「$\mathcal{F}$-有限多重ゼータ値」から「$\widehat{\mathcal{F}}$-有限多重ゼータ値」へ: ただし, $\mathcal{F}=\mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$

関 真一朗

目 次

1 はじめに

小野の報告記事 [14] で定義された $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値は mod p-多重調和和 (記号は [14, 1.1] を使用する) を集めてアデール的な環の元とみたものであった. しかしながら, Wolstenholme の定理 [26]

$$\zeta_{<p}(1) \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (p \geq 5)$$

のような現象も昔から観察されているため, mod p^n 版有限多重ゼータ値を考えてみたくなる. 本稿では, 更に $n \to \infty$ なる極限をとって $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値を導入する.

また, [14] では $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値が古典的多重ゼータ値を使って定義される対称多重ゼータ値と全く同じ振る舞いをするという Kaneko-Zagier 予想が紹介された. このような対応を $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値でも考えるためには対称多重ゼータ値をどのように精密化すればよいのだろうか? 後半でその精密化について考察する.

2 $\boldsymbol{p}$ 進有限多重ゼータ値

2.1 $\boldsymbol{p}$ 進数環

正整数 n に対して, $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n := \prod_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

と定義する．$\mathcal{A}_n$ に離散位相を入れ，$\widehat{\mathcal{A}} := \varprojlim_n \mathcal{A}_n$ とする．自然な全射 $\pi\colon \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ があり[1], $\boldsymbol{p} := \pi((p)_p)$ を無限大素数とよぶ．自然な全射 $\rho_n\colon \widehat{\mathcal{A}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_n$ は同型 $\widehat{\mathcal{A}}/\boldsymbol{p}^n\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{A}_n$ を誘導し，$\widehat{\mathcal{A}}$ の位相は完備な $\boldsymbol{p}$ 進位相になっていることがわかる．詳細については [20, §2] を参照せよ．

2.2 $\boldsymbol{p}$-記法

有限個の例外を除く素数 p に対して $a_p \in \mathbb{Z}_p$ が与えられているとき，例外素数については適当な値 (例えば 0) を割り振って，$a_{\boldsymbol{p}} := \pi((a_p)_p) \in \widehat{\mathcal{A}}$ という記法を用いる．記号の乱用で，文脈判断できる場合は，$\rho_n(a_{\boldsymbol{p}})$ のことも $a_{\boldsymbol{p}}$ と書く．例えば，[14, 定理 1.3.2] に現れた $Z(k)$ は $\frac{B_{\boldsymbol{p}-k}}{k}$ と表現できる．

2.3 $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値

定義 2.3.1. インデックス $\mathbf{k}$ に対して，$\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ (スター) 値を

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) := \zeta_{<\boldsymbol{p}}(\mathbf{k}), \quad \zeta^\star_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) := \zeta^\star_{<\boldsymbol{p}}(\mathbf{k}) \in \widehat{\mathcal{A}}$$

で定義する．また，正整数 n に対して，$\mathcal{A}_n$-有限多重ゼータ (スター) 値を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) := \rho_n(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})), \quad \zeta^\star_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) := \rho_n(\zeta^\star_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})) \in \mathcal{A}_n$$

で定義する．

Wolstenholme の定理は本質的に $\zeta_{\mathcal{A}_2}(1) = 0$ である．Wolstenholme の定理や [14, 定理 1.3.1] の一般化として次が計算されている．

定理 2.3.2 (Z.H.Sun [23, Theorem 5.1, Remark 5.1], Sakugawa-S. [19])**.** 正整数 k に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k) = (-1)^k \sum_{l=1}^{n-1} \binom{k+l-1}{l} \left(\sum_{j=1}^{n-l} (-1)^j \binom{n-l}{j} \widehat{B}_{j(\boldsymbol{p}-1)-k-l+1} \right) \boldsymbol{p}^l$$

が成り立つ．ただし，$\widehat{B}_m := \frac{B_m}{m}$ で B_m は Seki-Bernoulli 数．

Zhi-Hong Sun は初等的な計算法で $n = 3, 4$ の場合に計算している．この事実[2]がある程度専門家の間では知られていて，例えば Tauraso は [24, Theorem 2.1] で $\zeta_{\mathcal{A}_5}(1)$ を計算して記録を更新している．しかしながら，Sakugawa と計算したところ，Zhi-Hong Sun の手法は一般の n で適用可能であることがわかった．この定理は次の定理を還元することによっても得られる (ただし，上の表示を得るには一般化 Kummer 合同式を使う必要がある．なお，全ての n で計算できているため，極限の定義から実際は同値である)．

