

発展問題

- 1980-2 問題 23 人の生徒の年齢は 10, 11, 12, 13 歳のいずれかであり, 各年齢の生徒は 1 人以上いる. 彼らの年齢の合計は x 歳である. もし 12 歳の生徒数が 13 歳の生徒数の 1.5 倍ならば, 12 歳の生徒は何人いるだろうか?
- 1982-4 問題 「2 つの正の整数の和が n であるとき, これらの積が n で割り切れる」ための必要十分条件を求めよ.
- 1983-1 問題 チェスの総当たり戦において, 各参加者は自身以外の参加者全員とちょうど 1 回ずつ対戦する. 参加者は勝つと 1 点を, 引き分けると $1/2$ 点を, 負けると 0 点を得る. n 人の参加者のうち, k 点以上の点数を取ることができる最大の人数を n と k を用いて表せ.
- 1983-4 問題 円周上に並んだ n 個の数から 1 人ゲームを始める. 各数は 1 または -1 であり, それらは無作為に配置されている. 各手番では, 任意の連続する 3 つの数を -1 倍することができる. n 個すべての数を 1 にできるような n を求めよ.
- 1984-5 問題 各々に数字が書かれている 6 つの扇形に分割された円で 1 人ゲームを始める. 各手番では, 任意の隣り合う扇形に書かれた 2 つの数の両方に 1 を足すことができる. 扇形に書かれた数を時計回りに, $a_1, a_2, \dots, a_6$ とする. 6 つすべてを同じ数にできるための必要十分条件を求めよ.
- 1986-5 問題 n 個の数が円周上に置かれていて, 各数はその両隣の数の和である. それら n 個の数がすべて 0 となるための n の必要十分条件を求めよ.
- 1989-5 問題 次の条件を満たす 2 つの k 桁の数を (できるだけ多く) 求めよ: 一方の数をもう一方の数の後ろに書くことで得られる $2k$ 桁の数が, それらの数の積によって割り切れる.
- 1991-6 問題 引き分けのない総当たり戦において, n チームのうちどの 2 チームもちょうど 1 回試合を行う. 次の条件を満たす 2 チームが必ず存在するような最小の n はいくつだろうか?: 他のどのチームもその 2 チームの少なくとも一方に負けている.

2 章 B-2 例題 バッタはまず初めに 2cm 飛ぶ. それから, 同じ向きか逆向きに 4cm 飛ぶ. そして, 同じ向きか逆向きに 6cm 飛ぶ. これを (8cm, 10cm, $\dots$ と) 繰り返す. ジャンプの回数が 4 で割り切れるとき, もしくは 4 で割って 3 余るとき, スタート地点にすることがあり, そうでないときはスタート地点にいないことを示せ.

2 章 D-1 例題 n 人の生徒がいて, 各生徒は他の生徒のうち何人かと握手をした.

(1) 握手をした人数が等しい 2 人の生徒がいることを示せ.

(2) 握手をした人数が等しい生徒がちょうど 2 人であるとき, その 2 人が握手した回数を n を用いて表せ.

2 章 H-3 例題 10 個の数で (同じ数を含んでいてもよい), その和と積が等しくなるもののうち, 含まれる 1 の個数が最小であるものを見つけよ.

2 章 H-4 例題 m, n を 0 でない 2 つの整数とする. m, n のどちらもそれらの和で割り切れるための必要十分条件を求めよ.

2 章 N-2 例題 4×4 の表の四隅の数が 0 である. 0 でない数の残りのマスに埋めて, どんな長さの斜めの線においてもそれに含まれるすべての数の和が 0 となる表をすべて求めよ.

0	a	b	0
c	d	e	f
g	h	i	j
0	k	l	0

2 章 R-2 例題 1 から n までの番号が書かれたカードが 2 枚ずつある. 同じ番号のカードの間にはその番号の示す枚数のカードが並ぶように並べることができるための必要条件が「1 から n までの奇数が偶数個ある」つまり「 n が 4 で割ったときの余りが 0 か 3 である」となることを示せ. (実際には, この必要条件は十分条件にもなっている.)

2 章 S-2 例題 総当たり戦において, n 人の各参加者は自身以外の参加者全員とちょうど 1 回対戦する. 参加者は勝つと 1 点を得て, 引き分けると 0 点を得て, 負けると -1 点となる. 総当たり戦が終わったとき, 参加者の 1 人が x 点で, 別の 1 人が y 点である総当たり戦が存在する組 (x, y) をすべて求めよ.

2 章 W-3 例題 以下の 2 つの 3×3 の表が与えられたとする. 「任意の列のすべての数に 1 を足す」もしくは, 「任意の行のすべての数から 1 を引く」という操作で移り合えるための必要十分条件を求めよ.

a_{11}	a_{12}	a_{13}		b_{11}	b_{12}	b_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\longrightarrow$	b_{21}	b_{22}	b_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}		b_{31}	b_{32}	b_{33}

4章 S 問題3 総当たり戦において, どの3チーム A, B, C に対しても, 「 A が B に勝ち, B が C に勝っているならば, A が C に必ず勝っている」とき, その総当たり戦は**推移的**であるという.

