 2–9, 1981.
- [安田 SS18a] 安田正大. An algorithm for computing p -adic multiple zeta values, 2018.
http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/ss2018/20140104_pMZV_ver11-5e_for_ss2018.pdf.
- [安田 SS18b] 安田正大. 「 p 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ. 本報告集, 2018.
- [山本 SS18] 山本修司. 多重ゼータ値と $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群. 本報告集, 2018.
- [AF72] Yvette AMICE and Jean FRESNEL. *Fonctions zêta p -adiques des corps de nombres abéliens réels*. Acta Arith., **20**, 353–384, 1972.
- [Ahl78] Lars Valerian AHLFORS. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [AHY] Kazuma AKAGI (赤木 和真), Minoru HIROSE (広瀬 稔), and Seidai YASUDA (安田 正大). *Integrality of p -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*. preprint, in preparation.
- [AI90] Greg W. ANDERSON, Yasutaka IHARA (伊原康隆). *Pro- l branched coverings of $\mathbf{P}^1$ and higher circular l -units. II*. Internat. J. Math., **1**, no. 2, 119–148, 1990.
- [BBK10] Jennifer S. BALAKRISHNAN, Robert W. BRADSHAW, and Kiran S. KEDLAYA. Explicit Coleman integration for hyperelliptic curves. In *Algorithmic number theory*, Vol. 6197 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 16–31. Springer, Berlin, 2010.
- [BdJ03] Amnon BESSER and Rob DE JEU. *The syntomic regulator for the K -theory of fields*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **36**, no. 6, 867–924 (2004), 2003.
- [Ber96] Pierre BERTHELOT. *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie*. Prépublication of Institute de Reserche Mathématique de Rennes, **96–3**, 91 pages, 1996.
- [Bes00] Amnon BESSER. Syntomic regulators and p -adic integration. II. K_2 of curves. In *Proceedings of the Conference on p -adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998)*, Vol. 120, 335–359, 2000.
- [Bes02] Amnon BESSER. *Coleman integration using the Tannakian formalism*. Math. Ann., **322**, no. 1, 19–48, 2002.
- [BF06] Amnon BESSER, and Hidekazu FURUSHO (古庄英和). The double shuffle relations for p -adic multiple zeta values. In *Primes and knots*, 第 416 巻 of *Contemp. Math.*, 9–29. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

- [BGR84] Siegfried BOSCH, Ulrich GÜNTZER, and Reinhold REMMERT. *Non-Archimedean analysis*, Vol. 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [Car35] Leonard CARLITZ. *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*. Duke Math. J., **1**, no. 2, 137–168, 1935.
- [CdS88] Robert F. COLEMAN and Ehud DE SHALIT. *p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions*. Invent. Math., **93**, no. 2, 239–266, 1988.
- [Cha14] Chieh-Yu CHANG (張介玉). *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*. Compos. Math., **150**, no. 11, 1789–1808, 2014.
- [ChaM17] Chieh-Yu CHANG, and Yoshinori MISHIBA (三柴善範). *Logarithmic Interpretation of Multiple Zeta Values in Positive Characteristic*. ArXiv e-prints, 2017.
- [Chat17] Andre CHATZISTAMATIOU. *On integrality of p-adic iterated integrals*. J. Algebra, **474**, 240–270, 2017.
- [Che77] Kuo Tsai CHEN (陳國才). *Iterated path integrals*. Bull. Amer. Math. Soc., **83**, no. 5, 831–879, 1977.
- [Col82] Robert F. COLEMAN. *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*. Invent. Math., **69**, no. 2, 171–208, 1982.
- [Con78] John B. CONWAY. *Functions of one complex variable*, Vol. 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.
- [De89] Pierre R. DELIGNE. *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*. In *Galois groups over $\mathbf{Q}$* (Berkeley, CA, 1987), Vol. 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 79–297. Springer, New York, 1989.
- [De02] Pierre R. DELIGNE. *Periods for the fundamental group*. a short note on Arizona Winter School, 2002.
- [DR80] Pierre R. DELIGNE and Kenneth Alan RIBET. *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*. Invent. Math., **59**, no. 3, 227–286, 1980.
- [FJ07] Hidekazu FURUSHO and Amir JAFARI. *Regularization and generalized double shuffle relations for p-adic multiple zeta values*. Compos. Math., **143**, no. 5, 1089–1107, 2007.
- [FKMT17a] Hidekazu FURUSHO, Yasushi KOMORI (小森 靖), Kohji MATSUMOTO (松本 耕二), and Hirofumi TSUMURA (津村博文). *Desingularization of complex multiple zeta-functions*. Amer. J. Math., **139**, no. 1, 147–173, 2017.
- [FKMT17b] Hidekazu FURUSHO, Yasushi KOMORI, Kohji MATSUMOTO, and Hirofumi TSUMURA. *Fundamentals of p-adic multiple L-functions and evaluation of their spe-*