定理 2.3.3 (Washington [25, Theorem 1])**.** 正整数 k に対して

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k) = (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \binom{k+l-1}{l} L_{\boldsymbol{p}}(k+l, \omega_{\boldsymbol{p}}^{1-k-l}) \boldsymbol{p}^l \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，L_p は Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数であり，$\omega_p = \omega$ は Teichmüller 指標である．

Washington は少し一般的な和を扱っているし，$n = 3$ で k が奇数の場合の合同式も系として記述している[3]．depth が 2 以上の場合にはいつでも Seki-Bernoulli 数で書けるわけではないようであるが，次のような結果が知られている ([14, 定理 1.3.2] の部分的 lift)．

[1] π は連続ではない．必ずしも必要ではないが，記号的に楽になるため導入する．例えば，直後に定義される $\boldsymbol{p}$ は π を用いずとも $\boldsymbol{p} := ((p \bmod p^n)_p)_n$ と定義することもできる．

[2] というより $n = 3, 4$ でしか出来ていないという誤解．

[3] 有限多重ゼータ値に関する論文が現れるよりも早い段階にこのような論文があったのである!

定理 2.3.4 (Zhao [29, Theorem 3.2]). k_1, k_2 を正整数とし, $k := k_1 + k_2$ が偶数であるとする. このとき,

$$\zeta_{\mathcal{A}_2}(k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left\{(-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2} - k\right\}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p},$$
$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left\{(-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2} + k\right\}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

2.4 $\boldsymbol{p}$ 進関係式

特殊値だけではなく, $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値の関係式族がどのように $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値の関係式族に lift されるかは興味深い課題であるが, わかっていることはまだまだ少ない. なお, lift された関係式には一般に無限大素数 $\boldsymbol{p}$ が現れる (その振る舞いは "$\mathrm{wt}(\boldsymbol{p}) = -1$" である). 以下, 知られている関係式族の幾つかを列挙する. 調和積公式は多重調和和について成り立つため自明である.

定理 2.4.1 (調和積公式). $\mathbf{k}_1$ および $\mathbf{k}_2$ をインデックスとする. このとき,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1 * \mathbf{k}_2) = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1)\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_2)$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{k}_1 * \mathbf{k}_2$ は調和積.

次は [14, 定理 1.3.8] の lift.

定理 2.4.2 ($\boldsymbol{p}$ 進シャッフル関係式, Jarossay [8, Lemma 4.17], S. [21, Theorem 6.4]). $\mathbf{k}_1$ および $\mathbf{k}_2 = (k_1, \dots, k_r)$ をインデックスとする. このとき,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1 ш \mathbf{k}_2) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}_2)} \sum_{\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \left[\prod_{j=1}^{r}\binom{k_j+l_j-1}{l_j}\right]\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_1, \overline{\mathbf{k}_2+\mathbf{l}})\boldsymbol{p}^{l_1+\cdots+l_r}$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{k} = (n_1, \dots, n_s)$ に対して $\overline{\mathbf{k}} := (n_s, \dots, n_1)$ であり, $\mathbf{k}_1 ш \mathbf{k}_2$ はシャッフル積.

$\mathbf{k}_1 = \varnothing$ の場合を $\boldsymbol{p}$ 進反転公式とよぶ. スター版 $\boldsymbol{p}$ 進シャッフル関係式も知られている (S. [21, Theorem 6.12]). 次は [14, 定理 1.3.18] の lift.

定理 2.4.3 ($\boldsymbol{p}$ 進双対関係式, S. [20, Theorem 1.3]). $\mathbf{k}$ をインデックスとする. このとき,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}, \{1\}^i)\boldsymbol{p}^i = -\sum_{i=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}^\vee, \{1\}^i)\boldsymbol{p}^i$$

が成り立つ. ただし, $\mathbf{k}^\vee$ は $\mathbf{k}$ の Hoffman 双対インデックス.

