

多重ゼータ関数の解析接続と 負の整数点での極限值

小野塚友一 (九州大学)

はじめに

本文では多変数複素関数における「正則」や「極」、「不確定特異点」などの用語がでてくる．これらは多変数複素関数論の教科書 [24] の定義に基づいているため、気になった読者はこの教科書を参照いただきたい．

1 多重ゼータ関数の定義と絶対収束領域

多重ゼータ関数は次の級数により定義される．

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) := \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \dots m_r^{s_r}} \quad (1.1)$$

ただし $s_1, \dots, s_r$ は正の整数の組ではなく複素数の組 $\mathbb{C}^r$ をとるものとする．このように多重ゼータ値の変数を複素変数に変えて定義される多変数複素関数が多重ゼータ関数である．この講演ではこの関数の解析的な性質を概観していく．

最初に (1.1) の右辺の級数の収束性について次の事実が知られている．

Proposition 1.1 (松本 [12]). 多重ゼータ関数 $\zeta(s_1, \dots, s_r)$ は次の全ての不等式を満たす $\mathbb{C}^r$ の領域で絶対収束する．

$$\begin{aligned} \Re(s_r) &> 1 \\ \Re(s_{r-1} + s_r) &> 2 \\ &\vdots \\ \Re(s_1 + \dots + s_r) &> r \end{aligned}$$

Proof. 正の整数 M と実数 $\sigma > 1$ に対して次の評価が成り立つ．

$$\sum_{M < m} \frac{1}{m^\sigma} \leq \int_M^\infty \frac{dx}{x^\sigma} = \frac{M^{1-\sigma}}{\sigma-1} \quad (1.2)$$

この評価を用いて証明する．以下では $s_j = \sigma_j + it_j$ と書くこととし、証明には r についての帰納法を用いる． $r = 1$ のとき

$$\zeta(s_1) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}}$$

はリーマンゼータ関数であり (1.2) より $\sigma_1 > 1$ において絶対収束する． $r = 1$ のときに Proposition 1.1 が成り立つと仮定し、 r の場合を考える． $\sigma_r > 1$ のとき (1.2) より

$$\begin{aligned} \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} m_2^{\sigma_2} \dots m_r^{\sigma_r}} &= \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} \dots m_{r-1}^{\sigma_{r-1}}} \sum_{m_{r-1} < m_r} \frac{1}{m_r^{\sigma_r}} \\ &\leq \frac{1}{\sigma_r - 1} \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} \dots m_{r-1}^{\sigma_{r-1} + \sigma_r - 1}} \end{aligned}$$

が成り立ち, 最後の級数は帰納法の仮定より次の不等式を全て満たす領域で絶対収束する.

$$\begin{aligned}\sigma_{r-1} + \sigma_r - 1 &> 1 \\ \sigma_{r-2} + \sigma_{r-1} + \sigma_r - 1 &> 2 \\ &\vdots \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_r - 1 &> r - 1\end{aligned}$$

これらの不等式は次の不等式に書き換えることができる.

$$\begin{aligned}\sigma_{r-1} + \sigma_r &> 2 \\ \sigma_{r-2} + \sigma_{r-1} + \sigma_r &> 3 \\ &\vdots \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_r &> r\end{aligned}$$

最終的に得られた不等式と (1.2) を適用するために用いた不等式 $\sigma_r > 1$ を合わせることで Proposition 1.1 を得る. $\square$

Remark. Proposition 1.1 の不等式は, 実際には絶対収束するための必要十分条件となっている. 次章において

$$\begin{aligned}s_r &= 1 \\ s_{r-1} + s_r &= 2 \\ &\vdots \\ s_1 + \cdots + s_r &= r\end{aligned}$$

のいずれかの式を満たす点が多重ゼータ関数の極であることを述べるが, これらの式は Proposition 1.1 の領域とそれ以外の領域との境界になっており, この事実から必要十分であることが分かる.

2 多重ゼータ関数の有理型接続

前章では多重ゼータ関数の定義を与えたが, この定義は絶対収束領域上での定義でしかない. そうなるとより広い範囲に解析接続できるのか, といった疑問がでてくるが, これは可能である. 実際, Zhao[25] と秋山-江上-谷川 [1] はそれぞれ独立に多重ゼータ関数の解析接続を与えた. Zhao は超関数を用いて解析接続を与え, 秋山-江上-谷川は Euler-Maclaurin の和公式を用いて解析接続を与えた. この章では秋山-江上-谷川の証明を紹介することにより, 多重ゼータ関数の解析接続を与え, 更には証明を追うことで極の位置も決定する.

Proposition 2.1 (秋山-江上-谷川 [1]). 多重ゼータ関数 $\zeta(s_1, \dots, s_r)$ は $\mathbb{C}^r$ 上に有理型に接続できる. 極は次の各式により与えられ, 全て 1 位である.

$$\begin{aligned}s_r &= 1 \\ s_{r-1} + s_r &= 2, 1, 0, -2, -4, \dots \\ \sum_{j=1}^k s_{r-j+1} &\in \mathbb{Z}_{\leq k} \quad (k = 3, 4, \dots, r).\end{aligned}$$

Remark. 極が $s_{r-1} + s_r = 2$ で与えられるとは, 具体的には次の超平面上の点が全て極になっているということの意味する.

$$\{(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid s_{r-1} + s_r = 2\}$$

1 変数複素関数論では極といえば“点”のイメージだったかもしれないが、多変数複素関数論では極は孤立せず、多重ゼータ関数の場合は極集合が“超平面”をなしている。

Proof. ここでは $r = 2$ の場合についてのみ証明を与える。これから使う記号として次の 2 つを定義しておく。

$$(s)_l := s(s+1) \cdots (s+l-1) = \frac{\Gamma(s+l)}{\Gamma(s)}$$

$$B_l : \text{ベルヌーイ数} \quad \left(\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