(1) 5チームだけのどの総当たり戦も推移的とならないような, 8チームの引き分けのない総当たり戦が存在することを示せ.

(2) n チームの引き分けのない総当たり戦において, ある $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ チームだけの総当たり戦は推移的となることを示せ.

プログラミング問題

1980-2 問題 23 人の生徒の年齢は 10, 11, 12, 13 歳のいずれかであり，各年齢の生徒は 1 人以上いる．彼らの年齢の合計は x 歳である．もし 12 歳の生徒数が 13 歳の生徒数の 1.5 倍ならば，12 歳の生徒は何人いるだろうか？

1986-6 問題 各桁が異なる 7 桁の数で，各桁の数で割り切れるものをすべて列挙せよ．

2 章 B-2 例題 バッタはまず初めに 2cm 飛ぶ．それから，同じ向きか逆向きに 4cm 飛ぶ．そして，同じ向きか逆向きに 6cm 飛ぶ．これを (8cm, 10cm, $\dots$ と) 繰り返す．下記のような n 回目のジャンプまでの表を作成せよ．

1 回目のジャンプ	2							
2 回目のジャンプ	-2				6			
3 回目のジャンプ	-8		4		0		12	
4 回目のジャンプ	-16	0	-4	12	-8	8	4	20

2 章 I-3 例題 「 n 年にナターシャの歳は，彼女が生まれた年の各桁の和と等しくなった．ただし， n は 3 桁とする．彼女の生まれた年は何年か？」という問題が解を持つ n をすべて求めよ．

2 章 J-2 例題 k を 2 から 9 までの整数とする．0 から 9 までの数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．2 桁以上 4 桁以下の k の倍数を常に作ることができるカードの最小枚数はいくつか？

2 章 N-3 例題 立方体の頂点に 1, 2, 3, $\dots$, 8 のラベルを付けて，6 つの各面の 4 つの頂点のラベルの和が同じになるようなラベル付けをすべて列挙せよ．ヒント：正六面体群について調べよ．

2 章 R-2 例題 1 から n までの番号が書かれたカードが 2 枚ずつある．同じ番号のカードの間にはその番号の示す枚数のカードが並ぶように並べる並べ方が何通りあるか．できるだけ大きい n に対して求めてみよう．

2 章 S-2 例題 総当たり戦において，6 人の各参加者は自身以外の参加者全員とちょうど 1 回ずつ対戦する．参加者は勝つと 1 点を，引き分けると 0 点を，負けると -1 点を得る．総当たり戦が終わったとき，参加者の 1 人が 1 点で，別の 1 人が 4 点である総当たり戦をすべて構成せよ．

2 章 S-3 例題 引き分けのない総当たり戦において，どの 2 チームもちょうど 1 回試合を行った．参加チームを 1 列に並べて，各チームがその列における次のチームに勝っているようにするプログラムを作成せよ．

4章 S 問題3 総当たり戦において、どの3チーム A, B, C に対しても、「A が B に勝ち、B が C に勝っているならば、A が C に必ず勝っている」とき、その総当たり戦は**推移的**であるという。 n チームの引き分けのない総当たり戦が与えられたとき、推移的である $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ チームだけの総当たり戦を求めるプログラムを作成せよ。

未解決問題

- 1983-6 問題 4つの異なる1桁の数が与えられている．それらの数をちょうど1回ずつ使ってできる最大の4桁の数を作る．そして，それらの数をちょうど1回ずつ使ってできる最小の（0から始まらない）4桁の数を作る．これら2つの数の和を x とする．与えられた4つの数がだた1つしかないような x をすべて決定できるだろうか．
- 1989-5 問題 次の命題が正しいければ証明を与え，間違っているのであれば反例を挙げよ「次の条件を満たす2つの k 桁の数は， $k \geq 4$ のとき，だた1組のみである：一方の数をもう一方の数の後ろに書くことで得られる $2k$ 桁の数が，それらの数の積によって割り切れる．」
- 2章 K-3 例題 アダムはベティより2歳年上である．彼らの年齢の平方の各桁の和が同じになるとき，その和を1000歳までの範囲で調べてみると10, 19, 28, 37, 46であった．この数列は公差9の等差数列になっているが，このようになる理由はあるのだろうか？さらに，和の範囲を広げても，上記の数のみしか現れないのだろうか？
- 2章 O-2 例題 x と y を正の整数とする． x ， $-x$ ， y ， $-y$ を用いて，次を満たすできるだけ長い数列を作れ：どの連続 x 数の和も負であり，どの連続 y 数の和も正であるという性質を持つ．
- 2章 R-3 例題 円周上に n 点が均等に配置されている． n 点は白か黒である．「どの2つの黒点の間にも2つ以上の白点が存在するならば，白点が頂点である正三角形が m 個以上必ず存在する」という命題が正しくなる m の最大値を求めよ．