Wolstenholme の定理を次のように導出することができる: $\boldsymbol{p}$ 進双対関係式で $\mathbf{k} = (1)$ とすると, $\mathbf{k}^\vee = (1)$ なので

$$\zeta_{\mathcal{A}_2}(1) + \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(1,1)\boldsymbol{p} = 0$$

が $\mathcal{A}_2$ で成り立つことがわかる. よって, $\zeta_{\mathcal{A}_2}(1) = 0$ は $\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(1,1) = 0$ と同値であることがわかる. そして, Hoffman 双対関係式 ($\mathcal{A}$ の場合) よりこれは $\zeta_{\mathcal{A}}(2) = 0$ に同値である ($(1,1)^\vee = (2)$).

$I_{k,r}$ を weight k, depth r のインデックス全体のなす集合とし, $I_{k,r,i} := \{(k_1, \dots, k_r) \in I_{k,r} \mid k_i \geq 2\}$ とする. このとき, 次は [14, 定理 1.3.16] の部分的 lift を与えている.

定理 2.4.4 (S.-Yamamoto [22, Theorem 2.5]). k, r を $r \leq k$ を満たす正の整数とする．このとき，$\mathcal{A}_2$ において

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\binom{k}{r}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}, \quad \sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = \binom{k}{r}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}$$

が成り立つ．また，k が奇数であれば $\mathcal{A}_3$ において

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r}} \zeta_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{r}\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-2}}{k+2}\boldsymbol{p}^2, \quad \sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = -\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-2}}{k+2}\boldsymbol{p}^2$$

が成り立つ．更に，i が $1 \leq i \leq r$ を満たし，k が r より大きい偶数であれば，

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\frac{a_{k,r,i}}{2}\cdot\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}, \quad \sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,i}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = \frac{b_{k,r,i}}{2}\cdot\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}$$

が $\mathcal{A}_2$ で成立する．ここで，$a_{k,r,i}$ と $b_{k,r,i}$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
a_{k,r,i} &:= \binom{k-1}{r} + (-1)^{r-i}\left\{(k-r)\binom{k}{i-1} + \binom{k-1}{i-1} + (-1)^{r-1}\binom{k-1}{r-i}\right\},\\
b_{k,r,i} &:= \binom{k-1}{r} + (-1)^{i-1}\left\{(k-r)\binom{k}{r-i} + \binom{k-1}{r-i} + (-1)^{r-1}\binom{k-1}{i-1}\right\}.
\end{aligned}$$

整数論サマースクールにおける本講演の当日に Murahara-Onozuka のプレプリント [11] が出た．それは [14, 定理 1.3.24] の $\widehat{\mathcal{A}}$-lift を与えるものであるが，記号の準備が必要となるため主張は [11, Theorem 1.3] を見ていただきたい．なお，彼らの証明では定理 2.4.3 が key となる．また，その後 [14, 定理 1.3.14] の部分的 lift が発表された．

定理 2.4.5 (Murahara-Onozuka-S. [12, Theorem 1.3]). m, n を非負整数で $(m, n) \neq (0, 0)$ であるものとする．このとき，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{2m}=n\\ n_0,\ldots,n_{2m}\geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\{2\}^{n_0}, 1, \{2\}^{n_1}, 3, \{2\}^{n_2}, \ldots, \{2\}^{n_{2m-2}}, 1, \{2\}^{n_{2m-1}}, 3, \{2\}^{n_{2m}})\\
&= (-1)^n\left\{(-1)^m 2^{1-2m}\binom{m+n}{m} - 4\binom{2m+n}{2m}\right\}\frac{B_{\boldsymbol{p}-4m-2n-1}}{4m+2n+1}\boldsymbol{p},\\
&\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{2m}=n\\ n_0,\ldots,n_{2m}\geq 0}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\{2\}^{n_0}, 1, \{2\}^{n_1}, 3, \{2\}^{n_2}, \ldots, \{2\}^{n_{2m-2}}, 1, \{2\}^{n_{2m-1}}, 3, \{2\}^{n_{2m}})\\
&= (-1)^m 2^{1-2m}\binom{m+n}{m}\frac{B_{\boldsymbol{p}-4m-2n-1}}{4m+2n+1}\boldsymbol{p}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

[14, 定理 1.3.26, 定理 1.3.27] の lift についてはまだ論文はないが，$\mathcal{A}_2$-lift などはすぐに取り組める課題であると考えられる．

2.5 次元予想

定義 2.5.1. k を正整数とする．$\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}},k}$ を

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}},k} := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_i)\boldsymbol{p}^{b_i} \in \widehat{\mathcal{A}} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Q}, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ s.t.\ b_i \to \infty, \mathrm{wt}(\mathbf{k}_i) - b_i = k \right\}$$

と定義する．また，正整数 n に対して $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n,k} := \rho_n(\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}},k}) \subset \mathcal{A}_n$ と定める．

予想 2.5.2 (Zhao [30], Hirose [4], Rosen [18])**.** k が n に対して十分大きければ

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n,k} = \left\langle \zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) \;\middle|\; \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

が成り立つであろう.