$M \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し次の式で $\phi_L(M, s)$ を定める。

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2M^s} + \sum_{l=1}^L (s)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{M^{s+l}} - \phi_L(M, s)$$

このとき左辺を $\zeta(s) - \sum_{m=1}^M m^{-s}$ と置き換えることにより $\phi_L(M, s)$ は整関数となることがわかる。また Euler-Maclaurin の和公式* より $\phi_L(M, s)$ は次のように評価される。

$$\phi_L(M, s) = O(|(s)_{L+1}| M^{-\sigma-L-1})$$

この式を 2 重ゼータ関数に代入することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \zeta(s_1, s_2) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \sum_{m_2=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{m_2^{s_2}} \\ &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \left(\frac{m_1^{1-s_2}}{s_2-1} - \frac{1}{2m_1^{s_2}} + \sum_{l=1}^L (s_2)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{m_1^{s_2+l}} - \phi_L(m_1, s_2) \right) \\ &= \frac{1}{s_2-1} \zeta(s_1+s_2-1) - \frac{1}{2} \zeta(s_1+s_2) + \sum_{l=1}^L (s_2)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \zeta(s_1+s_2+l) - \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{\phi_L(m_1, s_2)}{m_1^{s_1}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

最後の式がどの範囲で正則か見てみよう。初項は $s_2 = 1$ と $s_1 + s_2 = 2$ が極でそれ以外の場所では正則である。第 2 項は $s_1 + s_2 = 1$ が極、第 3 項は $s_1 + s_2 = 0, -2, -4, \dots$ が極になりそれ以外の場所では正則である。 $(B_3, B_5, \dots = 0$ より $s_1 + s_2 = -1, -3, \dots$ は極にならないことに注意。) 最後の項は上から

$$O \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} |(s_2)_{L+1}| m_1^{-\sigma_1-\sigma_2-L-1} \right)$$

により評価できるので $\sigma_1 + \sigma_2 > -L$ という範囲で正則になる。これはどんな非負整数 L に対しても成り立つので L を十分大きく取ることにより必要な範囲の有理型接続が得られる。□

上の証明では $r = 2$ の場合のみを扱ったが、一般の場合には (2.1) 式を

$$\begin{aligned} \zeta(s_1, \dots, s_r) &= \frac{1}{s_r-1} \zeta(s_1, \dots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r - 1) - \frac{1}{2} \zeta(s_1, \dots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r) \\ &\quad + \sum_{l=1}^L (s_r)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \zeta(s_1, \dots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r + l) - \sum_{0 < m_1 < \dots < m_{r-1}} \frac{\phi_L(m_{r-1}, s_r)}{m_1^{s_1} \cdots m_{r-1}^{s_{r-1}}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

と書き換えて帰納法を走らせればよい。

*これは級数 $\sum_{a < m \leq b} f(m)$ と積分 $\int_a^b f(x) dx$ の間の関係を与える公式である。今回の級数に適用すると次の式が得られる。

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2M^s} + \sum_{l=1}^L (s)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{M^{s+l}} - \frac{(s)_{L+1}}{(L+1)!} \int_M^{\infty} B_{L+1}(t - [t]) t^{-s-L-1} dt$$

ただし $B_l(t)$ はベルヌーイ多項式であり、 $[t]$ は床関数である。(詳しくは Montgomery-Vaughan[19] の Appendix B を参照せよ。)

Remark. Proposition 2.1 では $r \geq 3$ の場合に $r < 3$ では現れなかった極が現れる. この極がどのように現れるか $r = 3$ の場合に見てみよう. そのために, $u_1 = s_1$, $u_2 = s_2 + s_3$, $u_3 = s_3$ と変数を置き換える. このとき (2.2) 式の右辺第 1 項から第 3 項は

$$\frac{1}{u_3 - 1} \zeta(u_1, u_2 - 1) - \frac{1}{2} \zeta(u_1, u_2) + \sum_{l=1}^L (u_3)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \zeta(u_1, u_2 + l)$$

となる. 初項と第 2 項から $r < 3$ では現れなかった極 $u_1 + u_2 = s_1 + s_2 + s_3 \in \mathbb{Z}_{\leq 3}$ が現れることが確かめられる. 加えて第 3 項からも同様の極が現れる. これらの極が互いに打ち消しあっていないことを確かめる必要があるが, これは上の式を u_3 の関数とみなして u_3 の次数を比べることにより確かめられる.

3 多重ゼータ関数の負の整数での極限值

多重ゼータ関数が負の範囲まで接続できることを前章で見た. そこで負の整数点における多重ゼータ関数の値を調べてみたくなる. 実際, Zhao[25] と秋山-江上-谷川 [1] は解析接続を証明した後, 負の整数点での特殊値について論じている. (2.1) 式で L を十分大きくとることで, 2 重ゼータ関数の特別な場合については調べることができる. いま $(s_1, s_2) = (-n_1, -n_2) \in (\mathbb{Z}_{\leq -1})^2$ という点での特殊値を考えてみよう. 極を避けるために $n_1 + n_2 \equiv 1 \pmod{2}$ という条件を付けて (2.1) 式に代入すると, リーマンゼータ関数の自明な零点がほとんどの項を消し, また最後の項は $(-n_2)_{L+1} = 0$ により 0 となり

$$\zeta(-n_1, -n_2) = -\frac{1}{2} \zeta(-n_1 - n_2) = \frac{B_{n_1+n_2+1}}{2(n_1 + n_2 + 1)}$$