- cial values*. Selecta Math. (N.S.), **23**, no. 1, 39–100, 2017.
- [Fur04] Hidekazu FURUSHO. *p-adic multiple zeta values. I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*. Invent. Math., **155**, no. 2, 253–286, 2004.
- [Fur07] Hidekazu FURUSHO. *p-adic multiple zeta values. II. Tannakian interpretations*. Amer. J. Math., **129**, no. 4, 1105–1144, 2007.
- [Fur11] Hidekazu FURUSHO. *Double shuffle relation for associators*. Ann. of Math. (2), **174**, no. 1, 341–360, 2011.
- [GF] José Ignacio Burgos GIL and Javier FRESÁN. Multiple zeta values: from numbers to motives. to appear.
- [Iwa72] Kenkichi IWASAWA (岩澤健吉). *Lectures on p-adic L-functions*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972. Annals of Mathematics Studies, No. 74.
- [Jar15] David JAROSSAY. *Indirect computation of p-adic cyclotomic multiple zeta values*. ArXiv e-prints, 2015.
- [KL64] Tomio KUBOTA (久保田 富雄), and Heinrich-Wolfgang LEOPOLDT. *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen*. J. Reine Angew. Math., **214/215**, 328–339, 1964.
- [KNQ96] Manfred KOLSTER, Thống NGUYỄN-QUANG-ĐỖ, and Vincent Fleckinger. *Twisted S-units, p-adic class number formulas, and the Lichtenbaum conjectures*. Duke Math. J., **84**, no. 3, 679–717, 1996.
- [KNQ98] Manfred KOLSTER and Thống NGUYỄN-QUANG-ĐỖ. *Syntomic regulators and special values of p-adic L-functions*. Invent. Math., **133**, no. 2, 417–447, 1998.
- [Ko77] Neal KOBLITZ. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 58.
- [Ko79] Neal KOBLITZ. *A new proof of certain formulas for p-adic L-functions*. Duke Math. J., **46**, no. 2, 455–468, 1979.
- [Ko80] Neal KOBLITZ. *p-adic analysis: a short course on recent work*, Vol. 46 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
- [Kra74] Marc KRASNER. *Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes*. Bull. Soc. Math. France Mém., **39–40**, 131–254, 1974.
- [Leo75] Heinrich Wolfgang LEOPOLDT. *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. II Die p-adische Γ -Transformation*. J. Reine Angew. Math., **274/275**, 224–239, 1975. Col-

- lection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, III.
- [Mor78] Yasuo MORITA (森田康夫). Krasner’s analytic functions and rigid analytic spaces. In *Proceedings of the Conference on p -adic Analysis (Nijmegen, 1978)*, 第 7806 卷 of *Report*, 134–142. Katholieke Univ., Nijmegen, 1978.
- [MSw74] Barry MAZUR and Peter SWINNERTON-DYER. *Arithmetic of Weil curves*. Invent. Math., **25**, 1–61, 1974.
- [MW84] Barry MAZUR and Andrew WILES. *Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$* . Invent. Math., **76**, no. 2, 179–330, 1984.
- [NSW08] Jürgen NEUKIRCH, Alexander SCHMIDT, and Kay WINGBERG. *Cohomology of number fields*, Vol. 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.
- [Rob00] Alain M. ROBERT. *A course in p -adic analysis*, Vol. 198 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Sch79] Peter SCHNEIDER. *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*. Math. Z., **168**, no. 2, 181–205, 1979.
- [Ser73] Jean-Pierre SERRE. *Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques*. In *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972)*, Vol. 350 of *Lecture Notes in Math.*, 191–268. Springer, Berlin, 1973.
- [Sou81] Christophe SOULÉ. On higher p -adic regulators. In *Algebraic K -theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980)*, Vol. 854 of *Lecture Notes in Math.*, 372–401. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [Ta04] Tatsushi TANAKA (田中 立志). A few applications of shuffle products for p -adic multiple zeta values. Master’s thesis, Kyushu University, 2004.
- [Tha04] Dinesh S. THAKUR. *Function field arithmetic*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [Ünv13] Sinan ÜNVER. *Drinfel’d–Ihara relations for p -adic multi-zeta values*. J. Number Theory, **133**, no. 5, 1435–1483, 2013.
- [Was97] Lawrence C. WASHINGTON. *Introduction to cyclotomic fields*, Vol. 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [Wil90] Andrew WILES. *The Iwasawa conjecture for totally real fields*. Ann. of Math. (2), **131**, no. 3, 493–540, 1990.
- [Ya10] Go YAMASHITA (山下 剛). *Bounds for the dimensions of p -adic multiple L -value spaces*. Doc. Math., no. Extra vol.: Andrei A. Suslin sixtieth birthday, 687–723, 2010.

[Zha16] Jianqiang ZHAO (赵健强). *Multiple zeta functions, multiple polylogarithms and their special values*, 第 12 卷 of *Series on Number Theory and its Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.