Zhao の数表によれば, $(k,n) = (2,4),(1,5),(2,5),(3,5)$ では等号が成り立たないと予想されている. $n = 2,3$ のときは任意の $k \geq 1$ で等号が成立するかもしれない.

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n,k}$ は, 後述の Kaneko-Zagier 予想の精密化をより詳しく考察することによって (cf. [30, Conjecture 9.7]), 次にように予想される.

予想 2.5.3 (次元予想)**.** d_k を [14, 予想 1.2.1] に現れる数列とする. このとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}_n,k} = d_{k+n+1} - d_{k+1}.$$

$n = 1$ のときに, [14, 予想 1.2.1] に出てきた値と一致していることを確認せよ (演習問題). 代数的構造は異なるであろうが, $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_2,k}$ と $\mathcal{Z}_k$ の予想次元が同じということは言及に値する. なお, [14, 定理 1.2.3] の証明手法はこの予想についても “$\leq$” が成り立つことを保証するらしいが著者は理解していない.

3 一般化対称多重ゼータ値

3.1 定義

$\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値に対応する対称多重ゼータ値の一般化は何かという冒頭の疑問に対する答えを提示する. 無限大素数は $\widehat{\mathcal{A}}$ の $\mathbb{Q}$ 上超越元であるが (演習問題), $\boldsymbol{p}$ の対応物は不定元 t と考えることにする. Kaneko-Zaiger 予想においては $\frac{B_{\boldsymbol{p}-k}}{k}$ と $\zeta(k) \bmod \zeta(2)$ が対応すると考えられた. 合同式

$$L_p(k, \omega^{1-k}) \equiv \frac{B_{p-k}}{k} \pmod{p}$$

が成り立つが, (1) を参考にすると, 一般化対称多重ゼータ値 $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ は depth 1 の場合に

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(k) = (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \binom{k+l-1}{l} \zeta(k+l) t^l \bmod \zeta(2) \tag{2}$$

となると期待するのはある程度自然である. (1) は $\zeta_{<p}(1)$ を Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数の値 (p 進 Riemann ゼータ値) で書いたものであるが, 一般に $\zeta_{<p}(\mathbf{k})$ は Jarossay によって証明された Akagi-Hirose-Yasuda 予想 (安田 [28] で解説されている. cf. 本稿定理 3.3.3) によって Deligne の p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\mathrm{De}}(\mathbf{k})$ (原 [3] によって解説されている) で表すことができるため, $\zeta_p^{\mathrm{De}}(\mathbf{k}) \leftrightarrow \zeta(\mathbf{k}) \bmod \zeta(2)$ と考えることによって次の定義にたどり着く.

定義 3.1.1 (一般化対称多重ゼータ値, Hirose [4], Rosen [16, Definition 2.4])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対して, 一般化対称多重ゼータ値 $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ を

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}) &:= \sum_{i=0}^{r} (-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r} \zeta^*(k_1,\ldots,k_i) \\ &\times \sum_{l_{i+1},\ldots,l_r \geq 0} \left[\prod_{j=i+1}^{r} \binom{k_j+l_j-1}{l_j}\right] \zeta^*(k_r+l_r,\ldots,k_{i+1}+l_{i+1}) t^{l_{i+1}+\cdots+l_r} \bmod \zeta(2)\end{aligned}$$

と定義する．ζ^* は調和積による正規化であり[4], $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ は $\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ の元である．ただし, $\overline{\mathcal{Z}}:=\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$．また, 一般化対称多重ゼータスター値 $\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ を $\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}):=\sum_{\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k}}\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}')$ で定義する[5]．$\pi_n\colon\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]\twoheadrightarrow\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]/t^n$ を自然な全射とするとき, $\zeta_{\mathcal{S}_n}(\mathbf{k}):=\pi_n(\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})),\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_n}(\mathbf{k}):=\pi_n(\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}))$ とおく．

$\zeta_{\mathcal{S}_1}(\mathbf{k})$ が対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ に一致することに注意する．読者にとっては超速で定義を強制されていると思われるかもしれないが, 定義が正しそうだと思うための一つの方法は $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値と同じ関係式を満たしていることを幾つか具体的なレベルで確認することである (次節．ところが, 色々未解明である).