が得られる. このように多重ゼータ関数の負の整数点での値をどんどん計算していけば良いのだが, そういうわけにはいかない. というのも, 今計算した点以外の負の整数点は Proposition 2.1 より極になっているからである. では全く調べられないのかというと, そういうわけではない. 実は負の整数点は多重ゼータ関数の不確定特異点になることが知られている. 例えば次のような式が示されている (佐々木 [23]).

$$\begin{aligned} \lim_{s_3 \rightarrow 0} \lim_{s_2 \rightarrow 0} \lim_{s_1 \rightarrow 0} \zeta(s_1, s_2, s_3) &= -\frac{3}{8} \\ \lim_{s_1 \rightarrow 0} \lim_{s_2 \rightarrow 0} \lim_{s_3 \rightarrow 0} \zeta(s_1, s_2, s_3) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

この例ではどちらも $\zeta(s_1, s_2, s_3)$ の $(0, 0, 0)$ への極限值を与えている. $(0, 0, 0)$ は 3 重ゼータ関数の極であるが極限值を持っており, しかもその極限值は近づき方によって異なる値に収束する. このように非正の整数点は一般に多重ゼータ関数の極となるが, 極限值を考えることができ, その値は極限のとり方によって異なる.

こういった極限值についての結果を紹介するために, 次の記号を用意する.

$$\begin{aligned} n_r(j) &:= n_j + n_{j+1} + \cdots + n_r \\ p_r(j) &:= p_j + p_{j+1} + \cdots + p_r \\ \varepsilon_r(j) &:= \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_r \\ [a]_n &:= \begin{cases} a(n-1)! & (n \geq 1) \\ (-1)^n (-n)!^{-1} & (n \leq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Theorem 3.1 (O.[22]). $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \mathbb{C}$ は次の 3 条件を満たしながら極限 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \rightarrow (0, \dots, 0)$ をとるもの

とする.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r &\neq 0 \\ \varepsilon_r(1), \dots, \varepsilon_r(r) &\neq 0 \\ \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_r(j)} &= O(1) \quad ((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \rightarrow 0, 1 \leq j \leq k \leq r)\end{aligned}$$

このとき $(-n_1, \dots, -n_r) \in (\mathbb{Z}_{\leq 0})^r$ への極限值は次のように表せる.

$$\begin{aligned}\zeta(-n_1 + \varepsilon_1, \dots, -n_r + \varepsilon_r) \\ = (-1)^{n_r} n_r! \sum'_{\substack{p_1 + \dots + p_r = n_r(1) + r \\ p_1, \dots, p_r \geq 0}} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \prod_{j=2}^r \frac{[\varepsilon_r(j)]_{-n_r(j) - r + j + p_r(j) - 1}}{[\varepsilon_r(j-1)]_{-n_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1}} + \sum_{j=1}^r O(\varepsilon_j)\end{aligned}$$

ただし $\sum'$ は次が成り立つような $(p_1, \dots, p_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ を走るものとする.

$$\text{全ての } j = 2, \dots, r \text{ に対し } (-n_r(j) - r + j + p_r(j) < 2 \text{ または } -n_r(j-1) - r + j + p_r(j) \geq 2)$$

以上が極限值についての定理であるが, 式が複雑なので具体例を以下に記す. まず 2 重ゼータ関数に対しては次のような極限值が得られる.

$$\begin{aligned}\zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \sum_{j=1}^2 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(-1 + \varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2) &= \frac{1}{360} + \frac{1}{720} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \sum_{j=1}^2 O(\varepsilon_j)\end{aligned}$$

同様に 3 重ゼータ関数の場合は次のようになる.

$$\begin{aligned}\zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(-1 + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{17}{720} - \frac{1}{144} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \frac{1}{720} \cdot \frac{-\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(\varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{19}{360} + \frac{1}{360} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j) \\ \zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, -1 + \varepsilon_3) &= -\frac{3}{40} - \frac{1}{720} \cdot \frac{4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^3 O(\varepsilon_j)\end{aligned}$$

ここまでの例では分母, 分子共に ε_j の 1 次式となっていた. 4 重ゼータ関数以降は 2 次式以上の項も登場する.

$$\begin{aligned}\zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{36} \cdot \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3 + \varepsilon_4} + \frac{1}{48} \cdot \frac{\varepsilon_3 + 2\varepsilon_4}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} \\ &\quad + \frac{1}{720} \cdot \frac{19\varepsilon_2 + 33\varepsilon_3 + 52\varepsilon_4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} + \frac{1}{144} \cdot \frac{\varepsilon_4(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} + \sum_{j=1}^4 O(\varepsilon_j)\end{aligned}$$

Proof. ここでは証明のスケッチのみを述べるが, 特に極限値の求め方に的を絞って見ていくこととする. まず リーマンゼータ関数の場合と同様にして次の積分表示を導き出すことができる.

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{t_1^{s_1-1} \cdots t_r^{s_r-1}}{\prod_{j=1}^r (e^{t_j} + \cdots + t_r - 1)} dt_1 \cdots dt_r$$

この積分に対して $t_j = x_1 \cdots x_j(1 - x_{j+1})$ (ただし $x_{r+1} = 0$) により変数変換すると

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty \prod_{j=1}^r x_j^{s_j(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r$$

この積分区間を次のように 2 つに分割する.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 + \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_1^\infty$$

すると極限值として現れるのは最初の積分区間のみで, 後ろの積分区間は負の部分まで有理型接続でき誤差項になる. そのためここでは最初の積分区間のみ計算を進めていく. 最初の積分区間についてテイラー展開 $x/(e^x - 1) = \sum_{k=0}^\infty (B_k/k!)x^k$ ($|x| < 2\pi$) を代入すると

$$\frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^r x_j^{s_j(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} (x_1 \cdots x_j)^k \right) dx_1 \cdots dx_r$$

これにより積分の中に無限和が現れるが, その無限和を次のように 2 つに分割する.

