線形代数学28講　訂正（追加）

- p. 105, 7 行目〜8 行目（枠内）を次のものに置き換える：

> n 次正方行列 A の n 個の固有ベクトルを並べて得られる n 次正方行列が正則行列となるように固有ベクトルをとることができるならば，行列 A は対角化可能である。

- p. 108 を次のページと入れ替える：

27. 対称行列の対角化と対角化の応用

n 次正方行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき，A を**対称行列**という（§ 10 参照）．対称行列には，次の性質がある[1]．

> 対称行列の固有値は，実数である．また，対称行列の固有ベクトルは，実数を成分に持つベクトルである．

さらに，

> 対称行列の相異なる固有値に属する固有ベクトルは，互いに直交する．

実際，λ と μ を対称行列 A の相異なる固有値とする．$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ をそれぞれに属する固有ベクトルとする．つまり，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$ とする．このとき，

$$\lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}$$

であるが，A は対称行列であるから，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tA\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot {}^tA\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．よって，

$$\lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

となり，$(\lambda - \mu)\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ を得る．今，$\lambda \neq \mu$ であるから，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ を得る．よって，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交することが分かった．

3 次対称行列 A に対し，λ_1，λ_2，λ_3 をその固有値とする．このとき前節で学んだ事により，直交行列 P があって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．この式の左辺は対称行列であるから，右辺の全ての $*$ は 0 であることが分かる．つまり，対称行列について，次の結果を得る．

> 対称行列は，直交行列により対角化可能である．

[1] 証明は難しくないが，複素数を成分とする行列や複素数である固有値が必要となるので，本稿では扱わない．