3.2 特殊値・関係式について

(1) と定理 2.3.4 の対応物として, (2) および次の定理が成立することは定義より容易に計算できる (定理の方は多少計算が必要: 演習問題 (cf. [14, 例 2.3.1])).

定理 3.2.1. k_1,k_2 を正整数とし, $k:=k_1+k_2$ が偶数であるとする．このとき,

$$\zeta_{\mathcal{S}_2}(k_1,k_2)=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1}-(-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2}-k\right\}\zeta(k+1)t \bmod \zeta(2),$$
$$\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(k_1,k_2)=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1}-(-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2}+k\right\}\zeta(k+1)t \bmod \zeta(2)$$

が成り立つ．

調和積公式および t 進反転公式が成立することは確認できている．

命題 3.2.2 (調和積公式, Ono-S. [13])**.**

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}_1*\mathbf{k}_2)=\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}_1)\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}_2).$$

命題 3.2.3 (t 進反転公式, Ono-S. [13])**.** $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ をインデックスとする．このとき,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\overline{\mathbf{k}})=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\sum_{\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}}\left[\prod_{j=1}^{r}\binom{k_j+l_j-1}{l_j}\right]\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}+\mathbf{l})t^{l_1+\cdots+l_r}$$

が成立する．

一方, 以下の公式が証明されているかは著者は現状把握できていないと講演で述べた．

予想 3.2.4 (t 進シャッフル関係式)**.** $\mathbf{k}_1$ および $\mathbf{k}_2=(k_1,\dots,k_r)$ をインデックスとする．このとき,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}_1 \sqcup\!\sqcup\, \mathbf{k}_2)=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}_2)}\sum_{\boldsymbol{l}=(l_1,\dots,l_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}}\left[\prod_{j=1}^{r}\binom{k_j+l_j-1}{l_j}\right]\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}_1,\overline{\mathbf{k}_2+\mathbf{l}})t^{l_1+\cdots+l_r}$$

が成り立つ．

予想 3.2.5 (t 進双対公式)**.** $\mathbf{k}$ をインデックスとする．このとき,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k},\{1\}^i)t^i=-\sum_{i=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}^{\vee},\{1\}^i)t^i$$

が成り立つ．

講演後, Hirose によって予想 3.2.5 については証明が宣言された ([5], より強い形で証明している)．また, 予想 3.2.4 についても取り組んでいる者がおり, 殆ど (?) 解けているようである．定理 2.4.4 や定理 2.4.5 の対応物はまだ計算されていないと思われる．

[4] シャッフル正規化や, 定数項を取るのではなく多項式を用いた正規化で定義しても同値になることが [14, 2,2,1, 2,2,2] と同様にしてわかる．

[5] $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ の「,」を幾つか「+」に変更して得られるインデックスが $\mathbf{k}'$ である．

3.3 Kaneko-Zagier 予想の精密化

$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$ を

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}} := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_i)\boldsymbol{p}^{b_i} \in \widehat{\mathcal{A}} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Q}, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ s.t. } b_i \to \infty, \mathrm{wt}(\mathbf{k}_i) - b_i \geq 0 \right\}$$

と定義する．これは $\widehat{\mathcal{A}}$ の部分 $\mathbb{Q}$-代数となる．次が目標としていた予想である．

予想 3.3.1 (精密化 Kaneko-Zagier 予想, Hirose [4], Rosen [16, 17])**.** 対応 $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}), \boldsymbol{p} \mapsto t$ は well-defined な位相環としての同型 $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}} \simeq \overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ を与える．

以下, この予想のモチヴィック版を考え, モチヴィック版精密化 Kaneko-Zagier 予想が実はモチヴィック版 Kaneko-Zagier 予想から導かれることを論じる．