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^r \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} (x_1 \cdots x_j)^k &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{p_1 + \cdots + p_r = k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \\ &= \sum_{p_1 + \cdots + p_r = n_r(1)+r} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \\ &\quad + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n_r(1)+r}}^\infty \sum_{p_1 + \cdots + p_r = k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \end{aligned}$$

このように 2 つの和に分けたとき, 極限値の主要項になるのは初項で, 第 2 項は負の部分まで有理型接続でき誤差項になる. そこで初項の積分のみを計算すると

$$\frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \sum_{p_1 + \cdots + p_r = n_r(1)+r} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \frac{1}{s_r(1) + n_r(1)} \prod_{j=2}^r \frac{\Gamma(s_r(j) - r + j + p_r(j) - 1) \Gamma(s_{j-1})}{\Gamma(s_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1)}$$

のようにガンマ関数で表せ, この表示により負の部分まで有理型接続できる. $(s_1, \dots, s_r) = (-n_1 + \varepsilon_1, \dots, -n_r + \varepsilon_r)$ を代入し, 更に $\Gamma(a+n) = (a)_n \Gamma(a)$ という式を使うことで, 次のように式変形できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r)} \prod_{j=2}^r \frac{\Gamma(s_r(j) - r + j + p_r(j) - 1) \Gamma(s_{j-1})}{\Gamma(s_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1)} \\ = \frac{1}{(\varepsilon_r)_{-n_r} \Gamma(\varepsilon_r(1))} \prod_{j=2}^r \frac{(\varepsilon_r(j))_{-n_r(j)-r+j+p_r(j)-1}}{(\varepsilon_r(j-1))_{-n_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1}} \end{aligned}$$

さらに右辺の最初の部分は $(\varepsilon_r)_{-n_r} = \Gamma(\varepsilon_r - n_r)/\Gamma(\varepsilon_r) = \{(\varepsilon_r - n_r)(\varepsilon_r - n_r + 1) \cdots (\varepsilon_r - 1)\}^{-1}$ という式とガンマ関数の相反公式により次のように評価できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\varepsilon_r)_{-n_r} \Gamma(\varepsilon_r(1))} &= ((-1)^{n_r} n_r! + O(\varepsilon_r)) \left(\frac{\sin(\pi \varepsilon_r(1))}{\pi} \Gamma(1 - \varepsilon_r(1)) \right) \\ &= (-1)^{n_r} n_r! \varepsilon_r(1) + O(\varepsilon_r(1)^2) + O(\varepsilon_r(1) \varepsilon_r) \end{aligned}$$

これまでの計算をまとめ、次の式を得る.

$$\begin{aligned} & \zeta(-n_1 + \varepsilon_1, \dots, -n_r + \varepsilon_r) \\ &= (-1)^{n_r} n_r! \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_r = n_r(1) + r \\ p_1, \dots, p_r \geq 0}} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \prod_{j=2}^r \frac{(\varepsilon_r(j))_{-n_r(j)-r+j+p_r(j)-1}}{(\varepsilon_r(j-1))_{-n_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1}} + (\text{誤差}) \end{aligned}$$

これでほぼ証明が完了しており、定理の式に近い形となっている。主要項の中に誤差となるべきものがまだ含まれており、それを取り除くために $\sum'$ や $[a]_n$ を用いる。□

Remark. この証明では主要項以外の項について、解析接続と整数点の周りでの評価を省略した。これらの詳しい解説は Appendix に載せてある。

4 最後に

この講演では多重ゼータ関数の絶対収束領域や解析接続など基本的なことのみに絞ったが、この他にも様々な研究が行われている。歴史的に重要なものとして Atkinson の公式が挙げられる。Atkinson の公式とはリーマンゼータ関数の 2 乗平均値の漸近式

$$\int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^2 dt = T \log \frac{T}{2\pi} + (2\gamma - 1)T + E(T)$$

の誤差項 $E(T)$ を表す公式である。(長い式のためここでは単に $E(T)$ と書く。詳しい式を知りたい読者は [3, Theorem] を見よ。) $\zeta(s)$ の絶対値の 2 乗は

$$|\zeta(s)|^2 = \zeta(s)\zeta(\bar{s}) = \zeta(s + \bar{s}) + \zeta(s, \bar{s}) + \zeta(\bar{s}, s)$$

と変形できるため、この式に $s = 1/2 + it$ を代入して平均値を計算したくなるが、右辺の各項は $s = 1/2 + it$ で極となるため計算できない。Atkinson は右辺の極の打ち消し合いを考察し、 $\zeta(s, \bar{s})$ からガンマ関数とリーマンゼータ関数によって作られる項を引いて積分した

$$\int_{1/2 - iT}^{1/2 + iT} \left(\zeta(s, \bar{s}) - \frac{\Gamma(s + \bar{s} - 1)\Gamma(1 - s)}{\Gamma(\bar{s})} \zeta(s + \bar{s} - 1) \right) ds$$

を用いてリーマンゼータ関数の 2 乗平均値が表せることを発見した。この積分を計算することにより Atkinson の公式が得られる。

このように多重ゼータ関数は多重ゼータ値の複素関数化という意味合いだけでなく、解析的整数論の研究の中からも自然に現れる。多重ゼータ関数の歴史について詳しく知りたい方は [14] に書いてあるため是非一度目を通していただきたい。

多重ゼータ関数の研究は上で挙げたものの他に、例えば次のようなトピックが研究されている。

- 関数等式 [13]
- 平均値 [5, 7, 18]
- オーダー評価 [8, 9, 10, 11]
- 零点 [15, 16, 21]
- 普遍性 (ユニバーサリティ) [2, 20, 21]
- 関数関係式 [4, 6, 17]

以下では, それぞれの研究について簡単に述べる.

●関数等式

リーマンゼータ関数の関数等式については

$$\zeta(s) \longleftrightarrow \zeta(1-s)$$

というきれいな関係が存在することが知られている. 一方, 多重ゼータ関数の場合には 2 重ゼータ関数についてのみ関数等式が知られており

$$\zeta(s_1, s_2) \longleftrightarrow \zeta(1-s_2, 1-s_1)$$

という関係があるが, ゼータ関数以外の項が現れるため, リーマンゼータ関数のようなきれいな対称性は一般に存在しない (詳しくは [13] を参照). しかし (ゼータ関数以外の項) = 0 という超平面上では 2 重ゼータ関数も対称性を持つことが知られている. また, 3 重以上の多重ゼータ関数の関数等式は知られていない.

●平均値

リーマンゼータ関数の $2k$ 乗平均値といえば

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt$$

という積分であり, この積分は各 $\sigma \geq 1/2$ に対して $O(T^{1+\varepsilon})$ と評価できるだろうと予想されている. ただし $\varepsilon > 0$ は任意の実数であり, O -定数は k と ε に依存する. この予想は 2 乗と 4 乗の場合には既に解決されているが, 6 乗以上の平均値評価は未解決となっている. この問題の多重ゼータ関数への類似として

$$\int_2^T |\zeta(\sigma_1 + it_1, \dots, \sigma_r + it_r)|^2 dt_j$$

$$\int_2^T |\zeta(\sigma_1 + it, \sigma_2 + it)|^2 dt$$

といった形の 2 乗平均値が主に計算されている [5, 7, 18].

●オーダー評価

リーマンゼータ関数の有名なオーダー評価として, $|t| \rightarrow \infty$ のとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$|\zeta(\sigma + it)| = \begin{cases} O_\varepsilon(|t|^{(1-\sigma)/3+\varepsilon}) & (\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1) \\ O_\varepsilon(|t|^{(3-4\sigma)/6+\varepsilon}) & (0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

という結果が知られている[†]. (実際にはこの評価は様々な数学者により改良が重ねられている.) この評価は最終的に

$$|\zeta(\sigma + it)| = \begin{cases} O_\varepsilon(|t|^\varepsilon) & (\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1) \\ O_\varepsilon(|t|^{1/2-\sigma+\varepsilon}) & (0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

まで改善されるだろうと予想されている (Lindelöf 予想). これらの評価の 2 重及び 3 重ゼータ関数版が研究されており, 例えば 3 重の場合には, t_1, t_2, t_3 をある条件の下で大きくしたときに

$$\zeta(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2, \sigma_3 + it_3)$$

$$= \begin{cases} O(|t_1|^2 \log^2 |t_1|) & (\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \\ O(|t_1|^{2-2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3} \log^3 |t_1|) & (0 \leq \sigma_j < 1 \ (j = 1, 2, 3), \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 > 0) \end{cases}$$

[†] O_ε とは O -定数が ε の取り方に依存していることを意味する.

という評価が成り立つことが示されている [10].

● 零点

リーマンゼータ関数の零点についてはリーマン予想があり, 全ての非自明零点は臨界線上にあると予想されている. 一方, 多重ゼータ関数の場合には臨界線のような零点の並ぶ線はないことが知られている. 実際, [21] では全ての変数を揃えた多重ゼータ関数 $\zeta(s, \dots, s)$ の非自明零点について扱っており, 任意の $1/2 < a < b < 1$ に対して $\zeta(s, \dots, s)$ の零点が $a < \sigma < b, 0 < t < T$ の範囲に $\asymp T$ だけ存在することを示している[‡]. また, [15] と [16] では計算機を使って零点の位置を図示しているが, それを見るとリーマン予想のように零点がきれいに並びそうもないことが見て取れる.

● 普遍性

リーマンゼータ関数は普遍性 (ユニバーサリティ) を持つことが知られている. リーマンゼータ関数の普遍性を簡単に説明すると次のような定理である.

K を $1/2 < \operatorname{Re}(s) < 1$ 内のコンパクト集合で補集合が連結であるものとし, $f(x)$ は K 上連続で零点を持たず, K の内部で正則な関数とする. このとき $\zeta(s)$ の虚部方向への並行移動 $\zeta(s + it)$ によって $f(x)$ を近似できる. すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon$ が全ての $s \in K$ に対して成り立つ $\tau > 0$ が存在する. (しかもこのような τ が正の密度で存在することが知られている.)

この性質は $\zeta(s)$ がどんな非零正則関数でも近似できることを主張しており, 帯領域 $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ におけるリーマンゼータ関数の把握しにくさを表している.

多重ゼータ関数も普遍性を持つかどうか調べられている. [21] では全ての変数を揃えた $\zeta(s, \dots, s)$ の普遍性について述べており, [20] ではフルヴィッツ型をした多重ゼータ関数の普遍性についての結果を与えている. サマースクール期間中に多重ゼータ関数の普遍性を扱った原稿 [2] が arXiv にあがった. そのアブストラクトによると一般の多重ゼータ関数について普遍性が成り立つことを証明しているようであるが, 講演者はこれが正しいかどうかを現時点で確認できていない.