モチヴィック多重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbf{k})$ の張る $\mathbb{Q}$-代数を $\mathcal{H}$ とし, $\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H}/(\zeta^{\mathfrak{m}}(2))$ とする (Hirose [6])[6]. $\zeta^{\mathfrak{a}}(\mathbf{k}) := \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbf{k}) \bmod \zeta^{\mathfrak{m}}(2)$. $D_p \colon \overline{\mathcal{H}}[\![t]\!] \dashrightarrow \mathbb{Q}_p$ を $D_p(\zeta^{\mathfrak{a}}(\mathbf{k})) := \zeta_p^{\mathrm{De}}(\mathbf{k}), D_p(t) := p, D_p(\sum_{j\geq 0} a_j t^j) := \sum_{j \geq 0} D_p(a_j)p^j$ で定義する (収束する場合). 次の p 進多重ゼータ値の integrality と Akagi-Hirose-Yasuda 予想が重要となる．

定理 3.3.2 (Chatzistamatiou [2], Akagi-Hirose-Yasuda [1])**.** $k := \mathrm{wt}(\mathbf{k})$ とする．このとき，

$$\zeta_p^{\mathrm{De}}(\mathbf{k}) \in \sum_{j \geq k} \frac{p^{j-k}}{j!} \mathbb{Z}_p$$

が成り立つ．

定理 3.3.3 (Akagi-Hirose-Yasuda 予想 [1], Jarossay [7, 10])**.**

$$\zeta_{<p}(\mathbf{k}) = D_p(\zeta^{\mathfrak{a}}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}))$$

が成り立つ．ここで, $\zeta^{\mathfrak{a}}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}) \in \overline{\mathcal{H}}[\![t]\!]$ は $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ の定義 3.1.1 における ζ^* を $\zeta^{\mathfrak{m}}$ に変更したもの．

定理 3.3.2 より連続準同型 $D_{\boldsymbol{p}} \colon \overline{\mathcal{H}}[\![t]\!] \to \widehat{\mathcal{A}}$ が well-defined に定まる ($D_{\boldsymbol{p}}(\zeta^{\mathfrak{a}}(\mathbf{k})) = \zeta^{\mathrm{De}}_{\boldsymbol{p}}(\mathbf{k})$, $D_{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{p}$).

予想 3.3.4 (Hirose [4], Rosen [16, 17])**.** $D_{\boldsymbol{p}}$ は単射．

$\mathrm{Im}(D_{\boldsymbol{p}}) = \mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$ が示されており (Yasuda [27], Jarossay [9], Rosen [16, Theorem 3.3]), Akagi-Hirose-Yasuda 予想より $D_{\boldsymbol{p}}(\zeta^{\mathfrak{a}}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})) = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ なので, 予想 3.3.4 はモチヴィック版の精密化 Kaneko-Zaiger 予想である．

$D_{\boldsymbol{p}}$ と整合的な $D^1_{\boldsymbol{p}} \colon \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{A}$ が自然に定義されるが, 次を証明することができる．

定理 3.3.5. $D^1_{\boldsymbol{p}}$ が単射であれば (すなわち, モチヴィック版 Kaneko-Zagier 予想が真であれば)$D_{\boldsymbol{p}}$ も単射となる．

証明. (by Hirose) 逆極限の左完全性から, 自然に定義される $D^n_{\boldsymbol{p}} \colon \overline{\mathcal{H}}[\![t]\!]/t^n \to \mathcal{A}_n$ が任意の $n \geq 1$ で単射であることを示せばよい．$a = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} \in \overline{\mathcal{H}}[\![t]\!]/t^n$ をとって, $D^n_{\boldsymbol{p}}(a) = 0$ と仮定する．このとき, 殆ど全ての素数 p に対して

$$D_p(a_0) + D_p(a_1)p + \cdots + D_p(a_{n-1})p^{n-1} \equiv 0 \pmod{p^n\mathbb{Z}_p}$$

が成り立つ．定理 3.3.2 より殆ど全ての p に対して $D_p(a_i) \in \mathbb{Z}_p$ なので, $D_p(a_0) \in p\mathbb{Z}_p$ が従う．よって, $D^1_{\boldsymbol{p}}$ が単射であれば $a_0 = 0$ であり, この操作を繰り返していけば $a = 0$ が従う． □

[6] $\mathcal{A}$ と表すことが多いが, 記号がかぶるのでここでは $\overline{\mathcal{H}}$ を用いる．

以上の内容およびより深い内容を Rosen [16, 17] が考察している[7]. mod p の世界のみならず mod p^n の世界での有限多重ゼータ値の関係式についても (t を援用して) 通常の多重ゼータ値の言葉で表現できると予想できるということは興味深い[8]. $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値の関係式が実際に $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値の関係式に常に lift されるか？(lifting conjecture [15, Conjecture A]), lift される場合はどのような関係式になるかについてはまだ十分にはわかっていない.