● 関数関係式

多重ゼータ値の間の関係式についてはこれまでの講演でいくつも見てきた. これらの関係式が整数点のみでなくより広い範囲で成り立たないか, ということを調べるのが関数関係式の研究である. 例えば $k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対して和公式

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 = k \\ k_1 \geq 1, k_2 \geq 2}} \zeta(k_1, k_2) = \zeta(k)$$

が成り立つことが知られているが, これは $\Re(s) > 1$ で成り立つ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta(s - n - 2, n + 2) - \zeta(-n, s + n)) = \zeta(s)$$

という関係式の $s = k$ の部分となっている [4]. このように値の関係式がより広い範囲に拡張可能かどうか調べることがこの研究のメインテーマとなっている. [6] では単純な拡張ができないことが示されており, 上の拡張のように無限和を取り入れたり, 他の型の多重ゼータ関数を扱う必要がでてくるが, 特殊値の関係式と関数の関係式を結ぶ面白い研究である.

各研究項目について軽く紹介したが, どの研究も道半ばであり調べるべきことがたくさん残っている. 興味のある人は是非, 多重ゼータ関数の研究に参加しよう!

[‡] $f(T) \asymp T$ とは正定数 C_1 と C_2 が存在して $C_1 T < f(T) < C_2 T$ という意味である.

参考文献

- [1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa, *An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith., **98** (2001), 107–116.
- [2] J. Andersson, *Voronin Universality in several complex variables*, arXiv:1809.03444.
- [3] F. V. Atkinson, *The mean value of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **81** (1949), 353–376.
- [4] M. Hirose, H. Murahara, and T. Onozuka, *Sum formula for multiple zeta function*, arXiv:1808.01559.
- [5] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On certain mean values of multiple zeta-functions*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **64** (2015), 19–17.
- [6] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On the functional relations for the Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Tokyo J. Math., advance publication.
- [7] S. Ikeda, K. Matsuoka, and Y. Nagata, *On certain mean values of the double zeta-function*, Nagoya Math. Journal **217** (2015), 161–190.
- [8] H. Ishikawa and K. Matsumoto, *On the estimation of the order of Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Illinois J. Math., **47**, 2003, 1141–1166.
- [9] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, *Bounds for double zeta-functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, 2006, 445–464.
- [10] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, *Bounds for triple zeta-functions*, Indag. Mathem., **19**, 2008, 97–114.
- [11] I. Kiuchi, Y. Tanigawa, and W. Zhai, *Analytic properties of double zeta-functions*, Indag. Mathem., **21**, 2011, 16–29.
- [12] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millenium (Urbana, 2000), Vol. 11, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.
- [13] K. Matsumoto, *Functional equation for double zeta-functions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **136** (2004), 1–7.
- [14] K. Matsumoto, 多重ゼータ関数の解析的理論とその応用, 数学 **59** (1) (2007), 24–45.
- [15] K. Matsumoto and M. Shōji, *Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function I*, Mosc. J. Comb. Number Theory **4** (2014), 21–39.
- [16] K. Matsumoto and M. Shōji, *Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function II*, arXiv:1606.03806.
- [17] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Functional relations for various multiple zeta-functions*, Analytic Number Theory (Kyoto, 2005), RIMS Kōkyūroku no.1512 (2006), 179–190.
- [18] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Mean value theorems for the double zeta-function*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 383–406.
- [19] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 97, Cambridge University Press (2006).

- [20] T. Nakamura, *Zeros and the universality for the Euler-Zagier-Hurwitz type of multiple zeta-functions*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), no. 4, 691–700.
- [21] T. Nakamura and L. Pańkowski, *On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions*, Math. Z. **284** (2016), 23–39.
- [22] T. Onozuka, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers*, Funct. Approx. Comment. Math., **49** (2013), 331–348.
- [23] Y. Sasaki, *Multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers*, Acta Arith. **136** (2009), 299–317.
- [24] I. Wakabayashi, 多変数関数論 (数学のかんどころ 21) , 共立出版 (2013).
- [25] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**, 2000, 1275–1283.

Appendix

第3節の証明では主要項以外の項について、解析接続と整数点の周りでの評価を省略した。ここではそれらについて説明する。

●解析接続・その1

まず始めに $\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_1^\infty$ 積分, つまり

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_1^\infty \prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r$$

の解析接続を見る。この積分の正則な範囲は, x_2 から x_r の積分の収束範囲を見ることにより次の条件で与えられる。

$$x_j \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1, \Re(s_{j-1} - 1) > -1 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

x_2 から x_r の積分区間を分割し, 2^{r-1} 個の和に書き直す。

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 = \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right) \cdots \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right)$$

これにより上で書いた $x_2, \dots, x_r$ の収束範囲は, 各項に対して片方ずつでてくる。例えば $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$ 積分についての収束範囲は次の条件で与えられる。

$$x_j \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

このように 2^{r-1} 個の各積分は各 x_j に対して1つの不等式で収束範囲が与えられるので, この収束範囲を広げられればより広い範囲に接続できる。ここでは今, 例に挙げた $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$ 積分についての有理型接続を見ていこう。まず x_2 積分の収束範囲を広げる。被積分関数を $x_2^{s_r(2)-r}$ とそれ以外の部分の積だと思い, 部分積分を行う。(ただし s_j たちの実部は十分大きいものとする。)

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r \\ &= \frac{1}{s_r(2) - r + 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+1} \\ & \times \left[\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 dx_3 dx_4 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\ & - \frac{1}{s_r(2) - r + 1} \\ & \times \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 \cdots dx_r \end{aligned}$$

これにより初項からは x_2 の積分がなくなり, 第2項の x_2 の肩の数字が1大きくなり積分の収束範囲が1だけ広がる。(実際には $\frac{\partial}{\partial x_2}$ 微分した部分の大きさを見なければ収束範囲の広がり分らないが, これについては

後述する.) それに伴い $s_r(2) - r + 1 = 0$ が 1 位の極としてでてくる. さらに第 2 項について部分積分を行うと

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r \\
&= \frac{1}{s_r(2) - r + 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+1} \\
&\times \left[\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 dx_3 dx_4 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\
&- \frac{1}{(s_r(2) - r + 1)_2} \left(\frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+2} \\
&\times \left[\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 dx_3 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\
&+ \frac{1}{(s_r(2) - r + 1)_2} \\
&\times \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r+2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 \cdots dx_r
\end{aligned}$$

この右辺を見てみると初項と第 2 項には x_2 の積分がなく, 第 3 項の x_2 の肩の数字が左辺より 2 大きくなり積分の収束範囲が 2 だけ広がる. それに伴い $s_r(2) - r + 1 = 0$ と $s_r(2) - r + 2 = 0$ が 1 位の極としてでてくる. このような部分積分を C_2 回繰り返すことにより

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} dx_1 \cdots dx_r \\
&= \sum_{J=1}^{C_2} (-1)^{J-1} \frac{1}{(s_r(2) - r + 1)_J} \left(\frac{1}{2} \right)^{s_r(2)-r+J} \\
&\times \left[\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^{J-1}}{\partial x_2^{J-1}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 dx_3 \cdots dx_r \right]_{x_2=1/2} \\
&+ \frac{(-1)^{C_2}}{(s_r(2) - r + 1)_{C_2}} \\
&\times \int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2} \int_1^\infty x_2^{s_r(2)-r+C_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \frac{\partial^{C_2}}{\partial x_2^{C_2}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\} dx_1 \cdots dx_r
\end{aligned}$$

これにより x_2 の積分に関する収束範囲が C_2 だけ広がり, それに伴い $s_r(2) - r + 1 = 0, \dots, s_r(2) - r + C_2 = 0$ が 1 位の極としてでてくる. いま右辺は $C_2 + 1$ 個の多重積分の和となっているが, これら全ての x_3 積分に対して同様の部分積分を C_3 回繰り返すと, 上の議論と同様に x_3 積分の収束範囲が C_3 だけ広がり, $s_r(3) - r + 2 = 0, \dots, s_r(3) - r + 1 + C_3 = 0$ が 1 位の極が現れる. これを x_4 積分, x_5 積分, ... と x_r 積分まで繰り返すことに

より, 最終的に解析接続が得られ, 接続範囲は次のようになる.

$$x_j \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1 - C_j \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

$$x_j \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_r(j) - r + j - 2 + 1 = 0, \dots, s_r(j) - r + j - 2 + C_j = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

最後に

$$\frac{\partial^{k_2+\dots+k_r}}{\partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} \right\}$$

の大きさの評価について見る. $(1-x_j)^{s_{j-1}-1}$ と $x_1 \cdots x_j / (e^{x_1 \cdots x_j} - 1)$ の積の微分になっているが, $(1-x_j)^{s_{j-1}-1}$ は何回微分しても $[0, 1/2]$ 区間で有限な値をとり積分の収束性には影響しない. $x_1 \cdots x_j / (e^{x_1 \cdots x_j} - 1)$ は $t/(e^t - 1)$ と $t = x_1 \cdots x_j$ の合成関数の微分となっている. まずはじめに $x_1 \cdots x_j$ の方を考えると, $x_1 \cdots x_j / (e^{x_1 \cdots x_j} - 1)$ を複数回微分して $x_1 \cdots x_j$ とその微分が複数個でてきても高々多項式オーダーであり, x_2 から x_r の積分の収束性には影響なく, x_1 については $x_1 \rightarrow \infty$ のとき多項式オーダーで増大する. 次に $t/(e^t - 1)$ についての微分だが, これは $t = 0$ を含む小さな複素開近傍上で正則関数であるため何度微分しても正則関数になり, そのため $t/(e^t - 1)$ を何回微分しても $t = 0$ で発散しない. また k 回微分したときには “ $(e^t$ と t の多項式) / $(e^t - 1)^{k+1}$ ” という形で書けるが, このとき分子の e^t の次数は k 以下であることが容易に示せるため, $t/(e^t - 1)$ の微分は t が大きいところでは指数オーダーで減衰していく. よってこの部分も x_2 から x_r の積分の収束性に影響を与えない. また, x_2 から x_r について微分しても $x_1/(e^{x_1} - 1)$ は残っており, この部分が指数オーダーで減衰するため x_1 についての積分はいつでも収束する. 以上より, 部分積分によりでてくる微分は各積分の収束性に影響を与えないことが分かる.

今見たのは $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$ 積分であった. もし x_j について $\int_{1/2}^1$ 積分の方の解析接続を見なければ, $x_j^{s_r(j)-r+j-2}$ と $(1-x_j)^{s_{j-1}-1}$ の役割を替えて部分積分すればよい. 一般に x_{j_k} について $\int_0^{1/2}$ 積分をし, x_{j_l} について $\int_{1/2}^1$ 積分をした項について同様の部分積分を行うと次の収束範囲と極が得られる.

$$x_{j_k} \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j_k) - r + j_k - 2) > -1 - C_{j_k}$$

$$x_{j_l} \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_{j_l-1} - 1) > -1 - C_{j_l}$$

$$x_{j_k} \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_r(j_k) - r + j_k - 2 + 1 = 0, \dots, s_r(j_k) - r + j_k - 2 + C_{j_k} = 0$$

$$x_{j_l} \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_{j_l-1} - 1 + 1 = 0, \dots, s_{j_l-1} - 1 + C_{j_k} = 0$$

● 解析接続・その2

次に

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} - \sum_{k=0}^{n_r(1)+r} \sum_{p_1+\dots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) dx_1 \cdots dx_r$$

の解析接続を見る. この積分は次の範囲で収束し正則である.