謝辞

世話人の田坂さん, 佐久川さん, 三柴さんには憧れの整数論サマースクールにおける講演機会を与えてくださり, 準備の段階でも多数のご助言を頂いたことを感謝致します. また, 旅費を援助していただきました佐久川さん, 古庄先生, 有限多重ゼータ値について普段から多数の議論をしてくださった小野さん, 講演に前後して $\widehat{\mathcal{A}}$ に興味を持ってくださった村原さん, 小野塚さんに深く感謝申し上げます.

参考文献

[1] K. Akagi, M. Hirose and S. Yasuda, *Integrality of p-adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*, in preparation.

[2] A. Chatzistamatiou, *On integrality of p-adic iterated integrals*, J. of Algebra, **474** (2017), 240–270.

[3] 原隆, 『「実/複素ゼータの世界」から「p 進ゼータの世界」へ』, 本報告集.

[4] M. Hirose, personal communication.

[5] M. Hirose, *On the t-adic duality*, unpublished.

[6] 広瀬稔, 『Brown による Hoffman 予想の証明の概略』, 本報告集.

[7] D. Jarossay, *Une notion de multizêtas finis associée au Frobenius du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$*, Comptes Rendus Mathematique, **353** (10), (2015), 877–882.

[8] D. Jarossay, *An explicit theory of $\pi_1^{un,crys}(\mathbb{P}^1 - \{0, \mu_N, \infty\})$-II-1: Standard algebraic equations of prime weighted multiple harmonic sums and adjoint multiple zeta values*, arXiv:1412.5099v3.

[9] D. Jarossay, *Algebraic relations, taylor coefficients of hyperlogarithms and images by frobenius - ii: Relations with other motives and the taylor period map*, arXiv:1601.01158.

[10] D. Jarossay, *Indirect computation of p-adic cyclotomic multiple zeta values*, arXiv:1501.04893v4.

[11] H. Murahara, T. Onozuka, *Derivation relation for finite multiple zeta values in $\widehat{\mathcal{A}}$*, arXiv:1809.02752.

[12] H. Murahara, T. Onozuka, S. Seki, *Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values in $\mathcal{A}_2$*, arXiv:1810.10803.

[13] M. Ono, S. Seki, personal communication.

[14] 小野雅隆, 『「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値へ」』, 本報告集.

[15] J. Rosen, *Asymptotic relations for truncated multiple zeta values*, J. Lond. Math. Soc. **91** (2015), no.2, 554–572.

[7] Jarossay [8] も本稿と被る仕事をしていると思われるが, 著者は力量不足により読み解けていない.

[8] なお, $\mathcal{S}_n$ はコンピュータによる計算手段を与えている.

[16] J. Rosen, *The completed finite period map and Galois theory of supercongruences*, Int. Math. Res. Notices (to appear), arXiv:1703.04248.

[17] J. Rosen, *Sequential periods of the crystalline Frobenius*, preprint, arXiv:1805.01885.

[18] J. Rosen, personal communication.

[19] K. Sakugawa, S. Seki, personal communication.

[20] S. Seki, *The $\boldsymbol{p}$-adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, to appear in Tohoku Math. J., arXiv:1605.06739.

[21] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, doctoral dissertation.

[22] S. Seki, S. Yamamoto, *Ohno-type identities for multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:1806.04785.

[23] Z. H. Sun, *Congruences concerning Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials*, Disc. Appl. Math. **105** (2000), no. 1–3, 193–223.

[24] R. Tauraso. *More congruences for central binomial coefficients*, J. Number Theory, **130** (2010), no. 12, 2639–2649.

[25] L. C. Washington, *p-adic L-functions and sums of powers*, J. Number Theory, **69** (1998), 50–61.

[26] J. Wolstenholme, *On certain properties of prime numbers*, Quart. J. Pure Appl. Math. **5** (1862), 35–39.

[27] S. Yasuda, *Finite real multiple zeta values generate the whole space Z*, International Journal of Number Theory, **12**(03), (2016), 787–812.

[28] 安田正大, 『「p 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ』, 本報告集.

[29] J. Zhao, *Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums*, Int. J. Number Theory **4** (2008), no. 1, 73–106.

[30] J. Zhao, *Finite multiple zeta values and finite Euler sums*, preprint, arXiv:1507:04917.