$$x_1 \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(1) + n_r(1)) > -1$$

$$x_j \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j) - r + j - 2) > -1, \Re(s_{j-1} - 1) > -1 \quad (j = 2, 3, \dots, r)$$

x_1 積分の収束範囲は次のように積分を書き直したときに, 後半部分が $[0, 1]^r$ 上で有界な関数であることから分

かる。

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{s_r(1)+n_r(1)} \prod_{j=2}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \\
& \quad \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} - \sum_{k=0}^{n_r(1)+r} \sum_{p_1+\cdots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) x_1^{-n_r(1)-r-1} dx_1 \cdots dx_r \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{s_r(1)+n_r(1)} \prod_{j=2}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2} \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \\
& \quad \left(\sum_{k=n_r(1)+r+1}^{\infty} \sum_{p_1+\cdots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)-n_r(1)-r-1} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) dx_1 \cdots dx_r
\end{aligned}$$

先ほど同様、 x_2 から x_r までの積分を $\int_0^{1/2}$ と $\int_{1/2}^1$ に分けるが、ここではまた $\int_0^{1/2} \cdots \int_0^{1/2}$ について見てみることにする。先ほどと同様に部分積分を繰り返せば x_2 から x_r の積分の収束範囲は C_2 から C_r だけそれぞれ広がる。またそれに伴い先ほどと同様の 1 位の極がでてくる。微分されたもの

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{k_2+\cdots+k_r}}{\partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} \left\{ \prod_{j=2}^r (1-x_j)^{s_{j-1}-1} \right. \\
& \quad \times \left. \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_1 \cdots x_j}{e^{x_1 \cdots x_j} - 1} - \sum_{k=0}^{n_r(1)+r} \sum_{p_1+\cdots+p_r=k} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} x_1^{p_r(1)} x_2^{p_r(2)} \cdots x_r^{p_r(r)} \right) x_1^{-n_r(1)-r-1} \right\}
\end{aligned}$$

のオーダーを調べる。微分される前の関数は $[0, 1/2]^r$ を含む小さな複素開集合上で正則なため、微分したものは $[0, 1/2]^r$ 上で有界となる。このことからこの微分は積分の収束性に影響を与えない。

$\int_{1/2}^1$ 積分の方の解析接続を見たければ、 $x_j^{s_r(j)-r+j-2}$ と $(1-x_j)^{s_{j-1}-1}$ の役割を入れ替えて部分積分すればよい。 x_{j_k} について $\int_0^{1/2}$ 積分をし、 x_{j_l} について $\int_{1/2}^1$ 積分をした項について、最終的には次の収束範囲と極が出る。

$$x_1 \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(1) + n_r(1)) > -1$$

$$x_{j_k} \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_r(j_k) - r + j_k - 2) > -1 - C_{j_k}$$

$$x_{j_l} \text{ の積分の収束範囲 } \cdots \Re(s_{j_l-1} - 1) > -1 - C_{j_l}$$

$$x_{j_k} \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_r(j_k) - r + j_k - 2 + 1 = 0, \dots, s_r(j_k) - r + j_k - 2 + C_{j_k} = 0$$

$$x_{j_l} \text{ の積分から現れる極 } \cdots s_{j_l-1} - 1 + 1 = 0, \dots, s_{j_l-1} - 1 + C_{j_k} = 0$$

● 負の整数点の周りでの評価

Theorem 3.1 の証明で、解析接続・その 1 とその 2 に登場する積分たちは負の整数点 $(-n_1, \dots, -n_r)$ の周りで誤差項に含まれると述べた。そのことを確かめよう。上の議論により、各積分からは 1 位の極がたくさん出てきていたが、極の位置は 1 ずつ異なっていたので、各 x_j 積分 ($j = 2, 3, \dots, r$) からでてくる極で整数点 $(-n_1, \dots, -n_r)$ を通るものは多くても 1 つである。そのため $(-n_1, \dots, -n_r)$ は多くても $r-1$ 個の極の通り道になっている。いま $r-1$ 個の極が通っている場合を考えよう。 $\int_0^{1/2}$ 積分により現れる極因子は $(s_r(j) + n_r(j))^{-1}$ であり、 $\int_{1/2}^1$ 積分により現れる極因子は $(s_{j-1} + n_{j-1})^{-1}$ である。一方、もともとの積分の前には $(\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r))^{-1}$ が掛けられていたことを思い出そう。ガンマ関数は非正の整数点で (1 位の) 極なので、その逆数は零点である。つまり

$$(\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_r))^{-1} = O(|(s_1 + n_1) \cdots (s_r + n_r)|)$$

と評価できる。状況をわかりやすくするために $s_j + n_j = \varepsilon_j$ とおき、 $x_{j_1}, \dots, x_{j_K}$ 積分の積分区間が $\int_0^{1/2}$ で、他

の変数の積分区間が $\int_{1/2}^1$ だったとしよう ($j_1 < \dots < j_K$). このとき極因子と零点因子の積は

$$\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r \cdot \prod_{k=1}^K \frac{1}{\varepsilon_r(j_k)} \cdot \prod_{\substack{2 \leq j \leq r \\ j \neq j_k (1 \leq k \leq K)}} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} = \prod_{k=1}^K \frac{\varepsilon_{j_k-1}}{\varepsilon_r(j_k)} \cdot \varepsilon_r = \varepsilon_{j_1-1} \prod_{k=1}^{K-1} \frac{\varepsilon_{j_{k+1}-1}}{\varepsilon_r(j_k)} \cdot \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r(j_K)}$$

となる. $j_{k+1} - 1 \geq j_k$ なので Theorem 3.1 の仮定より $\varepsilon_{j_{k+1}-1}/\varepsilon_r(j_k) = O(1)$ 及び $\varepsilon_r/\varepsilon_r(j_K) = O(1)$ が成り立ち, この項は $O(\varepsilon_{j_1-1})$ と評価でき誤差項となる.